

## 目录

1. 仁华思维导引解析 1 讲：循环小数与分数.....	2
2. 仁华思维导引解析 2 讲：和差倍分问题.....	9
3. 仁华思维导引解析 3 讲：行程问题之三.....	16
4. 仁华思维导引解析 4 讲：数的整除.....	27
5. 仁华思维导引解析 5 讲：质数与合数.....	36
6. 仁华思维导引解析 6 讲：格点与割补.....	41
7. 仁华思维导引解析 7 讲：数字谜综合之一.....	54
8. 仁华思维导引解析 8 讲：包含与排除.....	61
9. 仁华思维导引解析 9 讲：复杂抽屉原理.....	67
10. 仁华思维导引解析 10 讲：逻辑推理之一.....	75
11. 仁华思维导引解析 11 讲：估算与比较、通分与裂项.....	88
12. 仁华思维导引解析 12 讲：行程问题之四.....	99
13. 仁华思维导引解析 13 讲：应用题综合之一.....	112
14. 仁华思维导引解析 14 讲：约数与倍数.....	120
15. 仁华思维导引解析 15 讲：余数问题.....	126
16. 仁华思维导引解析 16 讲：直线形面积.....	132
17. 仁华思维导引解析 17 讲：圆与扇形.....	144
18. 仁华思维导引解析 18 讲：数列与数表综合.....	154
19. 仁华思维导引解析 19 讲：数字谜综合之二.....	161
20. 仁华思维导引解析 20 讲：计数综合之一.....	169

## 1. 仁华思维导引解析 1 讲: 循环小数与分数

## 【内容概述】

循环小数与分数的互化, 循环小数之间简单的加、减运算, 涉及循环小数与分数的主要利用运算定律进行简算的问题.

## 【典型问题】

【难度等级】



1. 真分数  $\frac{a}{7}$  化为小数后, 如果从小数点后第一位的数字开始连续若干个数字之和是1992, 那么a是多少?

【分析与解】  $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ ,  $\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$ ,  $\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$ ,  $\frac{4}{7} = 0.\dot{5}7142\dot{8}$ ,  $\frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}$ ,

$$\frac{6}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2}.$$

因此, 真分数  $\frac{a}{7}$  化为小数后, 从小数点第一位开始每连续六个数字之和都是  $1+4+2+8+5+7=27$ ,

又因为  $1992 \div 27 = 73 \cdots 21$ ,  $27 - 21 = 6$ , 而  $6 = 2+4$ , 所以  $\frac{a}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2}$ , 即  $a=6$ .

【难度等级】



2. 某学生将  $1.2\dot{3}$  乘以一个数a时, 把  $1.2\dot{3}$  误看成  $1.23$ , 使乘积比正确结果减少0.3. 则正确结果该是多少?

【分析与解】由题意得:  $1.2\dot{3}a - 1.23a = 0.3$ , 即:  $0.00\dot{3}a = 0.3$ , 所以有:  $\frac{3}{900}a = \frac{3}{10}$ . 解得  $a=90$ , 所

$$\text{以 } 1.2\dot{3}a = 1.2\dot{3} \times 90 = 1\frac{23-2}{90} \times 90 = \frac{111}{90} \times 90 = 111.$$

【难度等级】☆☆

3. 计算:  $0.\dot{1}+0.125+0.\dot{3}+0.1\dot{6}$ , 结果保留三位小数.

【分析与解】方法一:  $0.\dot{1}+0.125+0.\dot{3}+0.1\dot{6}$   
 $\approx 0.1111+0.1250+0.3333+0.1666$   
 $= 0.7359$   
 $\approx 0.736.$

方法二:  $0.\dot{1}+0.125+0.\dot{3}+0.1\dot{6}$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{3}{9} + \frac{15}{90}$$

$$= \frac{11}{18} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{53}{72}$$

$$= 0.73\dot{6}\dot{1}$$

$$\approx 0.736.$$

【难度等级】☆☆

4. 计算：  $0.\dot{0}1 + 0.\dot{1}2 + 0.\dot{2}3 + 0.\dot{3}4 + 0.\dot{7}8 + 0.\dot{8}9$  .

【分析与解】方法一：  $0.\dot{0}1 + 0.\dot{1}2 + 0.\dot{2}3 + 0.\dot{3}4 + 0.\dot{7}8 + 0.\dot{8}9$

$$= \frac{1}{90} + \frac{12-1}{90} + \frac{23-2}{90} + \frac{34-3}{90} + \frac{78-7}{90} + \frac{89-8}{90}$$

$$= \frac{1}{90} + \frac{11}{90} + \frac{21}{90} + \frac{31}{90} + \frac{71}{90} + \frac{81}{90}$$

$$= \frac{216}{90}$$

$$= 2.4.$$

方法二：  $0.\dot{0}1 + 0.\dot{1}2 + 0.\dot{2}3 + 0.\dot{3}4 + 0.\dot{7}8 + 0.\dot{8}9$

$$= 0 + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.7 + 0.8 + (0.\dot{0}1 + 0.\dot{0}2 + 0.\dot{0}3 + 0.\dot{0}4 + 0.\dot{0}8 + 0.\dot{0}9)$$

$$= 2.1 + 0.\dot{0}1 \times (1+2+3+4+8+9)$$

$$= 2.1 + \frac{1}{90} \times 27$$

$$= 2.1 + 0.3$$

$$= 2.4.$$

【难度等级】☆☆☆

5. 将循环小数  $0.\dot{0}2\dot{7}$  与  $0.\dot{1}7967\dot{2}$  相乘, 取近似值, 要求保留一百位小数, 那么该近似值的最后一位小数是多少?

【分析与解】  $0.\dot{0}2\dot{7} \times 0.\dot{1}7967\dot{2} = \frac{27}{999} \times \frac{179672}{999999} = \frac{1}{37} \times \frac{179672}{999999} = \frac{4856}{999999} = 0.\dot{0}0485\dot{6}$ .

循环节有 6 位,  $100 \div 6 = 16 \cdots 4$ , 因此第 100 位小数是循环节中的第 4 位 8, 第 101 位是 5, 这样四舍五入后第 100 位为 9.

【难度等级】☆☆

6. 将下列分数约成最简分数:  $\frac{16666666666}{66666666664}$ .

【分析与解】 找规律:  $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{166}{664} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{1666}{6664} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{16666}{66664} = \frac{1}{4}$ , ...

所以  $\frac{16666666666}{66666666664} = \frac{1}{4}$ .

【难度等级】☆☆

7. 将下列算式的计算结果写成带分数:  $\frac{0.5 \times 236 \times 59}{119}$ .

【分析与解】  $\frac{0.5 \times 236 \times 59}{119} = \frac{118 \times 59}{119} = \left(1 - \frac{1}{119}\right) \times 59 = 59 - \frac{59}{119} = 58 \frac{60}{119}$ .

【难度等级】☆☆

8. 计算:  $7 \frac{4480}{8333} + \frac{21934}{25909} + 1 \frac{18556}{35255}$ .

【分析与解】  $7 \frac{4480}{8333} + \frac{21934}{25909} + 1 \frac{18556}{35255}$

$$= \frac{62811}{8333} \times \frac{25909}{21934} \times \frac{35255}{53811}$$

$$= \frac{3 \times 7 \times 3 \times 997}{13 \times 641} \times \frac{13 \times 1993}{2 \times 11 \times 997} \times \frac{5 \times 641 \times 11}{3 \times 3 \times 3 \times 1993}$$

$$= \frac{7 \times 5}{2 \times 3}$$

$$= 5 \frac{5}{6}$$

【难度等级】☆☆

9. 计算:  $\frac{1}{8128} + \frac{1}{254} + \frac{1}{508} + \frac{1}{1016} + \frac{1}{2032} + \frac{1}{4064} + \frac{1}{8128}$ .

【分析与解】原式 =  $\frac{1}{8128} + \frac{1}{8128} + \frac{1}{4064} + \frac{1}{2032} + \frac{1}{1016} + \frac{1}{508} + \frac{1}{254}$

$$= \frac{2}{8128} + \frac{1}{4064} + \frac{1}{2032} + \frac{1}{1016} + \frac{1}{508} + \frac{1}{254}$$

$$= \frac{1}{4064} + \frac{1}{4064} + \frac{1}{2032} + \frac{1}{1016} + \frac{1}{508} + \frac{1}{254}$$

$$= \frac{1}{2032} + \frac{1}{2032} + \frac{1}{1016} + \frac{1}{508} + \frac{1}{254}$$

$$= \frac{1}{1016} + \frac{1}{1016} + \frac{1}{508} + \frac{1}{254}$$

$$= \frac{1}{508} + \frac{1}{508} + \frac{1}{254}$$

$$= \frac{1}{254} + \frac{1}{254}$$

$$= \frac{1}{127}.$$

【难度等级】☆☆

10. 计算:  $\frac{1}{4} \times \left( 4.85 + \frac{5}{18} - 3.6 + 6.15 \times 3\frac{3}{5} \right) + \left[ 5.5 - 1.75 \times \left( 1\frac{2}{3} + \frac{19}{21} \right) \right]$ .

【分析与解】原式 =  $\frac{1}{4} \times 3.6 \times (4.85 - 1 + 6.15) + 5.5 - \frac{7}{4} \times \frac{5}{3} - \frac{7}{4} \times \frac{19}{21}$

$$= \frac{1}{4} \times 3.6 \times 10 + 5.5 - \frac{35 + 19}{12}$$

$$= 9 + 5.5 - 4.5$$

$$= 10.$$

【难度等级】☆☆☆

11. 计算:  $41.2 \times 8.1 + 11 \times 9\frac{1}{4} + 537 \times 0.19$ .

【分析与解】原式 =  $412 \times 0.81 + 11 \times 9.25 + 0.19 \times (412 + 125)$

$$= 412 \times (0.81 + 0.19) + 11 \times 9.25 + 0.19 \times 125$$

$$= 412 + 11 \times 8 + 11 \times 1.25 + 19 \times 1.25$$

$$= 412 + 88 + 1.25 \times 30$$

$$= 500 + 37.5$$

$$= 537.5.$$

【难度等级】☆☆

12. 计算:  $\left(9\frac{2}{7} + 7\frac{2}{9}\right) + \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{9}\right)$ .

【分析与解】原式 =  $\left(\frac{65}{7} + \frac{65}{9}\right) + \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{9}\right) = \left[13 \times \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{9}\right)\right] + \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{9}\right) = 13$ .

【难度等级】☆☆

13. 计算:  $\frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6 + 4 \times 8 \times 12 + 7 \times 14 \times 21}{1 \times 3 \times 5 + 2 \times 6 \times 10 + 4 \times 12 \times 20 + 7 \times 21 \times 35}$ .

【分析与解】 $\frac{1 \times 2 \times 3 \times (1^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3)}{1 \times 3 \times 5 \times (1^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3)} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 3 \times 5} = \frac{2}{5}$ .

