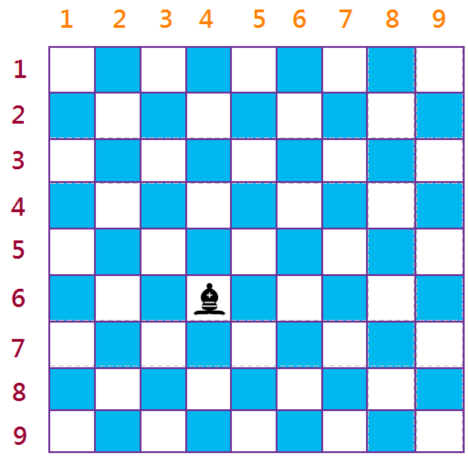
# 小升初 经典试题_2010

## 主题一、数的奇偶性

1. 如图是一张 9 行 9 列的方格纸，在每一个方格内填入所有行数与列数之和，

例如： = 4+6 = 10。在填入的 81 个数中，奇数有______个。

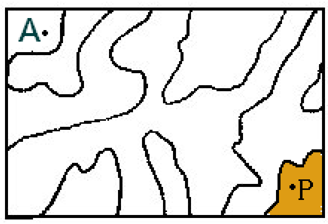



答案：由于奇数 + 偶数 = 奇数，偶数 + 奇数 = 奇数，所以行数 1，3，5，7，9 与列数 2,4,6，8 相加共可得到 5×4 = 20 个奇数，行数 2，4，6，8 与列数 1，3，5，7，9 相加共可得到 4×5 = 20 个奇数。因此共得到 20+20 = 40 个奇数。

2. 有四个互不相同的自然数，最大数与最小数之差是 4，最大数与最小数之乘积是奇数，而这四个数的和是最小的两位奇数，则这四个数的乘积等于______。

答案：由最大数与最小数之积是奇数可知，最大数与最小数都是奇数。又这四个数的和是最小的两位奇数 11，且最大数与最小数相差 4，如果最小数为 3，则四数之和最小是 3+4+5+7 = 19 > 11，不合题意，所以最小数只能是 1，最大数是 5，其余两数和为 11-1-5 = 5，这两数只能是 2 和 3，这四个数的乘积是 1×2×3×5 = 30。

下图是一个浅湖泊的平面图，图中的曲线都是湖岸。



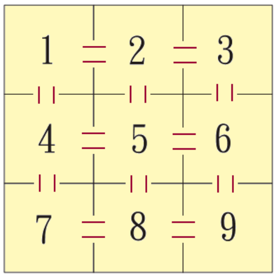

(1) 如果 P 点在岸上，那么 A 点在岸上还是在水中？

(2) 某人过这湖泊，他下水时脱鞋，上岸时穿鞋，如果有一点 B，他脱鞋的次数与穿鞋的次数都是奇数，那么 B 点在岸上还是在水中？

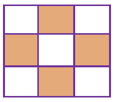
3. 台北港有 1、2、3、4、5、6 号六个码头，相邻两码头间的距离都相等。早晨有甲、乙两船从 1 号码头出发，各自在这些码头间多次往返运货。傍晚，甲船停泊在 6 号码头，乙船停泊在 1 号码头，求证：甲、乙两船的航程不相等。

答案：不相等，因为从 1 号码头出发回到 1 号码头它的航程是码头间距离的偶数倍，而从 1 号码头到 6 号码头航程是距离的奇数倍。所以不等。

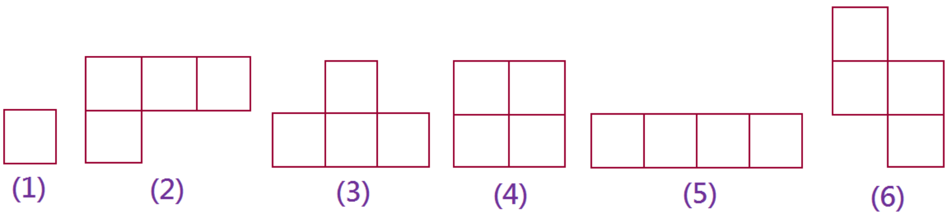
4. 如图是一所展览馆的示意图，图中的方格代表房间，每个房间都有通向任何一个邻室的门。有人想从某个房间开始，依次不重复地走遍每一个房间，他的想法能实现吗？

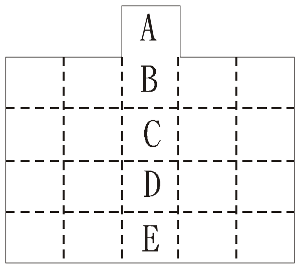



答案：如图所示，将这些房间间隔涂色，某人从编号为 1 的房间（黑格）只能进入相邻的房间（白格），顺序是黑→白→黑→白→......当走第九间房间时应当在黑色格中，显然不能从黑格房间回到 1 号这个黑格房间。

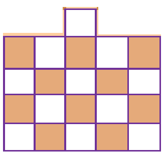

不能。

5. 如图（1）~（6）所示的六种图形拼成右下图，如果图（1），必须放在右下图的中间一列，那么它应放在 A、B、C、D、E 中的哪一位置？

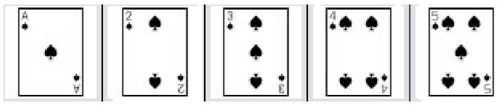
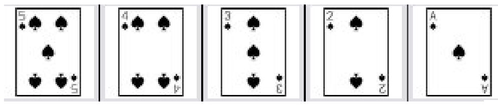



答案：把拼出的图形黑、白相间染色，如图，其中 11 个白格和 10 个黑格，当图形拼成后，图（2）（4）（5）（6）一定是黑白各 2 格，而图（3）只有 3 格是同一各颜色，另一种颜色一格。 因为前四种四图形，黑、白已各占 2×4＝8（格），而黑格总共只有 10 格，所以图（3）只能是 3 白 1 黑。由此可知图（1）一定在中间一列的黑格中，又不可能在 B 格中，故只能在 D 格中。


应放在 D 上。

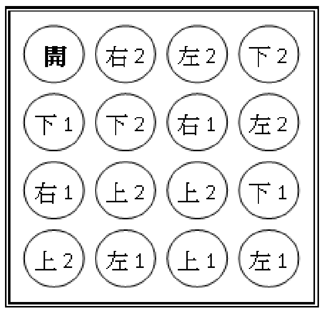
6. 教室里有 20 盏 LED 灯，从 1 到 20 编号，开始时 LED 灯全部关闭，有 20 个学生依次进入教室，第一个学生把所有的开关的单击，第二个学生把 2 的倍数号灯的开关都单击，第三个学生把 3 的倍数号灯的开关都单击，......最后第十个学生把 20 的倍数号灯的开关都单击。(开关每按一次不亮的灯变亮，亮的灯变不亮）试判定：当这 20 个学生都按过开关后，教室里哪些编号的灯是亮着的？

7. 朴克牌 A、2、3、4、5 五张牌依序排列 ，今要将它们变为反序排列，即从 5、4、3、2 到 A 。如果每次只能调换相邻的两张，那么最少要调换多少次？

分析：即将 1、2、3、4、5 变为反序 5、4、3、2、1，最少需要多少次（每次只能相邻两个调换）？

解答：一方面，从原序变为反序，每个数至少要和其他各数调换一次，所以，最少需要 4+3+2+1=10 次；另一方面，10 次可以达到反序，如：从 A、2、3、4、5 变为 2、3、4、5、A 用了 4 次，从 2、3、4、5、A 变为 3、4、5、2、A 用 3 次，从 3、4、5、2、A 变为 4、5、3、2、A 用 2 次，从 4、5、3、2、A 变为 5、4、3、2、A 用一次，共 10 次。

8. 右图是一把游戏锁，上面有 16 个按钮。游戏规则如下：按照按钮上的提示，按遍全部按钮，最后按 ” 开” 才能把锁打开。比如，当你按下第 1 行的第 2 个按钮“右 2” 时，就要按照提示，向右移动 2 格按 “下 2” 钮，再按照提示按 “下 1” 钮......，为了打开这把游戏锁，请你选择第一次应按的按钮，它在第_____行第____个。



# 主题二、拈术

1. 我们中国人一向认为“13”这个数非常不吉利，现在就利用“13”来玩数学游戏，游戏说明如下：数字 1~13 按顺序排列，有甲、乙二人，甲、乙互为先后手，每人可说出 1 或 2 个数字，说到数字 13，即为「王八」。

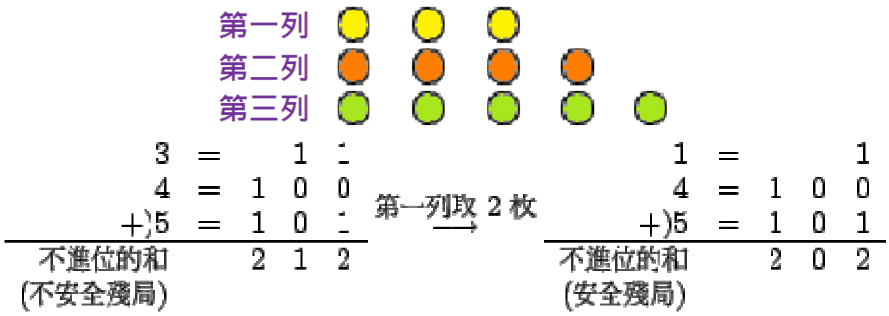
2. 两人按自然数顺序轮流报数，每人每次只能报 1 个或 2 个数。如第 1 个人报 1、2，第二个人就可以接着报 3、4。这样继续下去，谁报到 30，谁就获胜。

3. 取两堆石子各有 27 粒、18 粒，游戏双方轮流从其中的任意一堆拿走一粒或几粒石子(甚至把这堆石子一次拿光)，但每次不准一粒不拿，也不准从这堆拿几粒，从那堆拿几粒。谁拿到最后一粒或几粒石字，谁就获胜。

   取胜策略：如果两堆石子数不同，应自己先拿，从石子较多的一堆里取若干石子，使两堆的石子数相同；对方拿过之后，两堆石子数必不相同，你拿时再次使两堆石子数相同。用这种方法拿下去，你必能获胜。

4. 将十二枚铜板分三列排成「三、四、五」的游戏，如下图：

   游戏的规则很简单。两人轮流取铜板，每人每次需在某一列取一枚或一枚以上的铜板，但不能同时在两列取铜板，直到最后，将铜板拿光的人赢得此游戏。 也可以做相反的规定：最后将铜板拿光的人输。




5. 有三堆石子，石子数分别为 17、15、3。游戏时，我们应把三堆石子数分别写成下面一列数：

   1，2，4，8，16，32，64，128，......(1)中的若干个数的和。

   在这里，我们有 17=16+1；15=8+4+2+1；3=2+1。

   再考察我们得到的所有加数：16、1、8、4、2、1、2、1。将相同的加数配成一对，可以配出两对(1，1)和(2，2)。剩下 4 个加数无法配对。这时我们应找出无法配对的加数中最大的一个 16，然后在这个加数所对应的那一堆上取石子，使剩下的石子数为 12=8+4，这

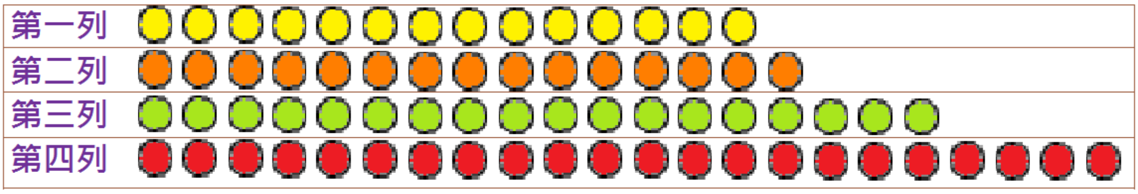
样得到的所有加数就能全部配成对了。

这时，对方不管怎么取石子，都会失去加数两两配对的形式。我们再重复使用一面的取石子方法，恢复这种两两配对的形式。这样继续下去，配对形式始终由我们取得。因此最后的配对形式(0，0，0)也必由我们取得，胜算在我们手中。

我们还接着来看例一。当我们把石子数从 17、15、3 取成 12、15、3 以后，设想对方接着把它取成 12、6、3。我们考虑到 12=8+4，6=4+2，3=2+1，所以应把它取成 5=4+1，6=4+2，3=2+1。如果对方又把它取成 5、2、3。我们就应着取成 1、2、3。对方如果把它取成 0、2、3，我们就取成 0、2、2。对方取成 0、1、2，我方取成 0、1、1。对方取成 0、0、1，我方取成 0、0、0。首盘得胜。

现在我们将取胜策略总结如下：将各堆石子数分别写成数列(1)中的若干个数的和，将每两个相同的加数配成一对，如果所有加数都能配对，就叫做石子数呈现对称形式，如果所有加数不能全部配成对，就叫做石子数呈现非对称形式。我们取胜策略就是每取一次都让石子数呈现对称形式，迫使对方每取一次石子都不可能使石子数呈现对称形式。

6. 将铜板分四列排成{14,15,18,22}如下图：游戏的规则如上题



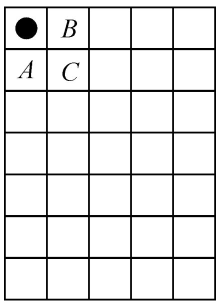

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | = | | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | = | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 18 | = | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| +)22 | = | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 不進位的和 (不安全殘局) | | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 |

$\xrightarrow{\text{第一列取 3 枚}}$

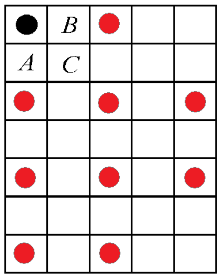
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | = | | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 15 | = | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 18 | = | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| +)22 | = | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 不進位的和 (安全殘局) | | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 |

相反规定，拿光铜板的人算输峙，只要将上面的规律略加修饰，也可以控制局面。如果你一直拥有安全残局，对方一直处于不安全的情况，到某一时候，对方留下来 的不安全残局一定会出现一种特殊型态，即是，除某一列铜板的枚数大于 1，其他各列均只有一枚铜板（拿光的各列不管它），这时候你的拿法要开始注意， 你需将较多枚铜板这一列全部取光，或者拿到只剩下一枚，决定采取何者，完全看你拿了之后，要能使剩下的列数为奇数，当然每一列均只有一枚铜板。显而易见的 是，以后一人都取一列，也是一枚，到最后拿的一定是对方，于是你就赢了。

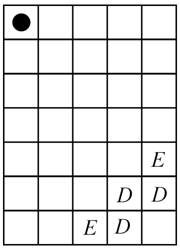
7. 如图，在一个 5×7 的方格棋盘中，左上角有一枚棋子。甲先乙后，二人轮流走



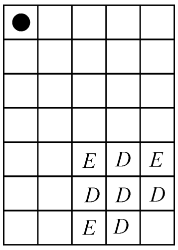
这枚棋子，每人每次只向下、向右或向右下走一格，如图中棋子可以入 A、B、C 三格之一。谁将棋子走入右下角方格中谁就获胜。如果都按最佳方法走，那么谁将获胜？怎样走？



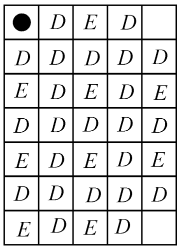

答案：要想取胜，就必须使对方将棋子移动到右下角那个格子相邻的三个格中的某一个，如图(一)中用 D 标出的三个格子，这样，自己应占据图的两“E”格，这样，下一步对方必是走到某一个“D”格，同理，自己占据斜对角上的那个“E”格，如图(二)，此时对方无论是向下，向右，还是向右下移，甲都可取胜。依次类推，我们用“D”标出对方占据的格子，用“E”标出自己占据的格子，如图(三)，先走者不能取胜，后走者只要总把棋子走入“E”格，最后一定能取胜。



图(一)



图(二)



图(三)

8. 甲、乙两人做一种游戏：两人从 1～9 中轮流取数，每人每次只允许取一个，每人各取 3 次，并且对方取过的数不能再取，谁取到的 3 个数相加和得 15，谁获胜。如果由你先取，那么确保获胜的策略是什么？

答案：从 1～9 中取出三个数相加，使其和为 15，1＋5＋9，2＋9＋4，2＋8＋5，3＋7＋5，3＋8＋4，4＋5＋6，6＋7＋2，6＋1＋8，共 8 种不同取法，这不由地使我们联想到三阶幻方。如图(一)。图中，每一横行，每一竖列和每一条对角在线的三个数之和都是 15。因此我们可以记住这个图形，选择取数的方法。

| | | |
|---|---|---|
| **4** | **9** | **2** |
| **3** | **5** | **7** |
| **8** | **1** | **6** |

在图中，5 在一行，一列及两条对角在线，它用的次数最多，现在要想使报得数为 15，就应先报 5，后报的只能报周围的八个数。并且他为了使自己报得的数为 15，并尽量限制先报者报出的数的和是 15，他应报四个角上的一个数。( 若后报者不报四个角上的数，例如报 1，先报者可报 4，这时后报者只能报 6；接下来先报者报 8，后报者只能报 2；先报者只要再报 3 就可获胜 )。但是尽管如此，后报者也必输。例如：后报者报 8，先报者报 9；后报者这时只能报 1，先报者则只能报 6；后报者这时只能报 4；接下来，只要先报者报 7，不论后报者报 2 还是 3，只要先报者报另一个，就必胜。获胜的策略是：先报 5，然后看后报者报出的数是几，只要记住三阶幻

方，采取相应策略，则可获胜。

9. 三堆石子的个数分别是 19，8，9，现在进行如下操作：每次从这三堆中任意两堆中各取出 1 个石子，然后把这 2 个石子都加到另一堆中去，试问能否经过若干次这样的操作后，使得(1).三堆石子的数分别是 22，2，12？(2)三堆都是 12？

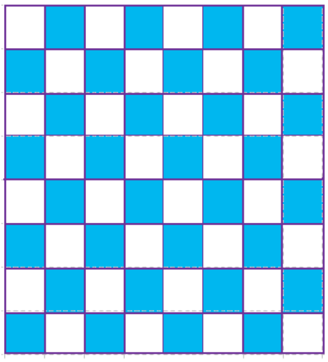
答案：(1)可行 6 次，21、7、8，23、6、7，25、5、6，24、4、8，23、3、10，22、2、12

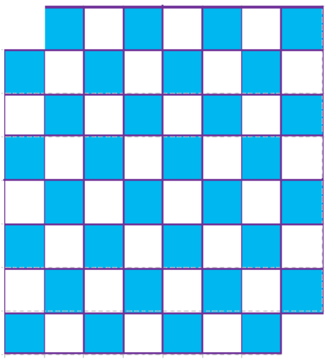
(2)不能，012 余数始终不变。

# 主题三、国际象棋

1. 能不能盖住?