【难度等级】☆☆

14. (1) 已知等式  $0.126 \times 79 + 12\frac{3}{5} \times \square - 6\frac{3}{10} \div 25 = 10.08$ , 那么□所代表的数是多少?

(2) 设上题答案为a. 在算式  $(1993.81 + a) \times \bigcirc$  的○内, 填入一个适当的一位自然数, 使乘积的个位数字达到最小值. 问○内的所填数字是多少?

【分析与解】(1) 设□所代表的数是x,  $0.126 \times 79 + 12\frac{3}{5}x - 6\frac{3}{10} \div 25 = 10.08$ , 解得:  $x = 0.03$ , 即□所代表的数是0.03.

(2) 设○内的所填数字是y,  $(1993.81 + 0.03) \times y = 1993.84 \times y$ , 有当y为8时  $1993.84 \times y = 1993.84 \times 8 = 15050.94$ .

【难度等级】☆☆

15. 求下述算式计算结果的整数部分:

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) \times 385$ .

【分析与解】原式 =  $\frac{1}{2} \times 385 + \frac{1}{3} \times 385 + \frac{1}{5} \times 385 + \frac{1}{7} \times 385 + \frac{1}{11} \times 385 + \frac{1}{13} \times 385$   
 $\approx 192.5 + 128.3 + 77 + 55 + 35 + 29.6$   
 $= 517.4$

所以原式的整数部分是517.



## 2. 仁华思维导引解析 2 讲: 和差倍分问题

## 【内容概述】

各种具有和差倍分关系的综合应用题, 重点是包含分数的问题. 基本的解题方法是将已知条件用恰当形式写出或变形, 并结合起来进行比较而求出相关的量, 其中要注意单位“1”的恰当选取.

## 【典型问题】

## 【难度等级】★

1. 有甲、乙两个数, 如果把甲数的小数点向左移两位, 就是乙数的  $\frac{1}{8}$ , 那么甲数是乙数的多少倍?

**【分析与解】** 甲数的小数点向左移动两位, 则甲数缩小到原来的  $\frac{1}{100}$ , 设这时的甲数为“1”, 则乙数为  $1 \times 8 = 8$ , 那么原来的甲数  $= 1 \times 100 = 100$ , 则甲数是乙数的  $100 \div 8 = 12.5$  倍.

## 【难度等级】★ ★

2. 有三堆棋子, 每堆棋子数一样多, 并且都只有黑、白两色棋子. 已知第一堆里的黑子和第二堆里的白子一样多, 第三堆里的黑子占全部黑子的  $\frac{2}{5}$ . 如果把这三堆棋子集中在一起, 那么白子占全部棋子的几分之几?

**【分析与解】** 如下表所示:

第一堆	黑子	白子
第二堆	黑子	白子
第三堆	黑子	白子

设全部黑子为“5”份, 第三堆里的黑子则为“2”份, 那么剩下的黑子占  $5 - 2 = 3$  份, 而第一堆里的黑子和第二堆里的白子一样多, 将第一堆黑子和第二堆白子调换, 则第二堆全部为黑子.

所以第二堆棋子总数为“3”份, 三堆棋子总数为  $3 \times 3 = 9$  份, 其中黑子占“5”份, 则白子占剩下

的  $9 - 5 = 4$  份, 那么白子占全部棋子的  $4 \div 9 = \frac{4}{9}$ .

### [难度等级] ☆

3. 甲、乙两厂共同完成一批机床的生产任务, 已知甲厂比乙厂少生产8台机床, 并且甲厂的生产量是乙厂的  $\frac{12}{13}$ , 那么甲、乙两厂一共生产了机床多少台?

**[分析与解]** 因为甲厂生产的是乙厂的  $\frac{12}{13}$ , 也就是甲厂为12份, 乙厂为13份, 那么甲厂比乙厂少1份=8台. 总共=8×(12+13)=200台.

### [难度等级] ☆ ☆

4. 足球赛门票15元一张, 降价后观众增加了一半, 收入增加了五分之一, 那么一张门票降价多少元?

**[分析与解]** 设原来人数为“1”, 则现在有1+0.5=1.5.

原来收入为1×15=15, 降价后收入为15× $(1+\frac{1}{5})$ =18元, 那么降价后门票为18÷1.5=12元, 则一张门票降价了15-12=3元.

### [难度等级] ☆ ☆

5. 李刚给军属王奶奶运蜂窝煤, 第一次运了全部的  $\frac{3}{8}$ , 第二次运了50块. 这时, 已运来的恰好是没运来的  $\frac{5}{7}$ . 问还有多少块蜂窝煤没有运来?

**[分析与解]** 已经运来的是没有运来的  $\frac{5}{7}$ , 则运来的是5份, 没有运来的是7份, 也就是运来的占总数的

$\frac{5}{12}$ . 则共有50÷ $(\frac{5}{12}-\frac{3}{8})$ =1200块, 还剩下1200× $\frac{7}{12}$ =700块.

### [难度等级] ☆ ☆

6. 有两条纸带, 一条长21厘米, 一条长13厘米, 把两条纸带都剪下同样长的一段以后, 发现短纸带剩

下的长度是长纸带剩下的长度的  $\frac{8}{13}$ . 问剪下的一段长多少厘米?

**[分析与解]** 方法一: 开始时, 两条纸带的长度差为  $21-13=8$ (厘米).

因为两条纸带都剪去同样长度, 所以两条纸带前后的长度差不变.

设剪后短纸带长度为“8”份, 长纸带即为“13”份, 有它们的差为  $13-8=5$ 份, 则每份为  $8 \div 5=1.6$ (厘米).

所以, 剪后短纸带长为  $1.6 \times 8=12.8$ (厘米), 于是剪去  $13-12.8=0.2$ (厘米).

方法二: 设剪下  $x$ 厘米,

则  $\frac{13-x}{21-x} = \frac{8}{13}$ , 交叉相乘得:  $13 \times (13-x) = 8 \times (21-x)$ , 解得  $x=0.2$ ,

即剪下的一段长0.2厘米.

### [难度等级] ☆ ☆

7. 为挖通300米长的隧道, 甲、乙两个施工队分别从隧道两端同时相对施工. 第一天甲、乙两队各掘进

了10米, 从第二天起, 甲队每天的工作效率总是前一天的2倍, 乙队每天的工作效率总是前一天的  $1\frac{1}{2}$ 倍. 那么, 两队挖通这条隧道需要多少天?

**[分析与解]** 见下表: 说明在第五天没有全天干活, 那么第四天干完以后剩下:  $300-231.25=68.75$ 米,

那么共用时间为  $4+68.75 \div 210.625=4\frac{110}{337}$ 天.

天数	1	2	3	4	5
甲	10	20	40	80	160
乙	10	15	22.5	33.75	50.625
当天工作量	20	35	62.5	113.75	210.625
已完成工作量	20	55	117.5	231.25	441.375

**[难度等级]** ☆ ☆

8. 有一块菜地和一块麦地. 菜地的一半和麦地的三分之一放在一起是13公顷. 麦地的一半和菜地的三分之一放在一起是12公顷. 那么菜地是多少公顷?

**[分析与解]**

$$\begin{array}{lll}
 \text{菜地} \frac{1}{2} & \text{麦地} \frac{1}{3} & \Rightarrow 13 \text{公顷} \\
 \text{菜地} 3 & \text{麦地} 2 & \Rightarrow 78 \text{公顷} \\
 \text{菜地} 2 & \text{麦地} 3 & \Rightarrow 72 \text{公顷} \\
 \\ 
 \text{菜地} \frac{1}{3} & \text{麦地} \frac{1}{2} & \Rightarrow 12 \text{公顷}
 \end{array}$$

即5倍菜地公顷数+5倍麦地公顷数=78+72=150, 所以菜地与麦地共有 $150 \div 5 = 30$ (公顷).  
而菜地减去麦地, 为 $78 - 72 = 6$ (公顷), 所以菜地有 $(30 + 6) \div 2 = 18$ (公顷).

**[难度等级]** ☆ ☆

9. 春风小学原计划栽种杨树、柳树和槐树共1500棵. 植树开始后, 当栽种了杨树总数的 $\frac{3}{5}$ 和30棵柳树以后, 又临时运来15棵槐树, 这时剩下的3种树的棵数恰好相等. 问原计划要栽植这3种树各多少棵?

**[分析与解]** 将杨树分为5份, 以这样的一份为一个单位, 则:

杨树=5份; 柳树=2份+30棵; 槐树=2份-15棵,

则一份为 $(1500 - 30 + 15) \div (2 + 2 + 5) = 165$ 棵,

有: 杨树=5×165=825棵; 柳树=165×2+30=360棵; 槐树=165×2-15=315棵.

**[难度等级]** ☆ ☆

10. 师徒二人共同加工170个零件, 师傅加工零件个数的 $\frac{1}{3}$ 比徒弟加工零件个数的 $\frac{1}{4}$ 还多10个. 那么, 徒弟一共加工了多少个零件?

**[分析与解]** 我们用“师”表示师傅加工的零件个数, “徒”表示徒弟加工的零件个数, 有:

$\frac{1}{3}$  “师” -  $\frac{1}{4}$  “徒” = 10,  $4$  “师” -  $3$  “徒” = 120, 而  $4$  “师” +  $4$  “徒” =  $170 \times 4 = 680$ .  
 那么有  $7$  “徒” =  $680 - 120 = 560$ , “徒” = 80, 徒弟一共加工了 80 个零件.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

11. 一批工人到甲、乙两个工地进行清理工作, 甲工地的工作量是乙工地的工作量的  $1\frac{1}{2}$  倍. 上午去甲

工地的人数是去乙工地人数的 3 倍, 下午这批工人中有  $\frac{7}{12}$  的人去甲工地, 其他人到乙工地. 到傍晚时, 甲工
 地的工作已做完, 乙工地的工作还需 4 名工人再做 1 天. 那么这批工人共有多少名?

**[分析与解]** 设甲地的工作量为 “1.5”, 则乙地的工作量为 “1”.

$$\begin{array}{cc} \text{甲} & \text{乙} \\ \text{上午} & \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\text{下午} \quad \frac{7}{12} \quad 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

于是甲工地一整天平均用了这批工人的  $\left(\frac{3}{4} + \frac{7}{12}\right) \div 2 = \frac{2}{3}$ , 乙工地一整天平均用了这批工人的  $1 - \frac{2}{3} =$

$$\frac{1}{3}.$$

这批工人的  $\frac{2}{3}$  完成了 “1.5” 的工作量, 那么  $\frac{1}{3}$  的这批工人完成  $1.5 \div 2 = “0.75”$  的工作量, 于是乙工地
 还剩下  $1 - 0.75 = “0.25”$  的工作量, 这 “0.25” 的工作量需要 4 人工作 1 天.