国际象棋的棋盘是由 64 个小方格组成的(图 A)，这些小方格或者涂成白色，或者涂成黑色，并且相邻两个格子一定是一白一黑。假设棋中每个方格格的边长都是一公分，那么，每个小方格的面积就是 1 平方公分，整个棋的面积当然是 64 平方公分了。现在从棋盘上剪掉两个相对的小方格(图 B)，剩下部分的面积是 62 平方公分。另外，有 31 张长 2 公分、宽 1 公分的纸片  ，总的面积当然也是 62 平方公分。现在问：有没有办法用这 31 张纸片把剪掉角的棋盘上的 62 个小方格全部盖住？

(A) 

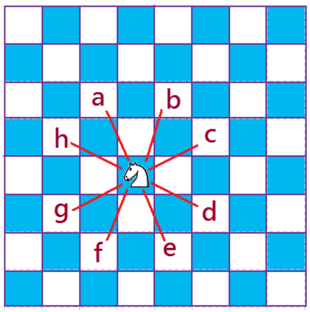
(B) 

2. 能不能走回来？

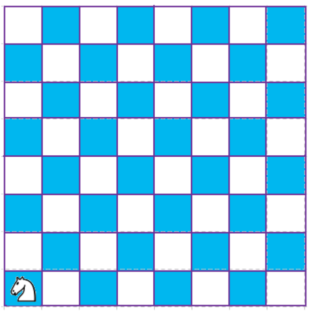
国际象棋中，旗子不是放在线的交点上(中国象棋的棋子是放在线的交点上)，而是放在小方格的中间，马的走法倒是和中国象棋相似，就是先直走一格，再斜着走一格。例如图 C 中有一只马，它就可以按箭头所指的方向跳到 a，b，c，d，e，f，h，g 这八个格子中去。

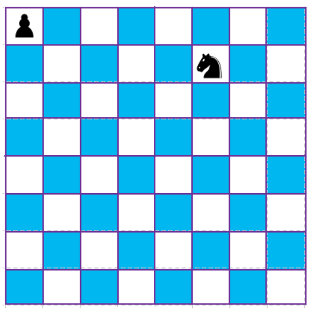
假设有一只马，开始时放在棋盘的左下角(图 D 中的马)，问能不能找到一条路线，使这个马按上述规定走法，正好每个格子经过一次，共跳 64 步，最后又回到原点？

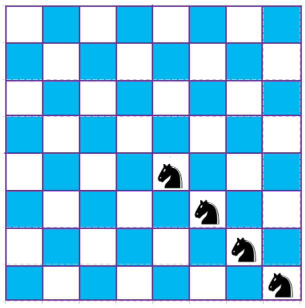
[类题]在西洋棋盘上的第1个空格里摆1个士兵，这时将摆在另1个空格的骑士移动到其他空格，每个空格各走1回，然后回到出发点的格子里（如图E）。



(C)


(D)


(E)



(F)

3. 棋盘上有4位骑士（如图F），将棋盘分成形态相同的4部分，使每个部分都有一位骑士。

4. 皇后能否安然

国际象棋中的“皇后”走法很特别，它既可以沿着水平和垂直方向走，又可以斜走，并且走的步数不限，例如图 E 中的一个皇后，它就可以走到任何一个画 “×” 的格子中去。当然，如果在某一画 “×” 的格子中有另外一个皇后就可以把它吃掉。大家来想一想；能不能在棋盘上放八只皇后，使得任何一个皇后不能吃掉另外一个？

答： 1. “盖不住”！这是因为每张纸片盖住的两个格子一定是一白一黑，因此，用 31 张纸片能

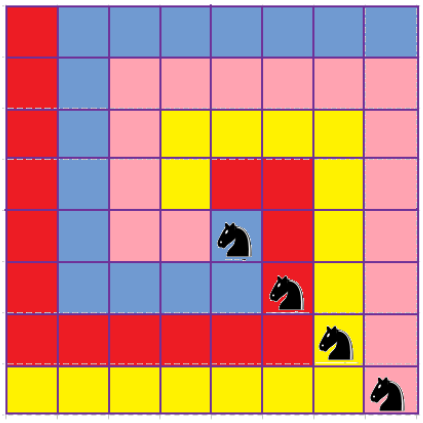
盖住的 62 个格子一定是 31 个白的和 31 个黑的。但是剪去两个格子都是白的，剩下是 32 个黑格子和 30 个白格子，所以是不能用 31 张纸片盖住的。

2. 图 G 给出了第二个问题中马的一种走法。一开始，马在左下角，就是在格子 1 中，然后依次跳到格子 2、3、……，最后由格子 64 跳回格子 1。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 29 | 16 | 31 | 20 | 37 | 14 | 33 |
| 17 | 42 | 27 | 36 | 15 | 32 | 21 | 38 |
| 28 | 25 | 30 | 19 | 40 | 23 | 34 | 13 |
| 43 | 18 | 41 | 24 | 35 | 12 | 39 | 22 |
| 54 | 7 | 44 | 3 | 56 | 9 | 50 | 11 |
| 45 | 2 | 55 | 8 | 51 | 62 | 57 | 60 |
| 6 | 53 | 64 | 47 | 4 | 59 | 10 | 49 |
| 1 | 46 | 5 | 52 | 63 | 48 | 61 | 58 |

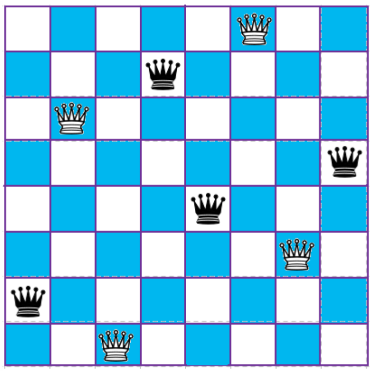
(G)

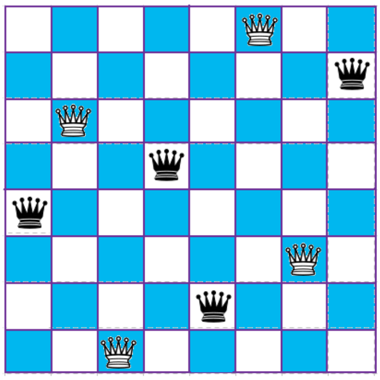
3.

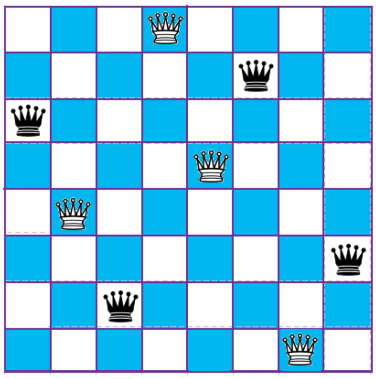


(H)

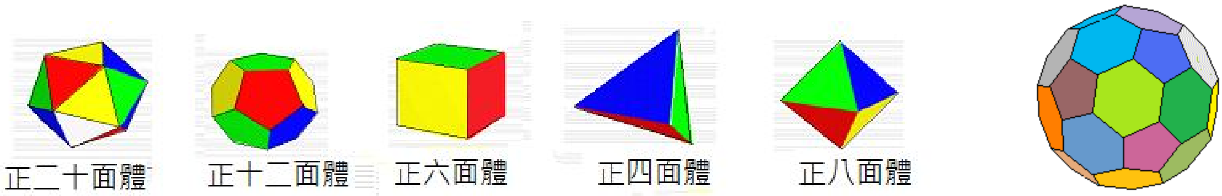
4. 这个问题是由十九世纪著名德国数学家高斯，也曾经研究过这个问题。全部答案总共有 92 种，因此叫做 “高斯八后问题”。







# 主题四、**尤拉定理**




V - E + F = 2　　（V =顶点数　，E =　边数　，F =　面数　）

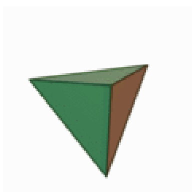
| 多面体 | F | V | E | V-E+F |
|---|---|---|---|---|
| 正四面体 | | | | |
| 正六面体 | | | | |
| 正八面体 | | | | |
| 正十二面体 | | | | |
| 正二十面体 | | | | |
| 巴克球 | | | | |

---

正四面体

V=4, E=6, F=4,

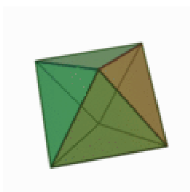
4 - 6 + 4 = 2



正八面体

V=6,E=12,F=8,

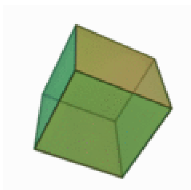
6 - 12 + 8 = 2



正六面体

V=8,E=12,F=6,

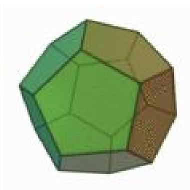
8 - 12 + 6 = 2



正十二面体

V=20,E=30,F=12,

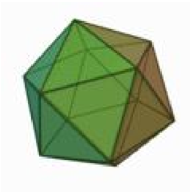
20 - 30 + 12 = 2



正二十面体

V=12,E=30,F=20,

12 - 30 + 20 = 2

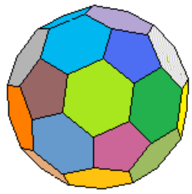


巴克球

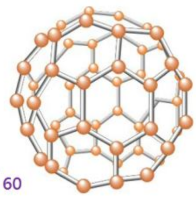
V=60, E=90, F = 32

(12 五边形+20 六边形),

60 - 90 + 32 = 2



巴克球：**截角二十面体**是由 12 个正五边形和 20 个正六边形组成的半正多面体。如果将其正六边形的边延长，将这些交点连起来，就得到一个正二十面体。足球的模样亦即截角二十面体。它的形状跟足球和 $C_{60}$ 一样。其对偶多面体为五角棱锥面十二面体。



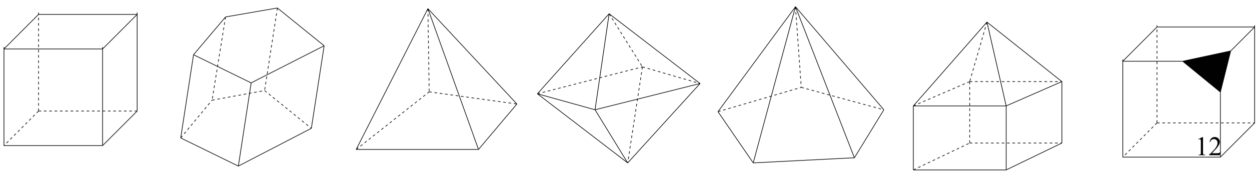
$C_{60}$

欧几里得 ： 凸正多面体只有五个

用 Euler 示性数可以证明正多面体恰好有五种;或者假设每一顶点聚集有 m 条线,每一条线是正 n 边形的一边,则因为每一正 n 边形的一个内角为 $\frac{180^o \times (n-2)}{n}$,围绕此顶点的 m 个角的和小于 $360^o$,否则此顶点附近便变成一个平面,所以 $m \times \frac{180^o \times (n-2)}{n} < 360^o$,同样可以导出：(m-2)(n-2)<4

欧几里得（Euclid）是公元前 300 年左右的希腊数学家，以其所著的《几何原本》（Elements）闻名于世。

1. 请完成下列表格：

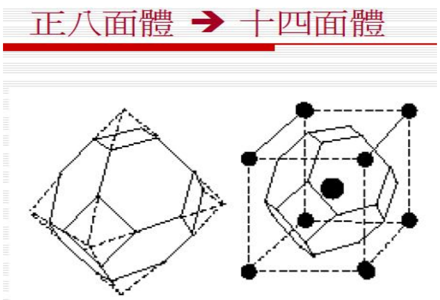


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

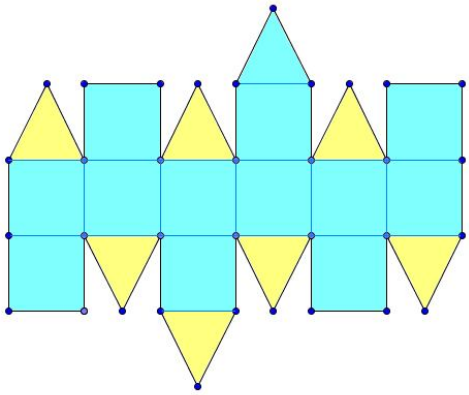
(g)

| 多面体 | F | V | E | V-E+F |
|---|---|---|---|---|
| ( a ) 立方体 | | | | |
| ( b ) 五棱柱 | | | | |
| ( c ) 四棱锥 | | | | |
| ( d ) 五棱锥 | | | | |
| ( e ) 正八面体 | | | | |
| ( f ) “屋顶” | | | | |
| ( g ) 截顶立方体 | | | | |

1. 如图所示，这个多面体的面数、顶点数和棱数各是多少？



2. 剪一块硬纸片可以做成一个多面体的纸模型(沿虚线折，沿实线粘)。这个多面体的面数、顶点数和棱数的总和是多少？

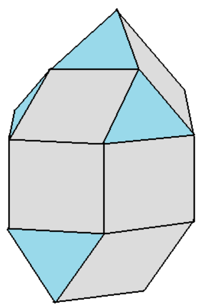


解：从展开图可以看出，粘合后的多面体有 12 个正方形和 8 个三角形，共 20 个面。

这个多面体上部的中间是一个正三角形，这个正三角形的三边 与三个正方形相连，这样上部共有 9 个顶点，下部也一样。因此，多面体的顶点总数为 9×2=18（个）。

在 20 个面的边中，虚线有 19 条，实线有 34 条。因为每条虚线表示一条棱，两条实线表示一条棱，所以多面体的总棱数为：

19＋34÷2=36（条）。



综上所述，多面体的面数、顶点数和棱数之和为：20+18＋36＝74。

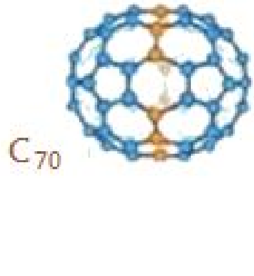
说明：数学家欧拉曾给出一个公式：V＋F-E＝2。

公式中的 V 表示顶点数，E 表示棱数，F 表示面数。

根据尤拉公式，知道上例多面体的面数和顶点数之后，棱数便可求得：

E=V＋F-2=20＋18-2=36（条）。

3. C70 分子是与 C60 分子类似的球状多面体结构，它有 70 个顶点，以每个顶点为一端都有 3 条棱，各面是五边形或六边形，求 C70 分子中五边形和六边形的个数.



答案：设有 x 个五边形和 y 个六边形 ，V-E+F=2,

∵V=70,E=（5x+6y）÷2=105 ∴F=105+2-70=x+y=37

∵ 解之得 x=12,y=25

答：C70 分子中五边形为 12 个，六边形为 25 个.

# 主题五、鸽巢理论(抽屉理论)

原则 1 :把多于 $n$ 个的物体放到 $n$ 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有两个或两个以上的物体。

这里的 $n$ 是一个自然数，“多于 $n$ 个” 是指至少有 “$n+1$ 个”，应用反证法很容易证明原则 1。

原则 2：把多于 $m \times n$ 个的物体放到 $n$ 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有 $m+1$ 个或 $m+1$ 以上的物体。

原则 2 也容易理解。如果每个抽屉里都有 $m$ 个物体，物体数量也只有 $m \times n$ 个，现在物体总数比 $m \times n$ 多，自然会有一个抽屉里有 $m+1$ 个或 $m+1$ 以上的物体。

1． 400 人中至少有两个人的生日相同.

解：将一年中的 366 天视为 366 个抽屉，400 个人看作 400 个物体，由抽屉原理 1 可以得知：至少有两人的生日相同.

又如：我们从街上随便找来 13 人，就可断定他们中至少有两个人属相相同.

“从任意 5 双手套中任取 6 只，其中至少有 2 只恰为一双手套。”

“从数 1，2，...，10 中任取 6 个数，其中至少有 2 个数为奇偶性不同。”

2． 幼儿园买来了不少兔、猫、狗塑料玩具，每个小朋友任意选择两件，那么不管怎样挑选，在任意七个小朋友中总有两个彼此选的玩具都相同，试说明道理.

解：从三种玩具中挑选两件，搭配方式只能是下面六种：(兔、兔)，(兔、猫)，(兔、狗)，(猫、猫)，(猫、狗)，(狗、狗)。把每种搭配方式看作一个抽屉，把 7 个小朋友看作物体，那么根据原理 1，至少有两个物体要放进同一个抽屉里，也就是说，至少两人挑选玩具采用同一搭配方式，选的玩具相同.

上面数例论证的似乎都是“存在”、“总有”、“至少有”的问题，不错，这正是抽屉原则的主要作用.(需要说明的是，运用抽屉原则只是肯定了“存在”、“总有”、“至少有”，却不能确切地指出哪个抽屉里存在多少.)

3． 对于任意的五个自然数，证明其中必有 3 个数的和能被 3 整除.

证明：∵任何数除以 3 所得余数只能是 0，1，2，不妨分别构造为 3 个抽屉：

[0]，[1]，[2]

①若这五个自然数除以 3 后所得余数分别分布在这 3 个抽屉中(即抽屉中分别为含有余数为 0，1，2 的数)，我们从这三个抽屉中各取 1 个(如 1~5 中取 3，4，5)，其和

(3+4+5=12)必能被 3 整除.

②若这 5 个余数分布在其中的两个抽屉中，则其中必有一个抽屉，包含有 3 个余数（抽屉原理），而这三个余数之和或为 0，或为 3，或为 6，故所对应的 3 个自然数之和是 3 的倍数.

③若这 5 个余数分布在其中的一个抽屉中，很显然，必有 3 个自然数之和能被 3 整除.

4． 对于任意的 11 个整数，证明其中一定有 6 个数，它们的和能被 6 整除.

证明：设这 11 个整数为：$a_1$，$a_2$，$a_3$…，$a_{11}$ 又 6=2×3

①先考虑被 3 整除的情形

由例 2 知，在 11 个任意整数中，必存在：

$3|a_1+a_2+a_3$，不妨设 $a_1+a_2+a_3=b_1$；

同理，剩下的 8 个任意整数中，由例 2，必存在：3|a4+a5+a6 设 a4+a5+a6=b2；

同理，其余的 5 个任意整数中，有：3|a7+a8+a9，设：a7+a8+a9=b3

②再考虑 b1、b2、b3 被 2 整除.

依据抽屉原理，b1、b2、b3 这三个整数中，至少有两个是同奇或同偶，这两个同奇（或同偶）的整数之和必为偶数.不妨设 2|b1+b2

则：6|b1+b2，即：6|a1+a2+a3+a4+a5+a6

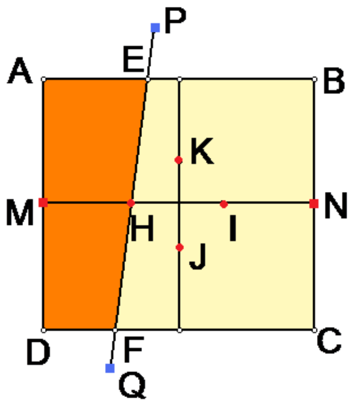
∴任意 11 个整数，其中必有 6 个数的和是 6 的倍数.

5． 任意给定 7 个不同的自然数，求证其中必有两个整数，其和或差是 10 的倍数.

分析：注意到这些数队以 10 的余数即个位数字，以 0，1，…，9 为标准制造 10 个抽屉，标以 [0]，[1]，…，[9].若有两数落入同一抽屉，其差是 10 的倍数，只是仅有 7 个自然数，似不便运用抽屉原则，再作调整：[6]，[7]，[8]， [9]四个抽屉分别与[4]，[3]，[2]，[1]合并，则可保证至少有一个抽屉里有两个数，它们的和或差是 10 的倍数.

6． 九条直线中的每一条直线都将正方形分成面积比为 2：3 的梯形，证明：这九条直线中至少有三条经过同一点.

证明：如图，设 PQ 是一条这样的直线，作这两个梯形的中位线 MN




∵这两个梯形的高相等

∴它们的面积之比等于中位线长的比，即|MH|：|NH|

∴点 H 有确定的位置

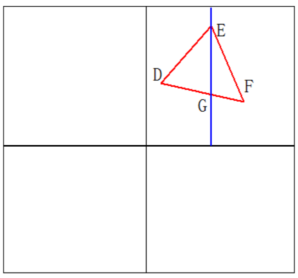
（它在正方形一对对边中点的联机上，并且|MH|：|NH|＝ 2 ： 3 ）.

由几何上的对称性，这种点共有四个，（即图中的 H、J、I、K）.已知的九条适合条件的分割直线中的每一条必须经过 H、J、I、K 这四点中的一点.把 H、J、I、K 看成四个抽屉，九条直线当成 9 个物体，即可得出必定有 3 条分割线经过同一点.

7． 边长为 1 的正方形中，任意放入 9 个点，求证这 9 个点中任取 3 个点组成的三角形中，至少有一个的面积不超过$\frac{1}{8}$.

解：将边长为 1 的正方形等分成边长为$\frac{1}{2}$的四个小正方形，视这四个正方形为抽屉，9 个点任意放入这四个正方形中，据形式 2，必有三点落入同一个正方形内.现特别取出这个正方形来加以讨论.把落在这个正方形中的三点记为 D、E、F.通过这三点中的任意一点（如 E）作并行线，如图可知：

$$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DEG}+S_{\triangle EFG}\leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times h+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-h)=\frac{h}{4}+\frac{1}{8}-\frac{h}{4}=\frac{1}{8}$$



8． 正方体各面上涂上红色或蓝色的油漆（每面只涂一种色），证明：正方体一定有三个面颜色相同.