而甲、乙工地的工作量为  $1.5 + 1 = 2.5$ , 那么需  $2.5 \div 0.25 \times 4 = 40$  人工作 1 天.

所以原来这批工人共有  $40 - 4 = 36$  人.

**[难度等级]** ☆ ☆

12. 有一个分数, 如果分子加1, 这个分数就等于  $\frac{1}{2}$ ; 如果分母加1, 这个分数就等于  $\frac{1}{3}$ . 问原来的分数是多少?

**[分析与解]** 如果分子加1, 则分数为  $\frac{1}{2}$ , 设这时的分数为:  $\frac{x}{2x}$ , 则原来的分数为  $\frac{x-1}{2x}$ , 分母加1后

为:  $\frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{3}$ , 交叉相乘得:  $3(x-1) = 2x+1$ , 解得  $x=4$ , 则原分数为  $\frac{3}{8}$ .

**[难度等级]** ☆ ☆

13. 图2-1是某市的园林规划图, 其中草地占正方形的  $\frac{3}{4}$ , 竹林占圆形的  $\frac{6}{7}$ , 正方形和圆形的公共部分是水池. 已知竹林的面积比草地的面积大450平方米. 问水池的面积是多少平方米?



图2-1

**[分析与解]** 因为水池是正方形的  $\frac{1}{4}$ , 是圆的  $\frac{1}{7}$ , 则正方形是水池的4倍, 圆是水池的7倍, 相差  $7-4=3$  倍, 差450平方米, 则水池  $= 450 \div 3 = 150$  平方米.

**[难度等级]** ☆ ☆

14. 唐僧师徒四人吃了许多馒头, 唐僧和猪八戒共吃了总数的  $\frac{1}{2}$ , 唐僧和沙僧共吃了总数的  $\frac{1}{3}$ , 唐僧

和孙悟空共吃了总数的  $\frac{1}{4}$ . 那么唐僧吃了总数的几分之几?

**[分析与解]** 唐+猪= $\frac{1}{2}$ 、唐+沙= $\frac{1}{3}$ 、唐+孙= $\frac{1}{4}$ 。(两边同时加减)唐+猪+唐+沙+唐+孙=2唐+(唐+猪+

沙+孙)=2唐+1= $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1\frac{1}{12}$ 。则: 2唐= $\frac{1}{12}$ , 唐= $\frac{1}{24}$ 。

唐僧吃了总数的 $\frac{1}{24}$ 。

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

15. 小李和小张同时开始制作同一种零件, 每人每分钟能制作1个零件, 但小李每制作3个零件要休息1分钟, 小张每制作4个零件要休息1.5分钟。现在他们要共同完成制作300个零件的任务, 需要多少分钟?

**[分析与解]** 方法一: 先估算出大致所需时间, 然后再进行调整。

因为小李、小张的工作效率大致相等, 那么完成时小李完成 $300 \div 2 = 150$ 个零件左右;

小李完成150个零件需要 $150 \div 3 \times 4 = 200$ 分钟;

在200分钟左右, 198分钟是5.5的整数倍, 此时乙生产 $198 \div 5.5 \times 4 = 144$ 个零件, 并且刚休息完, 所以在2分钟后, 即200分钟时完成 $144+2=146$ 个零件;

那么在200分钟时, 小李、小张共生产 $150+146=296$ 个零件, 还剩下4个零件未完成, 所以再需2分钟, 小李生产2个零件, 小张生产2个零件, 正好完成。

所以共需202分钟才能完成。

方法二: 把休息时间包括进去, 小李每4分钟做3个, 小张每5.5分钟做4个。

则在44分钟内小李做了:  $44 \div 4 \times 3 = 33$ 个, 小张做了:  $44 \div 5.5 \times 4 = 32$ 个, 他们一共做了:  $33+32=65$ 个。

$300 \div 65 = 4 \cdots 40$ , 也就是他们共同做了4个44分钟即:  $44 \times 4 = 176$ 分钟后, 还剩下40个零件没有做完。

而 $22 = 4+4+4+4+2 = 5.5 \times 4$ , 所以22分钟内小李做了:  $3+3+3+3+2=17$ 个, 小张做了:  $4 \times 2=16$ 个, 那么还剩下:  $40-17-16=7$ 个, 4分钟内小李做3个, 小张做4个, 共做 $4+3=7$ 个, 即这40个零件还需要26分钟。

所以共用时间:  $44 \times 4 + 26 = 202$ 分钟。

## 3. 仁华思维导引解析 3 讲：行程问题之三

## 【内容概述】

涉及分数的行程问题，顺水速度、逆水速度与流速的关系，以及与此相关的问题，环形道路上的行程问题，解题时要注意发挥图示的辅助作用，有时宜恰当选择运动过程中的关键点分段加以考虑。

## 【典型问题】

【难度等级】



1. 王师傅驾车从甲地开往乙地交货，如果他往返都以每小时60千米的速度行驶，正好可以按时返回甲地。可是，当到达乙地时，他发现从甲地到乙地的速度只有每小时55千米，如果他想按时返回甲地，他应以多大的速度往回开？

【分析与解】 设甲地到乙地的路程为单位“1”，那么按时的往返一次需时间  $\frac{2}{60}$ ，现在从甲到乙花费了

时间  $1 \div 55 = \frac{1}{55}$ ，所以从乙地返回到甲地时所需的时间只能是  $\frac{2}{60} - \frac{1}{55} = \frac{1}{66}$ 。

即如果他想按时返回甲地，他应以每小时66千米的速度往回开。

【难度等级】



2. 甲、乙两地相距100千米，小张先骑摩托车从甲地出发，1小时后小李驾驶汽车从甲地出发，两人同时到达乙地。摩托车开始速度是每小时50千米，中途减速后为每小时40千米。汽车速度是每小时80千米，汽车曾在途中停驶10分钟。那么小张驾驶的摩托车减速是在他出发后的多少小时？

【分析与解】 汽车从甲地到乙地的行驶时间为  $100 \div 80 = 1.25$  小时 = 1小时15分钟，加上中途停驶的10分钟，共用时1小时25分钟。

而小张先小李1小时出发，但却同时到达，所以小张从甲到乙共用了2小时25分钟，即  $2\frac{5}{12}$  小时。

以下给出两种解法：



方法一：设小张驾驶的摩托车减速是在他出发后 $x$ 小时，有 $50 \times x + 40 \times \left(2\frac{5}{12} - x\right) = 100$ ，解得 $x = \frac{1}{3}$ 。

所以小张驾驶的摩托车减速是在他出发后 $\frac{1}{3}$ 小时。

方法二：如果全程以每小时50千米的速度行驶，需 $100 \div 50 = 2$ 小时的时间，全程以每小时40千米的速度行驶，需 $100 \div 40 = 2.5$ 小时。

依据鸡兔同笼的思想知，小张以每小时50千米的速度行驶了 $\frac{2.5 - 2}{2.5 - 2} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$ 的路程，即行驶了 $\frac{1}{6} \times 100 = \frac{50}{3}$ 千米的路程处，距出发 $\frac{50}{3} \div 50 = \frac{1}{3}$ 小时。

**【难度等级】** ☆

3. 一位少年短跑选手，顺风跑90米用了10秒钟。在同样的风速下，逆风跑70米，也用了10秒钟。问：在无风的时候，他跑100米要用多少秒？

**【分析与解】** 我们知道 **顺风速度 = 无风速度 + 风速**，**逆风速度 = 无风速度 - 风速**。

有顺风时速度为 $90 \div 10 = 9$ 米/秒，逆风速度为 $70 \div 10 = 7$ 米/秒。

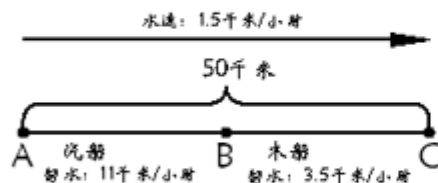
有无风速度 =  $\frac{\text{顺风速度} + \text{逆风速度}}{2} = \frac{9 + 7}{2} = 8$ 米/秒。

所以无风的时候跑100米，需 $100 \div 8 = 12.5$ 秒。

**【难度等级】** ☆ ☆

4. 一条小河流过A, B, C三镇。A, B两镇之间有汽船来往，汽船在静水中的速度为每小时11千米。B, C两镇之间有木船摆渡，木船在静水中的速度为每小时3.5千米。已知A, C两镇水路相距50千米，水流速度为每小时1.5千米。某人从A镇上船顺流而下到B镇，吃饭用去1小时，接着乘木船又顺流而下到C镇，共用8小时。那么A, B两镇间的距离是多少千米？

**【分析与解】** 如下画出示意图，



有A→B段顺水的速度为 $11 + 1.5 = 12.5$ 千米/小时，

有B→C段顺水的速度为 $3.5 + 1.5 = 5$ 千米/小时。

而从A→C全程的行驶时间为 $8 - 1 = 7$ 小时。

设AB长 $x$ 千米，有 $\frac{x}{12.5} + \frac{50 - x}{5} = 7$ ，解得 $x = 25$ 。

所以A, B两镇间的距离是25千米。

**[难度等级]** ☆☆☆☆

5. 一条大河有A, B两个港口, 水由A流向B, 水流速度是每小时4千米. 甲、乙两船同时由A向B行驶, 各自不停地在A, B之间往返航行, 甲船在静水中的速度是每小时28千米, 乙船在静水中的速度是每小时20千米. 已知两船第二次迎面相遇的地点与甲船第二次追上乙船(不算甲、乙在A处同时开始出发的那一次)的地点相距40千米, 求A, B两个港口之间的距离.

**[分析与解]** 设AB两地的路程为单位“1”, 则:

甲、乙两人在A, B来回行走, 均从A点同时同向出发, 则第 $n$ 次同向相遇时, 甲、乙两人的路程差为 $2n$ ;

甲、乙两人在A, B来回行走, 均从A点同时同向出发, 则第 $n$ 次相向相遇时, 甲、乙两人的路程和为 $2n$ ;

甲、乙两人在A, B来回行走, 分别从A, B两点相向出发, 则第 $n$ 次同向相遇时, 甲、乙两人的路程差为 $(2n-1)$ ;

甲、乙两人在A, B来回行走, 分别从A, B两点相向出发, 则第 $n$ 次相向相遇时, 甲、乙两人的路程和为 $(2n-1)$ .

有甲船的顺水速度为32千米/小时, 逆水速度为24千米/小时,

乙船的顺水速度为24千米/小时, 逆水速度为16千米/小时.

两船第二次迎面相遇时, 它们的路程和为“4”; 甲船第二次追上乙船时, 它们的路程差为“4”.