证明：把两种颜色当作两个抽屉，把正方体六个面当作物体，那么 6=2×2+2，根据原理二，至少有三个面涂上相同的颜色.

9． 有 5 个小朋友，每人都从装有许多黑白围棋子的布袋中任意摸出 3 枚棋子；证明：这 5 个人中至少有两个小朋友摸出的棋子的颜色的配组是一样的。

分析与解答：首先要确定 3 枚棋子的颜色可以有多少种不同的情况，可以有：3 黑，2 黑 1 白，1 黑 2 白，3 白共 4 种配组情况，看作 4 个抽屜.根据抽屜原理，至少有两个小朋友摸出的棋子的颜色在同一个抽屉里，也就是他们所拿棋子的颜色配组是一样的。

10． 在一个大口袋中装着红、黄、绿三种玻璃球各有很多个，如果每次随意拿 3 个球，拿 11 次，至少有两次玻璃球颜色状况完全相同，请说明理由。

**分析**所谓有两次玻璃球颜色状况完全相同，是指如果有一次拿的是 1 黄 2 绿，另一次也拿的是 1 黄 2 绿。它们的颜色状况就是完全相同的。怎么来说明拿 11 次就一定会有两次颜色状况完全相同呢？这就需要造抽屜，用抽屜原则来说明。什么是抽屜呢？随意拿出 3 个球，会有多少种不同的颜色状况，我们把它找全，每一种颜色状况就是一个抽屜，有多少种不同的颜色状况，就是有多少个抽屜。

**解：** 每次拿不同的颜色状况：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 红 | 黄 | 绿 | 红 | 红 | 红 | 红 | 红 | 黄 | 黄 |
| 红 | 黄 | 绿 | 黄 | 红 | 红 | 黄 | 绿 | 黄 | 绿 |
| 红 | 黄 | 绿 | 绿 | 黄 | 绿 | 黄 | 绿 | 绿 | 绿 |

把这 10 种不同的颜色状况看作 10 个抽屜，拿的 11 次看作 11 个物体，根据抽屜原则 1，把 11 个物体放入 10 个抽屉中，一定有一个抽屉中有两个或两个以上的物体。

也就是说拿 11 次，一定至少有两个玻璃球的颜色状况完全相同。

10.一个圆上有 40 条直径，在每条直径两端各填上一个数，所填数字可以从 1~20 中任意选。一定存在两条直径，两端点数之和相等。

**解：** 直径两端和最小的是 2(两端都填上 1)，直径两端和最大的是 40(两端都填 20)。

因此，共有：$40-2+1=39$（种）不同的和

把 39 种不同的和看成 39 个抽屉，直径的条数是 40，大于 39，所以一定存在着两条直径，两端数字之和相等。

11. 由六个队参加的单循环比赛马场（每两队只比赛一场），无论比赛进行到什么时候，一定存在两个队，这两个队比赛过的场次相同。

**解：**无论比赛进行到什么时候，比赛场次的不同情况能有 0、1、2、3、4、5 六种情况。

但是，如果有一个队赛了 5 场，说明这个队与其它各都比赛了，因此，就不会有一场也没有赛的队。

如果有一个队比赛场次是 0，说明这个队与其它各队没比赛，因此，就不会有任何一个队赛到 5 场。

因此，比赛场次不同就应该有：0，1，2，3，4 或 1，2，3，4，5 两种情况，无论是哪种情况中的那一种，比赛场次的不同都只能有 5 种情况，把这 5 种情况看成 5 个抽屉，而参加队有 6 个，所以无论比赛进行到什么时候，一定有两个队比赛过的场次相同。

# 主题六：　　一笔画

1736 年 Euler 访问 Konigsberg,Prussia(Kaliningrad　Russia)时，他发现当地的市民正从事一项非常有趣的消遣活动。Konigsberg 城中有一条名叫 Pregel 的河流横经其中，在河上建有七座桥如图 1 所示:

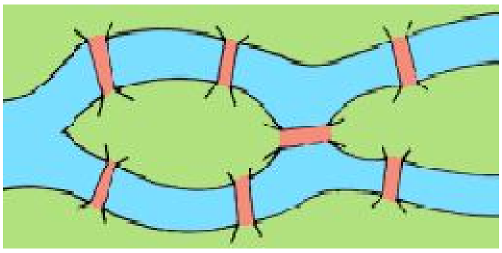


图 1

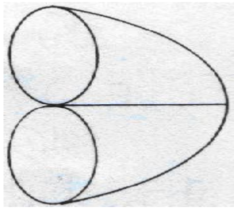


图 2

这项有趣的消遣活动是在星期六作一次走过所有七座桥的散步，每座桥只能经过一次而且起点与终点必须是同一地点。

Euler 把每一块陆地考虑成一个点，连接两块陆地的桥以线表示，便得图 2:

Euler 后来推论出此种走法是不可能的。他的论点是这样的，除了起点以外，每一次当一个人由一座桥进入一块陆地（或点）时，他（或她）同时也由另一座桥离开此点。所以每行经一点时，计算两座桥（或线）,从起点离开的线与最后回到始点的线亦计算两座桥，因此每一个陆地与其他陆地连接的桥数必为偶数.我们从 Konigsberg 七桥所成之图形中，没有一点含有偶数条数，因此上述的任务是不可能实现的。

一笔画的的过程是点、线相间排成一连串：起点→线→顶点→线→......→线→顶点→线→终点。当离开起点向前画时，每个顶点都有一条“进入线”和“离去线”，即与这些顶点相连接的线，必定是偶数条线。这样的点通常叫做偶点。

根据上面的分析可知，一个图形是否能一笔画成的判别方法如下表所示：

数学家尤拉 1736 年提出来了。他的结论是这样的：

(1)　每一个图形的奇数点个数必定是偶数。

(2)　若一图形能用一笔描绘，它必为一个连通的图形(也就是任何两点之间有路径可到)。

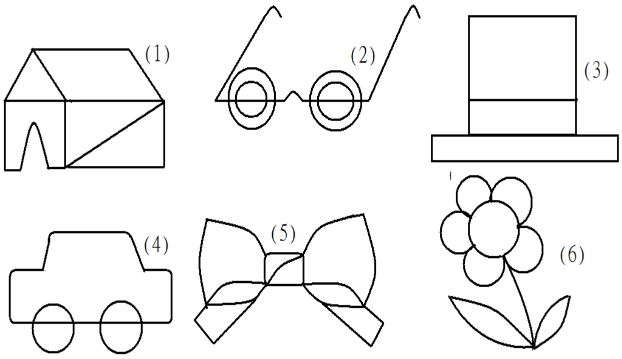
(3)　至多有两个奇数点的图形，必可以一笔描绘

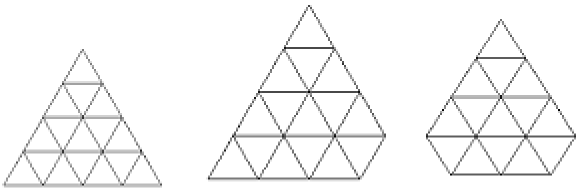
(4)　若某一个图形恰有两个奇数点，则其一点为起点，另一点为终点

(5)　若无奇数点，则起点和终点为同一点。

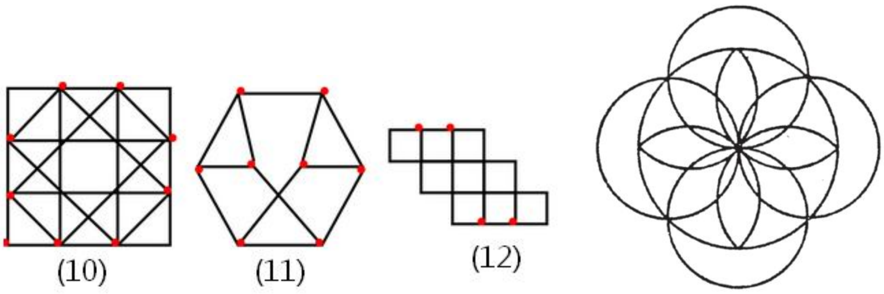
(6)　若某个图形可一笔描绘，只要掌握起点，且未走完的图形仍是连通图形，这个图就一定可以一笔描绘完成

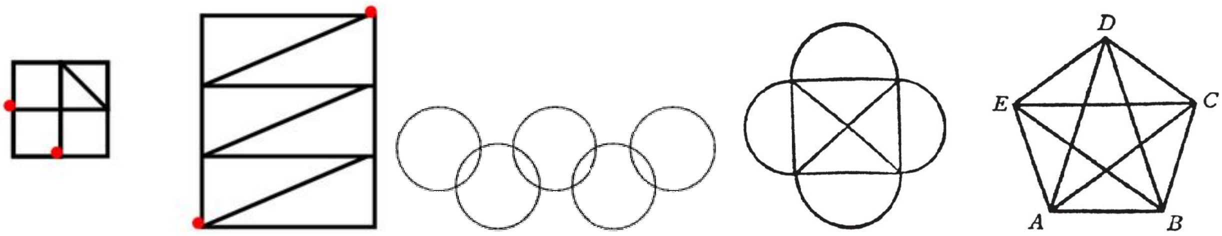
1. 下列何图可以一笔画出？

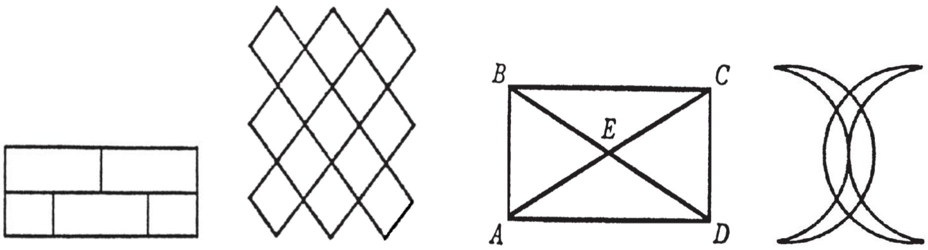


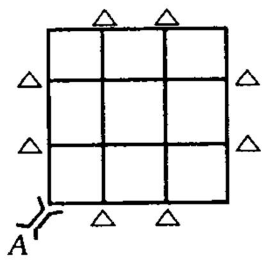
( 7 ) ( 8 ) ( 9 )



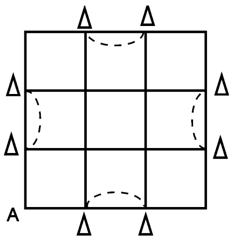

2. 如图，农改场有一块试验田，用纵横田埂划分成九个作物实验区。建宏从 *A* 处进入后能不能不走重复的路，把试验田的田埂走一遍？若不能，请找出一条走重复路线最少的快捷方式来。全程要走多少公尺？



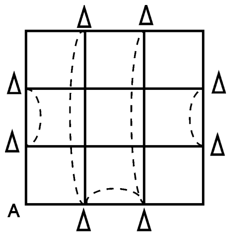

分析：建宏从 *A* 处去试验田，然后还要回到 A 处，就是图中起点和

终点都为 $A$ 点。如果要想不重复地走遍试验田的田埂，途经的各点必须全都是偶点。但图中▵处共有八个奇点，显然要不重复地走遍全部田埂是不可能的。

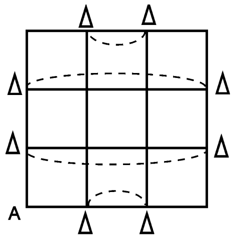
解：图中有八个奇点，建宏从 $A$ 处进入，$A$ 处出来，要走遍所有田埂，必须走 4 段重复路，由此得出走遍全部田埂的四种方案，如下图。



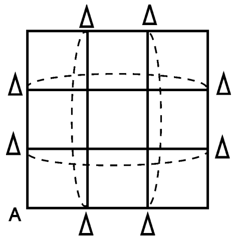
(1)



(2)



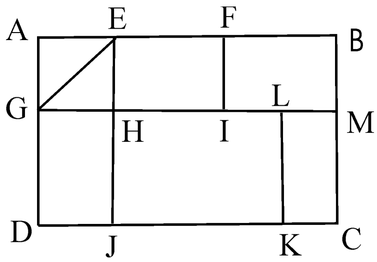
(3)



(4)

3. 下图

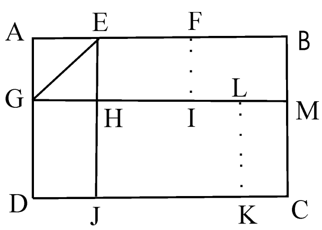
最少几笔能画出？




(甲)

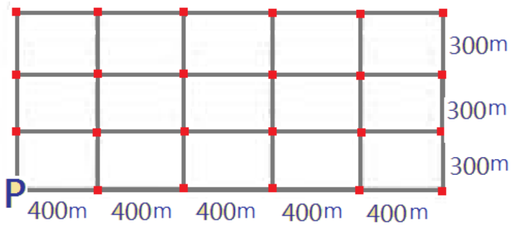
分析：图中有 $F$、$I$、$L$、$K$、$M$、$J$ 六个奇点，因此不能一笔画出。由于每一笔画成的图最多有两个奇点，所以两笔画成的图最多有四个奇点，有六个奇点的图至少要画三笔。

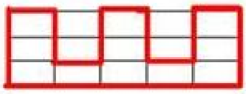
解：：图(甲)有 6 个奇点，最少用 3 笔画出，若图中有 8 个奇点，最少要用 4 笔画出。若图中 n 个(n 为偶数)奇点，则至少要 $\frac{n}{2}$ 笔才能画出。反之，在一个至少用 n(n>1)笔画出图中，必有 2n 个奇点。




(乙)

4. 下图为某邮局(P)所负责之范围,每一点是邮筒之位置,其邮差以分速 100 公尺到每一个邮筒且在每一个邮筒收信件的时间为 1 分钟,问从 P 点出发到每一个邮筒收信件,再回到 P 点至少需多少时间?

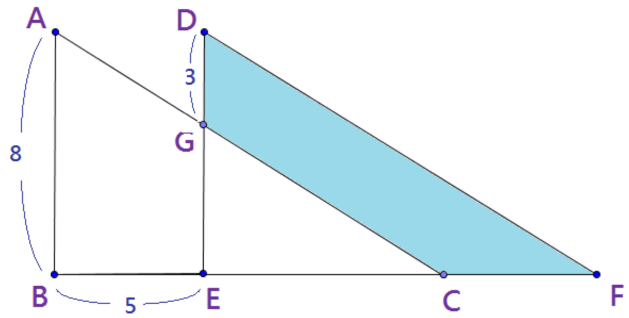


$(400 \times 10 + 300 \times 14) \div 100 + 1 \times 23 = 115$

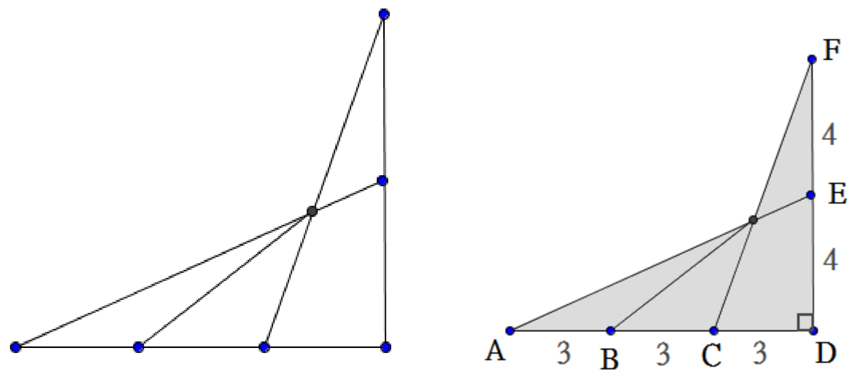
# 主题七： 面积

1. 右图是两个相同的直角三角形迭在一起，求阴影部分的面积.




解：实际上，阴影部分是一个梯形，可是它的上底、下底和高都不知道，不能直接来求它的面积.阴影部分与三角形 BCE 合在一起，就是原直角三角形.你是否看出，ABCD 也是梯形，它和三角形 BCE 合在一起，也是原直角三角形.因此，梯形 ABCD 的面积与阴影部分面积一样大.梯形 ABCD 的上底 BC，是直角边 AD 的长减去 3，高就是 DC 的长.因此阴影部分面积等于梯形 ABCD 面积=（8＋8-3）×5÷2＝32.5.

2. 下图是两个直角三角形迭放在一起形成的图形，已知 AF、FE、EC 都等于 3，CB、BD 都等于 4；求这个图形的面积？

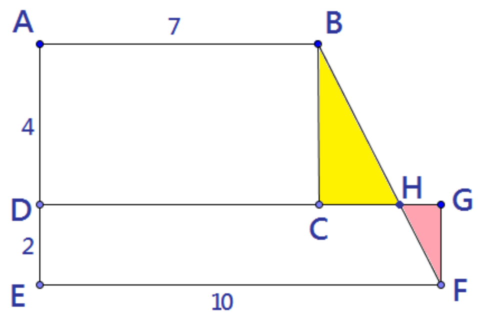



解：两个直角三角形的面积是很容易求出的.

三角形 AED 面积=（3＋3＋3）×4÷2＝18.

三角形 CFD 面积=（4＋4）×3÷2＝12.

3. 如下页左图，ABCD 是 4×7 长方形，DEFG 是 2×10 长方形.求三角形 BCH 公分与三角形 FGH 面积之差.



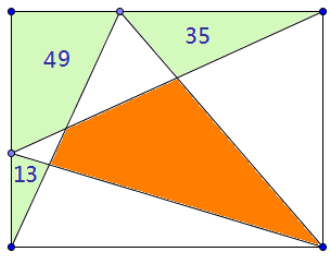

解 :三角形 BCH 与非阴影部分合起来是梯形 ABEF.三角形 HGF 与非阴影部分合起来是两个长方形的和.

（三角形 BCH 公分面积）-（三角形 HGF 面积）

=（梯形 ABEF 面积）-（两个长方形面积之和

=（7＋10）×（4＋2）÷2-（4×7＋2×10） =3.

4. 右图中，在长方形内画了一些直线，已知边上有三块浅色阴影面积分别是 13，35，49.那么图中深色阴影部分的面积是多少？



解：所求的影阴部分，恰好是三角形 ABC 与三角形 CDE 的公共部分，而面积为 13，49，35 这三块是长方形中没有被三角形 ABC 与三角形 CDE 盖住的部分，因此

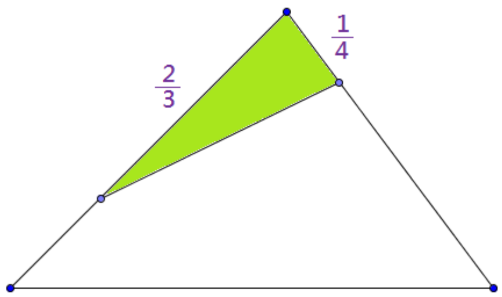
（三角形 ABC 面积）+（三角形 CDE 面积）+（13＋49＋35）

=（长方形面积）+（阴影部分面积）.

三角形 ABC，底是长方形的长，高是长方形的宽；三角形 CDE，底是长方形的宽，高是长方形的长.因此，三角形 ABC 面积，与三角形 CDE 面积，都是长方形面积的一半，就有

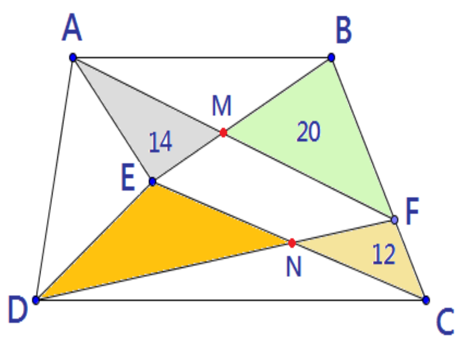
阴影部分面积=13＋49＋35＝97.