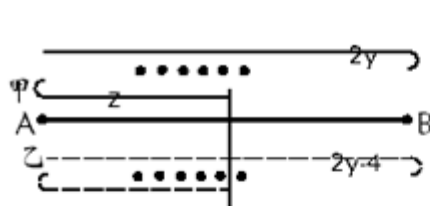
(一). 有第二次迎面相遇时, 一定是甲走了 $2\sim 3$ 个AB长度, 乙走了 $2\sim 1$ 个AB长度, 设甲走了 $2+x$ 个AB的长度, 则乙走了 $2-x$ 个AB的长度, 有



$$\frac{1}{32} + \frac{1}{24} + \frac{x}{32} = \frac{1}{24} + \frac{1-x}{16}, \text{ 解得 } x = \frac{1}{3}, \text{ 即第二次迎面相遇的地点距A点 } \frac{1}{3} \text{ AB 的距离.}$$

(二). ①. 有第二次甲追上乙时, 有甲行走 $2y+z$ ( $y$ 为整数,  $z \leq 1$ )个AB的长度, 则乙行走 $2y-4+z$ 个AB的长度, 有

$$\frac{y}{32} + \frac{y}{24} + \frac{z}{32} = \frac{y-2}{24} + \frac{y-2}{16} + \frac{z}{24}, \text{ 化简有 } 3y+z=20, \text{ 显然无法满足 } y \text{ 为整数, } z \leq 1;$$



(一). ①. 情况图



有 4倍水速 $=1000\div\left(\frac{40}{60}\right)=1500$ 米, 有水速 $=375$ 米/小时 $=0.375$ 千米/小时.  
即河水的流速为每小时0.375千米.

**[难度等级]** ☆

7. 甲、乙二人骑自行车从环形公路上同一地点同时出发, 背向而行. 现在已知甲走一圈的时间是70分钟, 如果在出发后45分钟甲、乙二人相遇, 那么乙走一圈的时间是多少分钟?

**[分析与解]** 甲行走45分钟, 再行走 $70-45=25$ 分钟即可走完一圈. 而甲行走45分钟, 乙行走45分钟也能走完一圈. 所以甲行走25分钟的路程相当于乙行走45分钟的路程.

甲行走一圈需70分钟, 所以乙需 $70\div 25\times 45=126$ 分钟.

即乙走一圈的时间是126分钟.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

8. 如图3-1, 甲和乙两人分别从一圆形场地的直径两端点同时开始以匀速按相反的方向绕此圆形路线运动, 当乙走了100米以后, 他们第一次相遇, 在甲走完一周前60米处又第二次相遇. 求此圆形场地的周长.



**[分析与解]** 注意观察图形, 当甲、乙第一次相遇时, 甲乙共走完 $\frac{1}{2}$ 圈的路程, 当甲、乙第二次相遇

时, 甲乙共走完 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 圈的路程.

所以从开始到第一、二次相遇所需的时间比为1:3, 所以第二次相遇时乙行走的总路程为第一次相遇时行走的总路程的3倍, 即 $100\times 3=300$ 米.

有甲、乙第二次相遇时, 共行走 $(1\text{圈}-60)+300$ , 为 $\frac{3}{2}$ 圈, 所以此圆形场地的周长为480米.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

9. 甲、乙二人在同一条椭圆形跑道上作特殊训练：他们同时从同一地点出发，沿相反方向跑，每人跑

完第一圈到达出发点后立即回头加速跑第二圈，跑第一圈时，乙的速度是甲速度的  $\frac{2}{3}$ ，甲跑第二圈时速度比

第一圈提高了  $\frac{1}{3}$ ；乙跑第二圈时速度提高了  $\frac{1}{5}$ ，已知沿跑道看从甲、乙两人第二次相遇点到第一次相遇点的最短路程是190米，那么这条椭圆形跑道长多少米？

**[分析与解]** 设甲跑第一圈的速度为3，那么乙跑第一圈的速度为2，甲跑第二圈的速度为4，乙跑第二圈

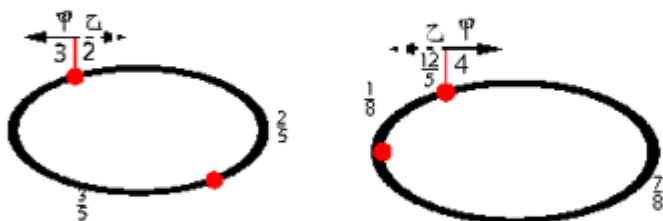
的速度为  $\frac{12}{5}$ 。

如下图，第一次相遇地点逆时针方向的距出发点  $\frac{3}{5}$  的跑道长度。

有甲回到出发点时，乙才跑了  $\frac{2}{3}$  的跑道长度。在乙接下来跑了  $\frac{1}{3}$  跑道的距离时，甲以“4”的速度跑了

$$\frac{1}{3} \div 2 \times 4 = \frac{2}{3} \text{ 圈。}$$

所以还剩下  $\frac{1}{3}$  的跑道长度，甲以4的速度，乙以  $\frac{12}{5}$  的速度相对而跑，所以乙跑了  $\frac{1}{3} \times \left[ \frac{12}{5} \div \left( 4 + \frac{12}{5} \right) \right]$   
 $= \frac{1}{8}$  圈。也就是第二次相遇点逆时针方向距出发点  $\frac{1}{8}$  圈。



即第一次相遇点与第二次相遇点相差  $\frac{3}{5} - \frac{1}{8} = \frac{19}{40}$  圈，

所以，这条椭圆形跑道的长度为  $190 \div \frac{19}{40} = 400$  米。

### 【难度等级】☆☆☆

10. 如图3-2, 在400米的环形跑道上, A, B两点相距100米. 甲、乙两人分别从A, B两点同时出发, 按逆时针方向跑步. 甲每秒跑5米, 乙每秒跑4米, 每人每跑100米, 都要停10秒钟. 那么甲追上乙需要时间是多少秒?

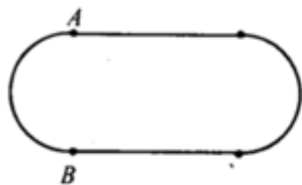


图 3-2

**【分析与解】** 如果甲、乙均不休息, 那么甲追上乙的时间为  $100 \div (5 - 4) = 100$  秒.

此时甲跑了  $100 \times 5 = 500$  米, 乙跑了  $100 \times 4 = 400$  米.

而实际上甲跑500米, 所需的时间为  $100 + 4 \times 10 = 140$  秒, 所以140~150秒时甲都在逆时针距A点500处.

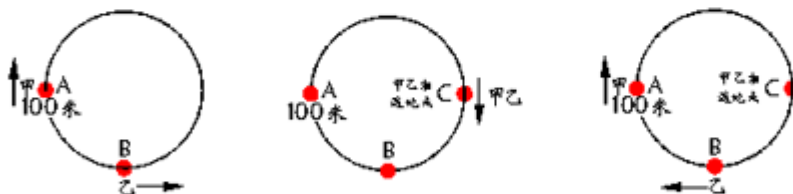
而乙跑400米所需的时间为  $100 + 3 \times 10 = 130$  秒, 所以130~140秒时乙走在逆时针距B点400处.

显然从开始计算140秒时, 甲、乙在同一地点, 即甲追上乙需要时间是140秒.

### 【难度等级】☆☆☆

11. 周长为400米的圆形跑道上, 有相距100米的A, B两点. 甲、乙两人分别从A, B两点同时相背而跑, 两人相遇后, 乙即转身与甲同向而跑, 当甲跑到A时, 乙恰好跑到B. 如果以后甲、乙跑的速度和方向都不变, 那么甲追上乙时, 甲从出发开始, 共跑了多少米?

**【分析与解】** 如下图, 记甲乙相遇点为C.



当甲跑了AC的路程时, 乙跑了BC的路程; 而当甲跑了400米时, 乙跑了2BC的路程.

由乙的速度保持不变, 所以甲、乙第一次相向相遇所需的时间是甲再次到达A点所需时间的  $\frac{1}{2}$ .

即  $AC = \frac{1}{2} \times 400 = 200$  (米), 也就是甲跑了200米时, 乙跑了100米, 所以甲的速度是乙速度的2倍.

有甲到达A, 乙到达B时, 甲追上乙时需比乙多跑  $400 - 100 = 300$  米的路程, 所以此后甲还需跑  $300 \div (2 - 1) \times 2 = 600$  米, 加上开始跑的1圈400米.

所以甲从出发到甲追上乙时, 共跑了  $600 + 400 = 1000$  米.

【难度等级】☆☆☆

12. 如图3-3, 一个长方形的房屋长13米, 宽8米. 甲、乙两人分别从房屋的两个墙角出发, 甲每秒钟行3米, 乙每秒钟行2米. 问: 经过多长时间甲第一次看见乙?

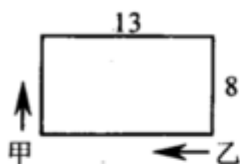
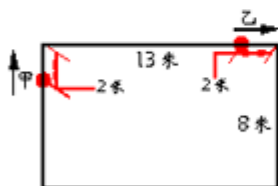


图 3-3

【分析与解】开始时, 甲在顺时针方向距乙 $8+13+8=29$ 米. 因为一边最长为13, 所以最少要追至只相差13, 即至少要追上 $29-13=16$ 米.

当甲追上乙16米所需时间为 $16 \div (3-2)=16$ 秒, 此时甲行了 $3 \times 16=48$ 米, 乙行了 $2 \times 16=32$ 米. 有甲、乙的位置如下图:



显然甲还是看不见乙, 但是因为甲的速度比乙快, 所以甲能在乙离开上面的那条边之前到达上面的边, 从而看见乙.

而甲恰到达上面的边时, 需再跑2米, 所需时间为 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ 秒.

所以经过 $16 + \frac{2}{3} = 16\frac{2}{3}$ 秒后甲第一次看见乙.

### 【难度等级】☆☆☆

13. 如图3-4, 学校操场的400米跑道中套着300米小跑道, 大跑道与小跑道有200米路程相重. 甲以每秒6米的速度沿大跑道逆时针方向跑, 乙以每秒4米的速度沿小跑道顺时针方向跑, 两人同时从两跑道的交点A处出发, 当他们第二次在跑道上相遇时, 甲共跑了多少米?

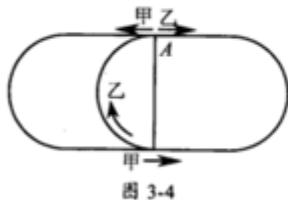
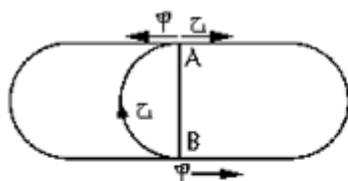


图 3-4

**【分析与解】** 如下图, 甲、乙只可能在大跑道上相遇, 并且只能在AB顺时针的半跑道上.

易知小跑道AB逆时针路程为100, 顺时针路程为200, 大跑道上AB的顺、逆时针路程均是200米. 我们将甲、乙的行程状况分析清楚.



当甲第一次到达B时, 乙还没有到达B点, 所以第一次相遇一定在逆时针的BA某处.