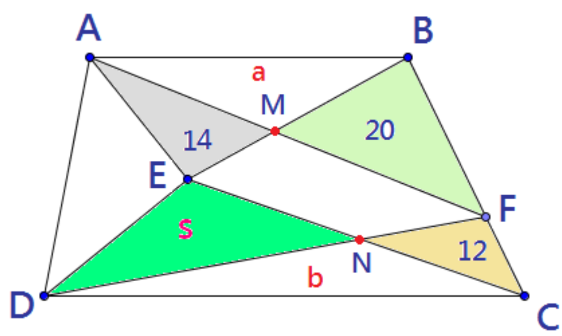
5. 如下图，三角形 AED 占三角形 ABC 面积




等分点结论（“**鸟头定理**”）的 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

6. 如图：已知在梯形 ABCD 中，上底是下底的 $\frac{2}{3}$，其中 F 是 BC 边上任意一点，△AME、△BMF、△NFC 的面积分别为 14、20、12。求△NDE 的面积。



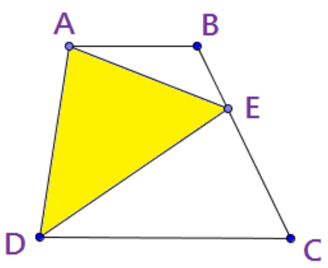




$$\frac{14+a}{\overline{AB}}+\frac{s+b}{\overline{DC}}=\frac{20+a}{\overline{AB}}+\frac{12+b}{\overline{DC}}$$

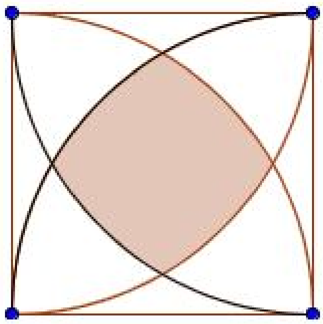
$$\frac{14+a}{2}+\frac{s+b}{3}=\frac{20+a}{2}+\frac{12+b}{3}$$

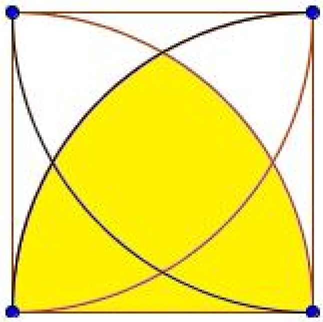
$$7+\frac{b}{3}=10+4, \qquad s=21$$

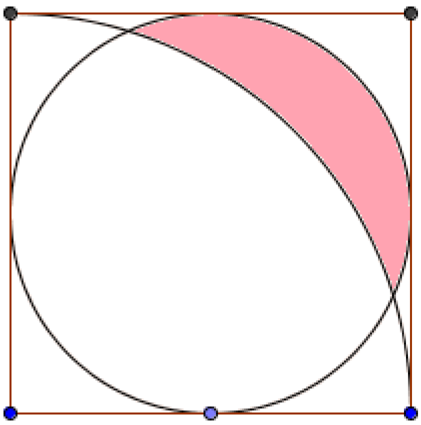
7. 已知，梯形 ABCD 中，上底是下底的$\frac{1}{2}$，E 是 BC 三等分点，求三角形△ADE 的面积占梯形 ABCD 的面积的几分之几。

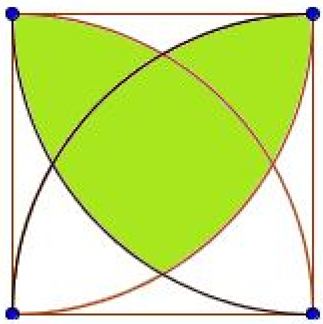



$\frac{4}{9}$









正确和最标准的解法就是近世代数中的群论，利用不动点，找轨道的个数，用 Burnside 计数定理，或者 Polya 计数定理更简单。

这里是特例，我给一个初等的解。

就在楼上的基础上修改好了。

首先，把 243 种分两类，第一类叫做

对称类，比如红红红红红，红蓝黄蓝红，他们的特点是以第三个为中心，轴对称

第二类就是非对称类

比如红红红红蓝，蓝黄红蓝蓝，etc.

注意这里有一个一一对应，就是，把非对称类的，旋转 180%（准确地说这是一个置换），得到的也属于非对称类。

这个双射，就是计数的基础。

现在数出来，对称类的个数，第三个可以任意，3，一二，也可以任意，45 位自然填充，有 27 种。

非对称的有（243-27）/2=108 中，总共 108+27=135 种，就是答案。

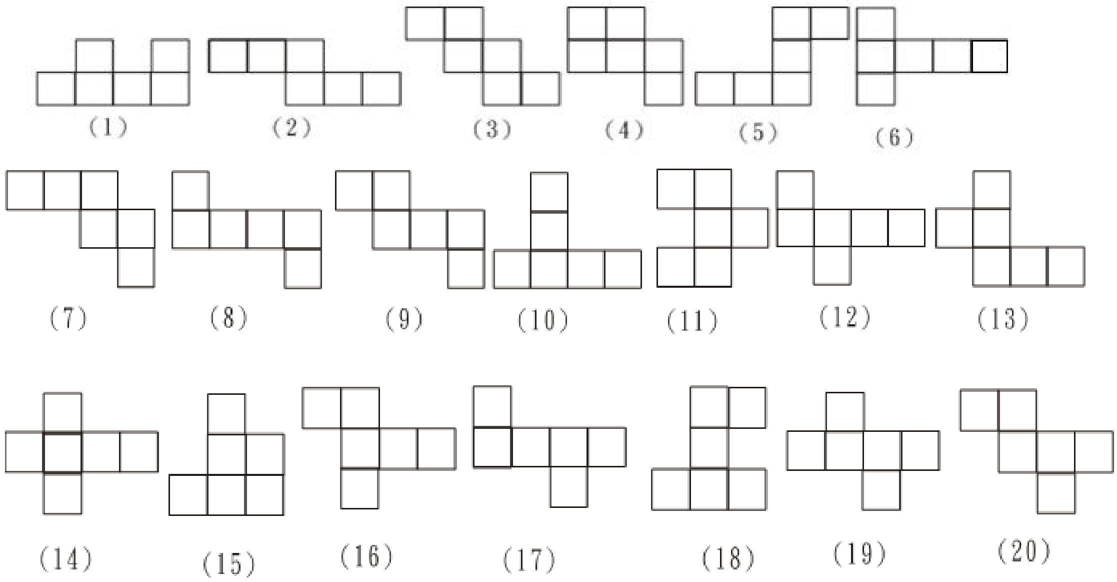
每段均有 3 种涂法，共有 3×3×3×3×3＝243 种涂法，其中颜色两头对称的（如黄红蓝红黄）

的有 3×3×3＝27 种，而不对称的被重复计算了。所以可以得到（243－27）÷2＋27＝135

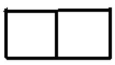
（种）不同的圆棒

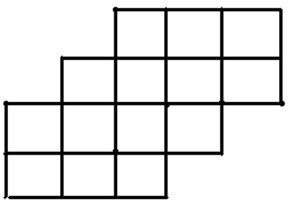
# 实 作 评 量 模 拟 试 题 ( 数 学 科 )

一.  下图中，有几个是正方体的展开图？

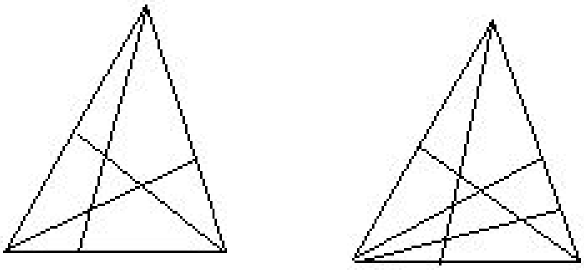



二.  规定 x✡y= $\frac{ax+y}{xy}$ ，且 5✡6=6✡5，求(3✡2)×(1✡10)的值.

三.  用七个 1 × 2 的小长方形  覆盖左下图，共有几种不同的覆盖方法？

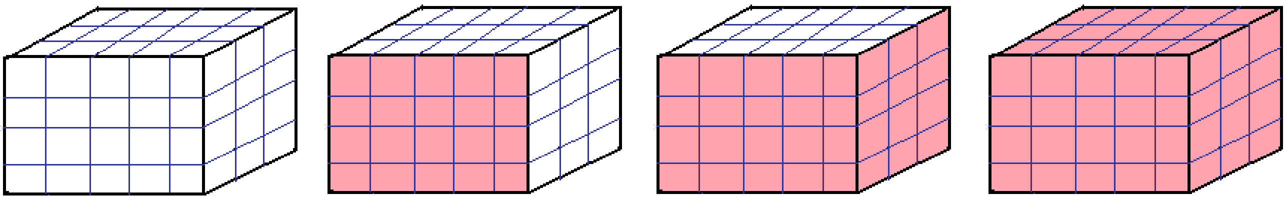


四.  (1)如图(a)中有多少个三角形？  (2)如图(b)中又有多少个三角形？



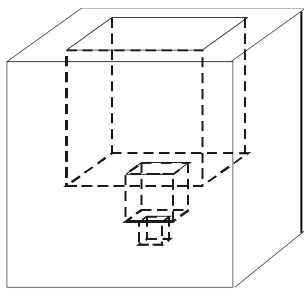
(a) (b)

五. 有 6 个边长分别是 3 公分、4 公分、5 公分的相同的长方体，把它们的某些面涂上红色，使得有的长方体只有一个面的红色的，有的长方体恰有两个面是红色的，有的长方体恰有三个面是红色的，有的长方体恰有四个面是红色的，有的长方体恰有五个面是红色的，还有一个长方体六个面都是红色的，涂色后把所有长方体分割成边长为 1 公分的小正方体，分割完毕后，恰有一面是红色的小正方体最多有几个？



…

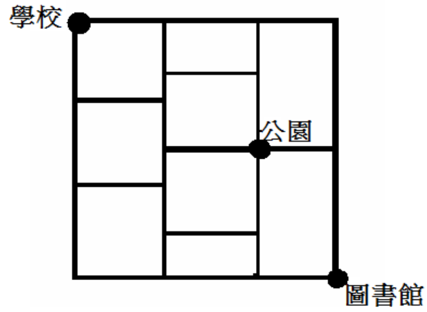
六. 一个边长 8 公分的正方体，在其上面正中位置向下挖一个边长 4 公分的正方体小洞，然后在洞的底面正中再向下挖一个边长为 2 公分的正方体的小洞，第三次小洞挖法与前两次相同，边长是 1 公分，那么最后得到的几何体的表面积是多少平方公分？