而当乙第一次到达B点时, 所需时间为  $200 \div 4 = 50$  秒, 此时甲跑了  $50 \times 6 = 300$  米, 在B点  $300 - 200 = 100$  米处.

乙跑出小跑道到达A需  $100 \div 4 = 25$  秒, 则甲又跑了  $25 \times 6 = 150$  米, 在A点左边  $(100 + 150) - 200 = 50$  米处.

所以当甲到达B处时, 乙还未到B处, 那么甲必定能在B点右边某处与乙第二次相遇.

从乙再次到达A处开始计算, 还需  $(400 - 50) \div (6 + 4) = 35$  秒, 甲、乙第二次相遇, 此时甲共跑了  $50 + 25 + 35 = 110$  秒.

所以, 从开始到甲、乙第二次相遇甲共跑了  $110 \times 6 = 660$  米.



## [难度等级] ☆☆☆

14. 如图 3-5, 正方形 ABCD 是一条环形公路. 已知汽车在 AB 上时速是 90 千米, 在 BC 上的时速是 120 千米, 在 CD 上的时速是 60 千米, 在 DA 上的时速是 80 千米. 从 CD 上一点 P, 同时反向各发出一辆汽车, 它们将在 AB 中点相遇. 如果从 PC 的中点 M, 同时反向各发出一辆汽车, 它们将在 AB 上一点 N 相遇. 问 A 至 N 的距离除以 N 至 B 的距离所得到的商是多少?

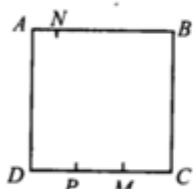
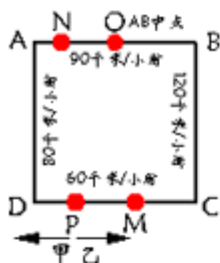


图 3-5

[分析与解] 如下图, 设甲始终顺时针运动, 乙始终逆时针运动, 并设正方形 ABCD 的边长为单位“1”.



有甲从 P 到达 AB 中点 O 所需时间为  $\frac{PD}{60} + \frac{DA}{80} + \frac{AO}{90} = \frac{PD}{60} + \frac{1}{80} + \frac{0.5}{90}$ ,

乙从 P 到达 AB 中点 O 所需时间为  $\frac{PC}{60} + \frac{BC}{120} + \frac{BO}{90} = \frac{PC}{60} + \frac{1}{120} + \frac{0.5}{90}$ .

有甲、乙同时从 P 点出发, 则在 AB 的中点 O 相遇, 所以有:

$$\frac{PD}{60} + \frac{1}{80} = \frac{PC}{60} + \frac{1}{120},$$

且有  $PD = DC - PC = 1 - PC$ , 代入有  $\frac{1 - PC}{60} + \frac{1}{80} = \frac{PC}{60} + \frac{1}{120}$ , 解得  $PC = \frac{5}{8}$ .

所以  $PM=MC=\frac{5}{16}$ ,  $DP=\frac{3}{8}$ .

现在甲、乙同时从PC的中点出发, 相遇在N点, 设AN的距离为x.

有甲从M到达N点所需时间为  $\frac{MD}{60} + \frac{DA}{80} + \frac{AN}{90} = \frac{\frac{3}{8} + \frac{5}{16}}{60} + \frac{1}{80} + \frac{x}{90}$ ;

乙从M到达N点所需时间为  $\frac{MC}{60} + \frac{CB}{120} + \frac{BN}{90} = \frac{\frac{5}{16}}{60} + \frac{1}{120} + \frac{1-x}{90}$ .

有  $\frac{\frac{3}{8} + \frac{5}{16}}{60} + \frac{1}{80} + \frac{x}{90} = \frac{\frac{5}{16}}{60} + \frac{1}{120} + \frac{1-x}{90}$ , 解得  $x = \frac{1}{32}$ . 即  $AN = \frac{1}{32}$ ,  $BN = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$ .

$AN \div BN = \frac{1}{32} \div \frac{31}{32} = \frac{1}{31}$ .

**【难度等级】** ☆ ☆ ☆ ☆

15. 如图3-6, 8时10分, 有甲、乙两人以相同的速度分别从相距60米的A, B两地顺时针方向沿长方形ABCD的边走向D点. 甲8时20分到D点后, 丙、丁两人立即以相同速度从D点出发. 丙由D向A走去, 8时24分与乙在E点相遇; 丁由D向C走去, 8时30分在F点被乙追上. 问三角形BEF的面积为多少平方米?

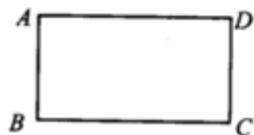
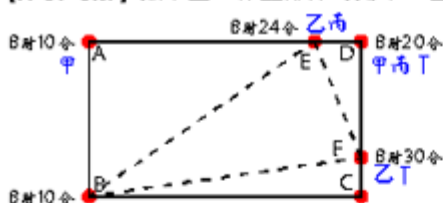


图 3-6

**[分析与解]** 如下图，标出部分时刻甲、乙、丙、丁的位置。



先分析甲的情况，甲10分钟，行走了AD的路程；再看乙的情况，乙的速度等于甲的速度，乙14分钟行走走了60+AE的路程，乙20分钟走了60+AD+DF的路程。所以乙10分钟走了 $(60+AD+DF)-(AD)=60+DF$ 的路程。

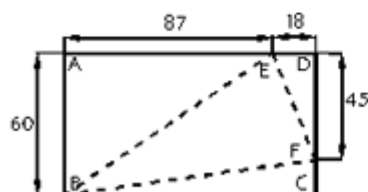
$$\text{有 } \frac{AD}{10} = \frac{60+AE}{14} = \frac{60+DF}{20}, \text{ 有 } \begin{cases} AD = 60 + DF \\ 7(AE + ED) = 5(60 + AE) \end{cases}$$

然后分析丙的情况，丙4分钟，行走了ED的路程，再看丁的情况，丁的速度等于丙的速度，丁10分钟行走了DF的距离。

$$\text{有 } \frac{ED}{4} = \frac{DF}{10}, \text{ 即 } 5ED = 2DF.$$

$$\text{联立 } \begin{cases} AD = AE + ED = 60 + DF \\ 7(AE + ED) = 5(60 + AE) \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} AE = 87 \\ ED = 18 \\ DF = 45 \end{cases}.$$

于是，得到如下位置关系：



$$\begin{aligned} S_{\triangle BEF} &= S_{\text{四边形ABCD}} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle EDF} - S_{\triangle FCB} \\ &= 60 \times (87+18) - \frac{1}{2} \times 60 \times 87 - \frac{1}{2} \times 18 \times 45 - \frac{1}{2} \times 15 \times (87+18) \\ &= 2497.5 (\text{平方米}) \end{aligned}$$

#### 4. 仁华思维导引解析 4 讲：数的整除

##### 【内容概述】

能被 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 整除的数的数字特征，以及与此相关的整数的组成与补填问题，乘积末尾零的个数的计算。

# 【典型问题】

## 【难度等级】



1. 173□是一个四位数。数学老师说：“我在其中的方框内中先后填入3个数字，所得到的3个四位数：依次可被9，11，6整除。”问：数学老师先后填入的3个数字的和是多少？

**【分析与解】**方法一：利用整除特征

注意能被9，11，6整除的数的特征：

能被9整除的数，其数字和是9的倍数；

能被11整除的数，其奇数位数字和与偶数位数字和的差为11的倍数；或将其后三位与前隔开，将新组成的两个数作差，将是11的倍数；

能被6整除的数，其数字和是3的倍数，且末位为0，2，4，6，8的其中之一。

1+7+3=11，当□内填入7时，1735的数字和为18，为9的倍数，所以当□内填7所组成的数为9的倍数；

173□的奇数位数字和为7+□，偶数位数字和为1+3=4，所以当□内填11+4-7=8时，奇数位数字和与偶数位数字和的差为11，所组成的数为11的倍数；

1+7+3=11，当□内填入1，4，7时，为3的倍数，但只有4为偶数，所以当□内填入4组成的数为6的倍数。

所以，这三种情况下填入□内的数字的和为7+8+4=19。

方法二：采用试除法

用1730试除， $1730 \div 9 = 192 \cdots 2$ ， $1730 \div 11 = 157 \cdots 3$ ， $1730 \div 6 = 288 \cdots 2$ 。

所以依次添上(9-2=)7、(11-3=)8、(6-2=)4后得到的1737、1738、1734依次能被9、11、6整除。

所以，这三种情况下填入□内的数字的和为7+8+4=19。

## 【难度等级】



2. 如果六位数1992□□能被105整除，那么它的最后两位数是多少？

**【分析与解】**因为 $105 = 3 \times 7 \times 5$ ，所以当这个六位数同时满足能被3、7、5整除的数的特征即可。

而能被7整除的数，将其后三位与前隔开，将新组成的两个数作差，将是7的倍数；

能被5整除的数，其末位只能是0或5。

方法一：利用整除特征

末位只能为0或5。

①. 如果末位填入0，那么数字和为1+9+9+2+□+0=21+□，要求数字和是3的倍数，所以□可以为0，3，6，9，验证均不是 $200-199=1$ ， $230-199=31$ ， $260-199=61$ ， $290-199=91$ ，有91是7的倍数，即199290是7的倍数，所以题中数字的末两位为90。

②. 如果末位填入5，同上解法，验证没有数同时满足能被3、7、5整除的特征。

所以，题中数的末两位只能是90。

方法二：采用试除法

用 199200 试除， $199200 \div 105 = 1897 \cdots 15$ ，余 15 可以看成不足  $(105 - 15 =) 90$ ，所以补上 90，即在末两位的方格内填入 90 即可。

**【难度等级】**



3. 某个七位数 1993□□□ 能够同时被 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 整除，那么它的最后三位数字依次是多少？

**【分析与解】** 方法一：利用整除特征

因为这个数能被 5 整除，所以末位只能是 0 或 5，又能被 2 整除，所以其末位为偶数，所以只能是 0。

在满足以上条件的情况下，还能被 4 整除，那么末两位只能是 20、40、60 或 80。

又因为还能同时被 9 整除，所以这个数的数字和也应该是 9 的倍数，有  $\overline{1993A20}$ ， $\overline{1993B40}$ ，

$\overline{1993C60}$ ， $\overline{1993D80}$  的数字和分别为  $24+A$ ， $26+B$ ， $28+C$ ， $30+D$ ，对应的 A、B、C、D 只能是 3, 1, 8, 6。即末三位可能是 320, 140, 860, 680。

而只有 320, 680 是 8 的倍数，再验证只有 1993320, 1993680 中只有 1993320 是 7 的倍数。

因为有同时能被 2, 4, 5, 7, 8, 9 整除的数，一定能同时被 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这几个数整除，所以 1993320 为所求的这个数。

显然，其末三位依次为 3, 2, 0。

方法二：采用试除法

一个数能同时被 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 整除，而将这些数一一分解质因数：

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
 ，所以这个数一定能被  $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 8 \times 9 \times 5 \times 7 = 2520$  整除。

用  $1993000$  试除， $1993000 \div 2520 = 790 \cdots 2200$ ，余 2200 可以看成不足  $2520 - 2200 = 320$ ，所以在末三位的方格内填入 320 即可。

**【难度等级】**



4. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 10 个数字中选出 5 个不同的数字组成一个五位数，使它能被 3, 5, 7, 13 整除，这个数最大是多少？

**【分析与解】** 因为  $[3, 5, 7, 13] = 1365$ ，在 100000 之内最大的 1365 的倍数为  $99645 (100000 \div 1365 = 73 \cdots 355, 100000 - 355 = 99645)$ ，有  $99645 - 1365 = 98280$ ， $98280 - 1365 = 96915$ ， $96915 - 1365 = 95550$ ， $95550 - 1365 = 94185$ 。

所以，满足题意的 5 位数最大为 94185。

### 【难度等级】☆☆

5. 修改31743的某一个数字,可以得到823的倍数.问修改后的这个数是多少?