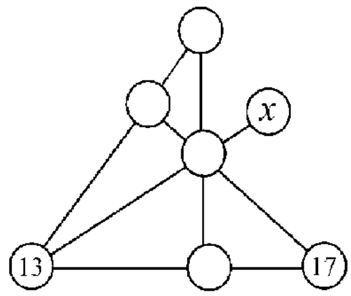
七. 现在 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克的砝码各一个，天平上能称出多少种不同重量的物体？

八. 有一批规格相同的圆棒，每根划分成长度相同的五节，每节用红、黄、蓝三种颜色来涂。问可以得到多少种颜色不同的圆棒？

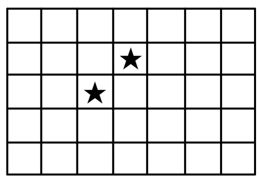
九. 建宏和怡君结伴骑车去图书馆看书，第一天他们从学校直接去图书馆；第二天他们先去公园再去图书馆；第三天公园修路不能通行，问：这三天从学校到图书馆的最短路线分别有多少种不同的走法？



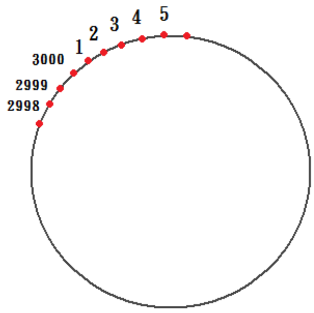

十. 在中的七个圆圈内，各填一个数，要求每一条直线上的三个数中，当中的数是两边两个数的平均数。现已经填好两个数，求图中的 $x$ 等于多少？




十一. 由 35 个单位小正方形组成的长方形中，如图所示有两个“★”。问：包含两个“★”在内的由小正方形组成的长方形(含正方形)共有__________个。



十二. 可从一个圆圈上按顺时针依次编号为 1、2、3、...、2998、2999、3000 首先取走 3 号棋子，然后再按顺时针依次每隔 2 颗棋子取走 1 颗棋子...直到 1 号棋子被取走为止。问最后这个圆圈里(1)还有多少颗棋子？(2)从最小编号开始第 182 颗棋子的编号是多少？




十三.　　一次足球赛，有 *A*、*B*、*C*、*D* 四队参，每两队都赛一场。按规则，胜一场得 2 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分，比赛结果，*B* 队得 5 分，*C* 队得 3 分，*A* 队得 1 分。所有场次共进了 9 个球。*B* 队进球最多，共进了 4 个球，*C* 队共失了 3 个球，*D* 队一个球也没进。*A* 队与 *C* 队的比分是 2：3。问 *A* 队与 *B* 队的比分是多少？

十四.　　桌子上放了 8 张扑克牌，都背面向上，牌放置的位置如图所示，现在知道：

①每张牌都是 A，K，Q，J 中的某一张；

②这 8 张牌中至少有一张是 Q；

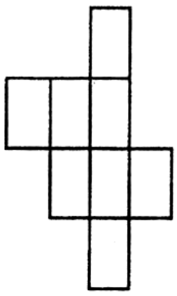
③其中只有一张 A；

④所有的 Q 都夹在两张 K 之间；

⑤至少有一张 K 夹在两张 J 之间；

⑥至少有两张 K 相邻；

若 J 与 Q 互不相邻，A 与 K 也互不相邻，试确定这 8 张牌各是什么?



十五.　　从 1 至 10 这十个整数中，选出 *A*、*B*、*C*、*D*、*E* 五个数满足下面 6 个条件：

（1）*D* 比 6 大；

（2）*D* 能被 *C* 整除；

（3）*A* 与 *D* 的和等于 *B*；

（4）*A*、*C*、*E* 三数之和等于 *D*；

（5）*A* 与 *C* 的和比 *E* 小；

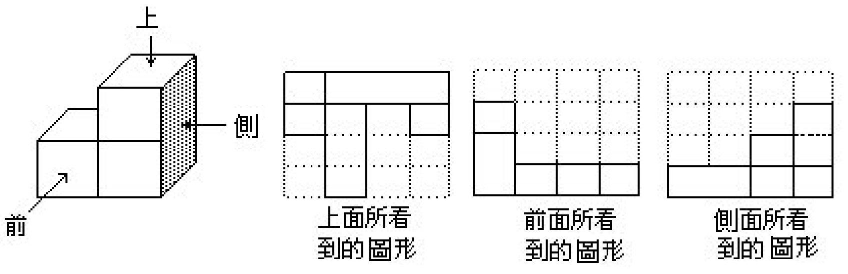
（6）*A* 与 *E* 的和比 *C* 与 5 的和小

则满足条件的解答为______。

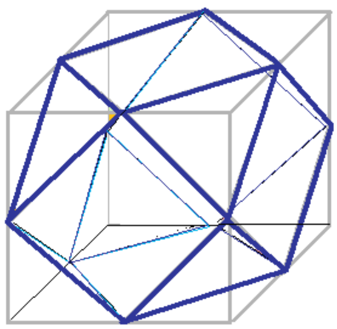
十六.　由六个队参加的单循环比赛，无论比赛进行到什么时候，一定存在三个队，这三个队相互都比赛过或相互没比赛过。

十七.　　现有一个棱长为 1×1×1cm 的正方体，一个长宽高为 1×1×2cm 的长方体，三个长宽高为 1×1×3cm 的长方体。下列图形是把这五个图形合并成某一立体图形时，从上面、前面、侧面所看到的图形。试利用下面三个图形把合并成的立体图形（如例）的样子画出来，并求出其表面积。

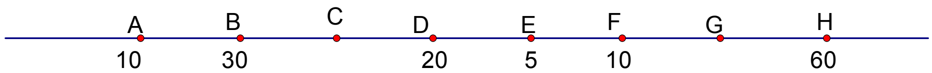
例：




十八.　　一个正方体的每个顶点都有三条棱以其为端点，沿这三条棱的三个中点，从这个正方体切下一个角，这样一共切下八个角，则余下部分的体积和正方体体积的比是_________。



十九.　　在一条公路上，每隔 100 公里有一座仓库，共有 8 座，图中数字表示各仓库库存货物的重量（单位：吨），其中 C、G 为空仓库。现在要把所有的货物集中存入一个仓库里，如果每吨货物运输 1 公里需要 0.5 元，那么集中到______仓库中运费最少，需要________运费？

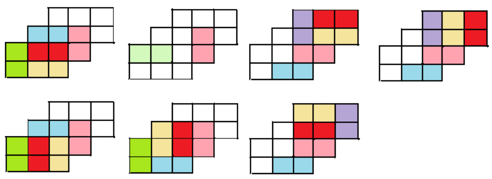


# 解答

1.答：11

图中的（2）、（3）、（6）、（8）、（9）、（12）、（14）、（16）、（17）、（19）、（20）是正方体的展开图。

2.$\frac{11}{12}$.

3.  7 种

4. (1) 17　个三角形．

(2)　29　个三角形．

5.　117 个

6.　384+64+16+4＝486（平方公分）。

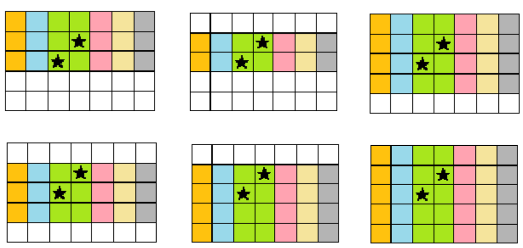
7.　31 种。

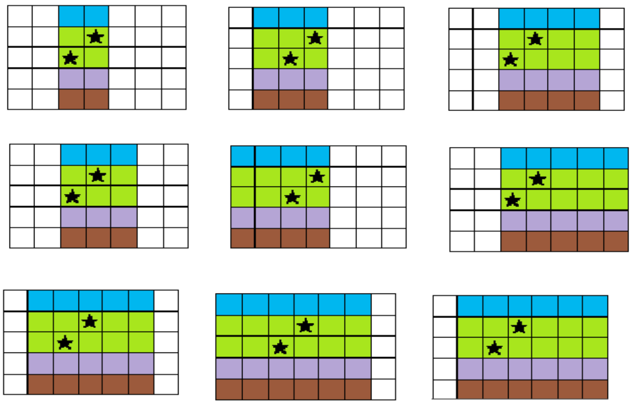
8.　135 种。

9. 第一天（无限制条件）共有 16 条；第二天（必须经过公园）共有 8 条；第三天（必须不经过公园）共有 8 条．

10. 19。

11. 72

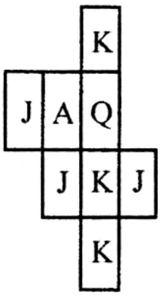




| 队名 | 赛几场 | 胜 | 负 | 平 | 进球 | 失球 | 得分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 3 | | 2 | 1 | | | 1 |
| *B* | 3 | 2 | | 1 | 4 | | 5 |
| *C* | 3 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 3 |
| *D* | 3 | | | 3 | 0 | | 3 |

12. (1)133 (2)407

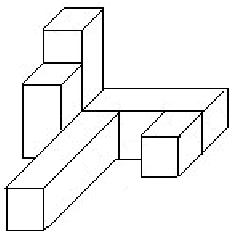
13. *A* 队与 *B* 队的比分是 0：3




14. $A=1$，$B=9$，$C=2$，$D=8$，$E=5$ 或 $A=1$，$B=10$，$C=3$，$D=9$，$E=5$。

15. 略

16. 立体图形的形状如下图所示。



一共有 $18+16+12+2=46$（$cm^2$）。

17. 三棱锥的体积：底面积×高×1/3

（1×1÷2×1×1/3×8）:（2×2×2）=1：6。

（6 - 1）: 6=5：6。

余下部分的体积和正方体体积的比是 5：6。5：6。

18. _F_，**需要 16750 元**