**【分析与解】**方法一:采用试除法

823是质数,所以我们掌握的较小整数的特征不适用,  $31743 \div 823 = 38 \cdots 469$ ,于是31743除以823可以看成余469也可以看成不足( $823 - 469 =$ )354,于是改动某位数字使得得到的新数比原来大354或 $354 + 823n$ 也是满足题意的改动.

有 $n=1$ 时,  $354 + 823 = 1177$ ,

$n=2$ 时,  $354 + 823 \times 2 = 2000$ ,所以当千位增加2,即改为3时,有修改后的五位数33743为823的倍数.

方法二:视作数字谜

假设改动数位不是首位与末位,那么我们考虑3□□□3除以823的商:

$30003 \div 823 = 36 \cdots 375$ ;  $39993 \div 823 = 48 \cdots 489$ .

所以商在37~48之间,而823的个位3只有与1相乘所得的积才是3,所以这个商的尾数为1,这样的数字在37~48之间,只有41.

有 $823 \times 41 = 33743$ .所以改动31743的千位为3即可.

### 【难度等级】☆☆

6. 在六位数11□□11中的两个方框内各填入一个数字,使此数能被17和19整除,那么方框中的两位数是多少?

**【分析与解】**

如果一个数能同时被17和19整除,那么一定能被323整除.

$110011 \div 323 = 340 \cdots 191$ ,余191也可以看成不足( $323 - 191 =$ )132.

所以当 $132 + 323n$ 是100的倍数时,才能保证在只改动110011的千位、百位数字,而得到323的倍数.

所以有323n的末位只能是 $10 - 2 = 8$ ,所以n只能是6, 16, 26, ...

验证有 $n=16$ 时,  $132 + 323 \times 16 = 5300$ ,所以原题的方框中填入53得到的115311满足题意.

[难度等级]



7. 已知四十一位数  $55\dots5\square99\dots9$  (其中5和9各有20个) 能被7整除, 那么中间方格内的数字是多少?

[分析与解] 我们知道  $\overline{abcabc}$  这样的六位数一定能整除7、11、13;

下面就可用这个性质来试着求解:

由上知  $\underbrace{555\dots5}_{20\text{个}5}\underbrace{\square999\dots9}_{20\text{个}9}$  的末6位数  $999999$  必定整除7;

有  $\underbrace{555\dots5}_{20\text{个}5}\underbrace{\square999\dots9}_{20\text{个}9} = \underbrace{555\dots5}_{20\text{个}5}\underbrace{\square999\dots9}_{14\text{个}9} \times 1000000 + 999999$ ; 于是只用考察:

$\underbrace{555\dots5}_{20\text{个}5}\underbrace{\square999\dots9}_{14\text{个}9} \times 1000000$ , 又因为1000000, 7互质, 所以1000000对整除7没有影响, 所以要求

$\underbrace{555\dots5}_{20\text{个}5}\underbrace{\square999\dots9}_{14\text{个}9}$  一定是7的倍数.

注意到<sup>①</sup>实际上我们已经将末尾的6个9除去;

这样, 我们将数字9、5均6个一组除去, 最后剩下的数为  $\underbrace{5\dots5}_{5\text{个}5}\square\underbrace{9\dots9}_{5\text{个}9}$ , 即55□99.

我们只用计算55□99当“□”取何值时能被7整除, 有□<sup>②</sup>满足. <sup>(20-3×6)个9</sup>

[难度等级]



8. 用数字6, 7, 8各两个, 组成一个六位数, 使它能被168整除. 这个六位数是多少?

[分析与解] 因为  $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ , 所以组成的六位数可以被8、3、7整除.

能够被8整除的数的特征是末三位组成的数一定是8的倍数, 末两位组成的数一定是4的倍数, 末位为偶数.

在题中条件下, 验证只有688、768是8的倍数, 所以末三位只能是688或768, 而又要求是7的倍数, 由上

题知  $\overline{abcabc}$  形式的数一定是7、11、13的倍数, 所以768768一定是7的倍数, □□□688的□不管怎么填都得不到7的倍数.

至于能否被3整除可以不验证, 因为整除3的数的规律是数字和为3的倍数, 在题中给定的条件下, 不管怎么填数字和都是定值, 必须满足, 不然本题无解.

当然验证的确满足.

所以768768能被168整除, 且验证没有其他满足条件的六位数了.

[难度等级]



9. 将自然数1, 2, 3, …依次写下去组成一个数: 12345678910111213…。如果写到某个自然数时, 所组成的数恰好第一次能被72整除, 那么这个自然数是多少?

[分析与解] 因为  $72 = 2^3 \times 3^2$ , 所以这个数必须是8的倍数, 即后三位必须是8的倍数(也一定有后二位为4的倍数, 末位为偶数), 且数字和是9的倍数.

有456, 312, 516, 920, 324, 728, 132, 536…均是4的倍数, 但是只有456, 920, 728, 536是8的倍数.

验证这些数对应的自然数的数字和:

456对应123456, 数字和为21,

920对应123…91011…1920, 数字和为102,

728对应123…91011…192021…28, 数字和为154,

536对应123…91011…192021…293031…36, 数字和为207,

所以在上面这些数中, 只有536对应的123…91011…192021…293031…36既是8的倍数, 又是9的倍数.

所以, 满足题意的自然数为36.

### [难度等级] ☆☆☆

10. 1至9这9个数字, 按图4-1所示的次序排成一个圆圈. 请你在某两个数字之间剪开, 分别按顺时针和逆时针次序形成两个九位数(例如, 在1和7之间剪开, 得到两个数是193426857和758624391). 如果要求剪开后所得到的两个九位数的差能被396整除, 那么剪开处左右两个数字的乘积是多少?

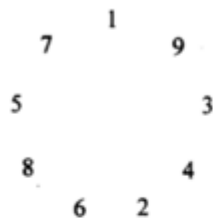


图 4-1

[分析与解] 在解这道题之前我们先看一个规律:

$n$ 位原序数与 $n$ 位反序数的差一定是  $\begin{cases} 99 \text{ 的倍数} & n \text{ 为奇数时} \\ 9 \text{ 的倍数} & n \text{ 为偶数时} \end{cases}$

(如: 12365 为原序数, 那么它对应的反序数为 56321, 它们的差 43956 是 99 的倍数. 对于上面的规律想想为什么?)

那么互为反序的两个九位数的差, 一定能被 99 整除.

而  $396 = 99 \times 4$ , 所以我们只用考察它能否被 4 整除.

于是只用观察原序数、反序数的末两位数字的差能否被 4 整除, 显然只有当剪开处两个数的奇偶性相同时才有可能.

注意图中的具体数字, 有 (3, 4) 处、(8, 5) 处的两个数字奇偶性均不相同, 所以一定不满足.

而剩下的几个位置奇偶性相同, 有可能满足.

进一步验证, 有 (9, 3) 处剪开的末两位数字之差为  $43 - 19 = 24$ , (4, 2), (2, 6), (6, 8), (5, 7), (7, 1), (1, 9) 处剪开的末两位数字之差为  $62 - 34 = 28$ ,  $86 - 42 = 44$ ,  $58 - 26 = 32$ ,  $85 - 17 = 68$ ,  $91 - 57 = 34$ ,  $71 - 39 = 32$ .

所以从 (9, 3), (4, 2), (2, 6), (6, 8), (5, 7), (1, 9) 处剪开, 所得的两个互为反序的九位数的差才是 396 的倍数.

(9, 3), (4, 2), (2, 6), (6, 8), (5, 7), (1, 9) 处左右两个数的乘积为 27, 8, 12, 48, 35, 9.



**[难度等级]** ☆☆☆☆

11. 有15位同学, 每位同学都有编号, 他们是1号到15号. 1号同学写了一个自然数, 2号说: “这个数能被2整除”, 3号说: “这个数能被3整除”, ……依次下去, 每位同学都说, 这个数能被他的编号数整除. 1号作了一一验证: 只有编号连续的两位同学说得不对, 其余同学都对. 问:

(1) 说得不对的两位同学, 他们的编号是哪两个连续自然数?

(2) 如果告诉你, 1号写的数是五位数, 请求出这个数.

**[分析与解]** (1) 列出这14个除数:

2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15.

注意到如果这个数不能被2整除, 那么一定不能被4、6、8、10…等整除, 显然超过两个自然数; 类似这种情况的还有3~6、9…; 4~8、12…; 5~10、15…; 6~12…;

而不能被7整除, 那么一定不能被14整除, 而这两个自然数不连续;

而不能被12整除, 那么4和3中至少有一个不能整除1号所说的自然数, 而12与3、4均不连续; 类似这种情况的还有10 (对应2和5); 14 (对应2和7); 15 (对应3和5);

这样只剩下8、9、11、13, 而连续的只有8、9.

所以说得不对的两位同学的编号为8、9这两个连续的自然数.

(2) 由(1)知, 这个五位数能被2、3、4、5、6、7、10、11、12、13、14、15整除.

2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15
∪	∪	∪	∪	∪	∪	∪	∪	∪	∪	∪	∪

所以 $[2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15] = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 60060$ .

所以1号写出的五位数为60060.

[难度等级]



12. 找出4个不同的自然数, 使得对于其中任何两个数, 它们的和总可以被它们的差整除. 如果要求这4个数中最大的数与最小的数的和尽可能的小, 那么这4个数里中间两个数的和是多少?

**[分析与解]** 我们设这四个数中最小的一个数为 $a$ , 要求4个数中最大的数与最小的数的和尽可能小, 则先尽量让 $a$ 最小.

当 $a=1$ , 设4个数中另外三个数中某个数为 $b$ , 有 $\frac{b+1}{b-1}$ 必须为整数, 而 $\frac{b+1}{b-1}=1+\frac{2}{b-1}$ , 则2能被 $(b-1)$ 整除, 显然 $(b-1)$ 只能为2或1, 对应 $b$ 只能是3或2, 但是题中要求 $a$ 至少能与三个数存在差能被和整除的关系, 所以不满足.

当 $a=2$ , 设4个数中另外三个数中某个数为 $c$ , 有 $\frac{c+2}{c-2}$ 必须为整数, 而 $\frac{c+2}{c-2}=1+\frac{4}{c-2}$ , 则4能被 $(c-2)$ 整除, 有 $(c-2)$ 可以为4、2、1, 对应 $c$ 可以为6、4或3.

验证6、4、3、2是满足条件的数组, 它们的中间两个数的和为 $4+3=7$ 即为题中条件下的和.

**补充问题.** 试求6个不同的正整数, 使得它们中任意两数之积可被这两个数之和整除.

**「试题分析」** 取六个数1, 2, 3, 4, 5, 6, 并把它们两两相加得到15个和:

$1+2, 1+3, \dots, 5+6.$

这15个和的最小公倍数是:

$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 27720.$

把它依次乘所取的六个数得: 27720, 55440, 83160, 110880, 138600及166320. 这六个数就满足题目得要求.

[难度等级]



13. 把若干个自然数1, 2, 3, ...乘到一起, 如果已知这个乘积的最末十三位恰好都是零, 那么最后出现的自然数最小应该是多少?

**[分析与解]** 方法一: 要求乘积的末十三位均是0, 那么这个乘积至少含有13个质因数2, 13个质因数5.

连续的自然数中2的倍数的个数远大于5的倍数的个数. 所以只用考虑质因数5的个数, 有:  $13 \times 5 = 65$ , 而1~65中, 25、50均含有2个质因数5.

所以只需连乘到 $(13-2) \times 5 = 55$ 即可. 也就是说 $1 \times 2 \times 3 \times \dots$ 的积的末十三位均是0, 那么最后出现的自然数最小应是55.

方法二: 我们分段考虑质因数5的出现的状况:

在1至9中, 有5本身, 出现1次因数5;

在10至19中, 有10、15, 出现2次因数5;

在20至29中, 有20、25, 由于 $25=5 \times 5$ , 5出现了2次, 所以共出现3次因数5;

在30至39、40至49中, 各出现2次5的因子, 至此共出现了 $1+2+3+2+2=10$ 次5的因子.

在50至59中, 有50、55,  $50=2 \times 5 \times 5$ 出现了两次5的次因子, 所以这里共有3个5的因子.

所以到55为止, 共出现13次5的因子, 55为出现的最小自然数, 使得2乘到它的结果中末尾有13个0.

### [难度等级] ☆ ☆

14.  $975 \times 935 \times 972 \times \square$ , 要使这个连乘积的最后4个数字都是0, 那么在方框内最小应填什么数?

**[分析与解]** 975含有2个质因数5, 935含有1个质因数5, 972含有2个质因数2. 而 $975 \times 935 \times 972 \times \square$ 的乘积最后4个数都是0.

那么, 至少需要4个质因数5, 4个质因数2.

所以,  $\square$ 至少含有1个质因数5, 2个质因数2, 即最小为 $5 \times 2 \times 2 = 20$ .

### [难度等级] ☆ ☆ ☆

15. 如图4-2, 依次排列的5个数是13, 12, 15, 25, 20. 它们每相邻的两个数相乘得4个数. 这4个数每相邻的两个数相乘得3个数. 这3个数每相邻的两个数相乘得2个数. 这2个数相乘得1个数. 请问: 最后这个数从个位起向左数, 可以连续地数出几个零?

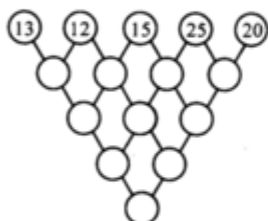
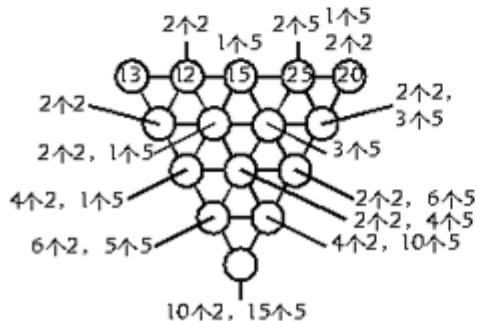


图 4-2

**[分析与解]** 如下图, 我们在图中标出每个数含有质因数2、5的个数, 除第一行外, 每个数都是上一行左、右上方两数的乘积, 所以每个数含有质因数2、5的个数也都是上一行左、右上方两数含有质因数2、5个数的和.



所以, 最后一行的一个数含有10个质因数2, 15个质因数5.

而一个数末尾含有连续0的个数决定于质因数2、5个数的最小值, 所以最后一行的一个数末尾含有10个连续的0.

## 5. 仁华思维导引解析 5 讲：质数与合数

## 【内容概述】

与质数有关的构造问题，通过分解质因数求解的整数问题。

## 【典型问题】

## 【难度等级】☆☆

1. 有人说：“任何7个连续整数中一定有质数。”请你举一个例子，说明这句话是错的。

【分析与解】例如连续的7个整数：842、843、844、845、846、847、848分别能被2、3、4、5、6、7、8整除，也就是说它们都不是质数。

## 【难度等级】☆☆

2. 从小到大写出5个质数，使后面的数都比前面的数大12。

【分析与解】我们知道12是2、3的倍数，如果开始的质数是2或3，那么后一个数即2或3与12的和一定也是2或3的倍数，将是合数，所以从5开始尝试。

有5、17、29、41、53是满足条件的5个质数。

## 【难度等级】☆☆

3. 9个连续的自然数，它们都大于80，那么其中质数最多有多少个？

【分析与解】大于80的自然数中只要是偶数一定不是质数，于是奇数越多越好，9个连续的自然数中最多只有5个奇数，它们的个位应该为1，3，5，7，9。但是大于80且个位为5的数一定不是质数，所以最多只有4个数。

验证101，102，103，104，105，106，107，108，109这9个连续的自然数中101、103、107、109这4个数均是质数。

也就是大于80的9个连续自然数，其中质数最多能有4个。

**[难度等级]**



4. 用1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9这9个数字组成质数, 如果每个数字都要用到并且只能用一次, 那么这9个数字最多能组成多少个质数?

**[分析与解]** 要使质数个数最多, 我们尽量组成一位的质数, 有2、3、5、7均为一位质数, 这样还剩下1、4、6、8、9这5个不是质数的数字未用.

有1、4、8、9可以组成质数41、89, 而6可以与7组合成质数67.

所以这9个数字最多组成了2、3、5、41、67、89这6个质数.

**[难度等级]**



5. 3个质数的倒数之和是 $\frac{1661}{1986}$ , 则这3个质数之和为多少?

**[分析与解]** 设这3个质数从小到大为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 它们的倒数分别为 $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{1}{b}$ 、 $\frac{1}{c}$ , 计算它们的和时需通

分, 且通分后的分母为 $a \times b \times c$ , 求和得到的分数为 $\frac{P}{abc}$ , 如果这个分数能够约分, 那么得到的分数的分母为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 或它们之间的积.

现在和为 $\frac{1661}{1986}$ , 分母 $1986 = 2 \times 3 \times 331$ , 所以一定是 $a=2$ ,  $b=3$ ,  $c=331$ , 检验满足.

所以这3个质数的和为 $2+3+331=336$ .

**[难度等级]**



6. 已知一个两位数除1477, 余数是49. 求满足这样条件的所有两位数.

**[分析与解]** 有 $1477 \div \text{除数} = \text{商} \cdots 49$ , 有 $1477 - 49 = \text{除数} \times \text{商}$ , 所以  $\text{除数} \times \text{商} = 1428 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 17$ .

一般情况下有 **除数大于余数**. 即除数大于49且整除1428, 有84、51、68满足.

所以满足题意的两位数有51、68、84.

[难度等级]



7. 有一种最简真分数, 它们的分子与分母的乘积都是140. 如果把所有这样的分数从小到大排列, 那么第三个分数是多少?

**[分析与解]** 有  $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$ , 因为这些分数的分子与分母的乘积均为140, 当分母越大时, 分子越小, 所以对应的分数也越小.

有分母从大到小依次为140、70、35、28、20、14、10、7、5、4、2、1;

对应分子从小到大依次为1、2、4、5、7、10、14、20、28、35、70、140;

对应分数从小到大依次为  $\frac{1}{140}$ 、 $\frac{2}{70}$ 、 $\frac{4}{35}$ 、 $\frac{5}{28}$ 、 $\frac{7}{20}$ 、 $\frac{10}{14}$ 、 $\frac{14}{10}$ 、...

其中第三个最简真分数为  $\frac{5}{28}$ .

[难度等级]



8. 某校师生为贫困地区捐款1995元. 这个学校共有35名教师, 14个教学班. 各班学生人数相同且多于30人不超过45人. 如果平均每人捐款的钱数是整数, 那么平均每人捐款多少元?

**[分析与解]** 这个学校最少有  $35 + 14 \times 30 = 455$  名师生, 最多有  $35 + 14 \times 45 = 665$  名师生, 并且师生总人数能整除1995.

$1995 = 3 \times 5 \times 133$ , 在455~665之间的约数只有  $5 \times 133 = 665$ , 所以师生总数为665人, 则平均每人捐款  $1995 \div 665 = 3$  元.

[难度等级]



9. 在做一道两位数乘以两位数的乘法题时, 小马虎把一乘数中的数字5看成8, 由此得乘积为1872. 那么原来的乘积是多少?

**[分析与解]**  $1872 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 13 = \square \square \times \square \square$ , 其中某个  $\square$  为8,

——验证只有:  $1872 = 48 \times 39$ ,  $1872 = 78 \times 24$  满足.

当为  $1872 = 48 \times 39$  时, 小马虎错把5看成8, 也就是错把45看成48, 所以正确的乘积应该是  $45 \times 39 = 1755$ .

当为  $1872 = 78 \times 24$  时, 小马虎错把5看成8, 也就是错把75看成78, 所以正确的乘积应该是  $75 \times 24 = 1800$ .

所以原来的积为1755或1800.

[难度等级] ☆ ☆

10. 已知两个数的和被5除余1, 它们的积是2924, 那么它们的差等于多少?

[分析与解]  $2924 = 2 \times 2 \times 17 \times 43 = A \times B$ , 且有  $A+B$  被5除余1, 则和的个位为1或6.  
有  $4 \times 17 + 43 = 68 + 43 = 111$ , 也就是说68、43为满足题意的两个数.  
它们的差为  $68 - 43 = 25$ .

[难度等级] ☆ ☆ ☆

11. 在射箭运动中, 每射一箭得到的环数或者是“0”(脱靶), 或者是不超过10的自然数. 甲、乙两名运动员各射了5箭, 每人5箭得到的环数的积都是1764, 但是甲的总环数比乙少4环. 求甲、乙的总环数各是多少?

[分析与解]  $1764 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$ , 1764对应为5个小于10的自然数乘积.

只能是  $1764 = 4 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

$$= 2 \times 6 \times 3 \times 7 \times 7$$

$$= 2 \times 2 \times 9 \times 7 \times 7$$

$$= 1 \times 6 \times 6 \times 7 \times 7$$

$$= 1 \times 4 \times 9 \times 7 \times 7.$$

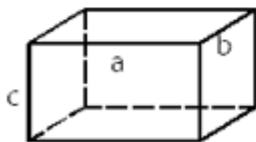
对应的和依次为  $4+3+3+7+7=24$ ,  $2+6+3+7+7=25$ ,  $2+2+9+7+7=27$ ,  $1+6+6+7+7=27$ ,  $1+4+9+7+7=28$ .

对应的和中只有24, 28相差4, 所以甲的5箭环数为4、3、3、7、7, 乙的5箭环数为1、4、9、7、7.  
所以甲的总环数为24, 乙的总环数为28.

[难度等级] ☆ ☆

12. 在面前有一个长方体, 它的正面和上面的面积之和是209, 如果它的长、宽、高都是质数, 那么这个长方体的体积是多少?

[分析与解] 如下图, 设长、宽、高依次为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 有正面和上面的和为  $ac+ab=209$ .



$ac+ab=a \times (c+b)=209$ , 而  $209=11 \times 19$ .

当  $a=11$  时,  $c+b=19$ , 当两个质数的和为奇数, 则其中必定有一个数为偶质数2, 则  $c+b=2+17$ ;

当  $a=19$  时,  $c+b=11$ , 则  $c+b=2+9$ ,  $b$  为9不是质数, 所以不满足题意.

所以它们的乘积为  $11 \times 2 \times 17=374$ .

[难度等级]



13. 一个长方体的长、宽、高是连续的3个自然数, 它的体积是39270立方厘米, 那么这个长方体的表面积是多少平方厘米?

**[分析与解]** 方法一:  $39270 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17$ , 为三个连续自然数的乘积, 而  $34 \times 34 \times 34$  即  $34^3$  最接近39270, 39270的约数中接近或等于34的有35、34、33, 有  $33 \times 34 \times 35 = 39270$ .

所以33、34、35为满足题意的长、宽、高.

则长方体的表面积为:  $2 \times (\text{长} \times \text{宽} + \text{宽} \times \text{高} + \text{高} \times \text{长}) = 2 \times (33 \times 34 + 34 \times 35 + 35 \times 33) = 6934$  (平方厘米).

方法二:  $39270 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17$ , 为三个连续自然数的乘积, 考虑质因数17, 如果17作为长、宽或高显然不满足.

当17与2结合即34作为长方体一条边的长度时有可能成立, 再考虑质因数7, 与34接近的数32~36中, 只有35含有7, 于是7与5的乘积作为长方体的一条边的长度.

而39270的质因数中只剩下了3和11, 所以这个长方体的大小为  $33 \times 34 \times 35$ .

长方体的表面积为  $2 \times \left( \frac{39270}{33} + \frac{39270}{34} + \frac{39270}{35} \right) = 2 \times (1190 + 1155 + 1122) = 2 \times 3467 = 6934$  (平方厘米).

[难度等级]



14. 一个长方体的长、宽、高都是整数厘米, 它的体积是1998立方厘米, 那么它的长、宽、高的和的最小可能值是多少厘米?

**[分析与解]** 我们知道任意个已确定个数的数的乘积一定时, 它们相互越接近, 和越小. 如3个数的积为18, 则三个数为2、3、3时和最小, 为8.

$1998 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 37$ , 37是质数, 不能再分解, 所以  $2 \times 3 \times 3 \times 3$  对应的两个数应越接近越好. 有  $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 6 \times 9$  时, 即  $1998 = 6 \times 9 \times 37$  时, 这三个自然数最接近.

它们的和为  $6 + 9 + 37 = 52$  (厘米).

[难度等级]



15. 如果两数的和是64, 两数的积可以整除4875, 那么这两个数的差等于多少?

**[分析与解]**  $4875 = 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 13$ ,

有  $a \times b$  为4875的约数, 且这两个数的和为64. 发现  $39 = 3 \times 13$ 、 $25 = 5 \times 5$  这两个数的和为64, 所以39、25为满足题意的两个数.

那么它们的差为  $39 - 25 = 14$ .



## 6. 仁华思维导引解析 6 讲：格点与割补

### 【内容概述】

正方形格点阵中多边形面积的计算公式，出现在各种形状的格点阵中的直线形的面积问题，以及借助构造格点阵求解的几何问题。通过恰当地分割与拼补进行计算的面积问题。

### 【典型问题】

【难度等级】☆☆

1. 如图6-1，每一个小方格的面积都是1平方厘米，那么用粗线围成的图形的面积是多少平方厘米？

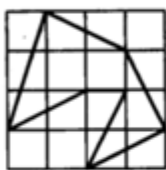
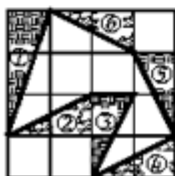


图 6-1

【分析与解】方法一：正方形格点阵中多边形面积公式： $\left(N + \frac{L}{2} - 1\right) \times \text{单位正方形面积}$ ，其中N为图形内格点数，L为图形周界上格点数。

有N=4，L=7，所以用粗线围成的图形的面积为： $\left(4 + \frac{7}{2} - 1\right) \times 1 = 6.5$ (平方厘米)。

方法二：如下图，先求出粗实线外格点内的图形的面积，有①=3÷2=1.5，②=2÷2=1，③=2÷2=1，④=2÷2=1，⑤=2÷2=1，⑥=2÷2=1，还有三个小正方形，所以粗实线外格点内的图形面积为1.5+1+1+1+1+1+3=9.5，而整个格点阵所围成的图形的面积为16，所以粗线围成的图形的面积为：16-9.5=6.5(平方厘米)。



**[难度等级]** ☆ ☆

2. 如图6-2, 如果每一个小三角形的面积是1平方厘米, 那么四边形ABCD的面积是多少平方厘米?

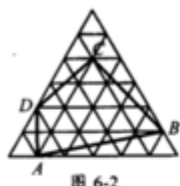


图 6-2

**[分析与解]** 方法一: 正三角形方形格点阵中多边形面积公式:  $(2N + L - 2) \times \text{单位正三角形面积}$ , 其中  $N$  为图形内格点数,  $L$  为图形周界上格点数.

有  $N=9$ ,  $L=4$ , 所以用粗线围成的图形的面积为:  $(9 \times 2 + 4 - 2) \times 1 = 20$  (平方厘米).

方法二: 如下图, 我们先数出粗实线内完整的小正三角形有10个, 而将不完整的小正三角形分成4部分计算, 其中①部分对应的平行四边形面积为4, 所以①部分的面积为2, ②、③、④部分对应的平行四边形面积分别为2, 8, 6, 所以②、③、④部分的面积分别为1, 4, 3. 所以粗实线内图形的面积为  $10 + 2 + 1 + 4 + 3 = 20$  (平方厘米).



【难度等级】



3. 如果图 6-3 是常见的一副七巧板的图，图 6-4 是用这副七巧板的 7 块板拼成的小房子图，那么，第 2 块板的面积等于整幅图的面积的几分之几？第 4 块板与第 7 块板面积的和等于整幅图的面积的几分之几？

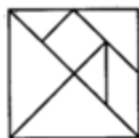


图 6-3

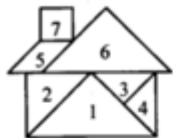


图 6-4

【分析与解】如下图，我们在图 6-3 中标出图 6-4 中各块图形的位置。



设整个七巧板的组成的正方形的边长为 1，显然整幅图形的面积为 1，且有第 2 块的面积为  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$

$$\frac{1}{8}.$$

有  $S_3 = S_4$ ,  $S_2 = S_5 = S_7 = 2S_3$ ，有 2、3、4、5、7 五块图形的面积之和为  $\frac{1}{2}$ ，所以  $S_4 = \frac{1}{16}$ ,  $S_7 = \frac{1}{8}$ 。

所以第 2 块板的面积等于整幅图面积的  $\frac{1}{8}$ ，第 4 块板与第 7 块板面积和为整幅图面积的  $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$ 。

【难度等级】



4. 把正三角形每边三等分，将各边的中间段取来向外面作小正三角形，得到一个六角形。再将这个六角形的各个“角”（即小正三角形）的两边三等分，又以它们的中间段向外作更小的正三角形，这样就得到图 6-5 所示的图形。如果这个图形面积是 1，那么原来的正三角形面积是多少？



图 6-5

**[分析与解]** 方法一：如下图，我们将图6-5分成若干个大小、形状完全相同的小正三角形，注意到40块小正三角形组成了图6-5，27块小正三角形组成了图中最大的正三角形。



120块小正三角形的面积为1，所以每块为  $\frac{1}{120}$ ，那么原来的正三角形由81块小正三角形组成，其面积显

然为  $\frac{27}{40}$ 。

方法二：如下图，我们把图6-5中的三角形分成A、B、C三种，设A形正三角形面积为“1”，则B、C两

种正三角形的面积依次为  $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{81}$ 。



在图6-5中，A种、B种、C种正三角形的个数依次为1，3，12，所以图6-5中图形的面积为  $1 + 3 \times \frac{1}{9} + 12 \times$

$\frac{1}{81} = \frac{40}{27}$ 。所以有“1”对应  $\frac{27}{40}$ ，而原来的正三角形即为三角形A，所以原来的正三角形的面积为  $\frac{27}{40}$ 。

【难度等级】☆☆☆

5. 如图6-6, 正六边形ABCDEF的面积是6平方厘米, M是AB中点, N是CD中点, P是EF中点. 问: 三角形MNP的面积是多少平方厘米?

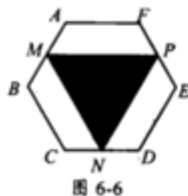
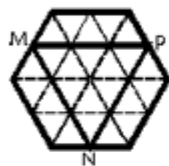


图 6-6

【分析与解】如下图, 我们将图6-6分成大小、形状相同的三角形, 有正六边形ABCDEF包含有24个小正三角形, 而阴影部分MNP包含有9个小正三角形.



正六边形ABCDEF的面积为6, 所以每个小正三角形的面积为  $6 \div 24 = \frac{1}{4}$ , 所以三角形MNP的面积为  $9 \times$

$$\frac{1}{4} = 2.25 \text{ (平方厘米)}.$$

【难度等级】☆☆

6. 把同一个三角形的三条边分别五等分、七等分, 适当连接这些分点, 便得到了若干个面积相等的小三角形. 已知图6-7中阴影部分的面积是294平方分米, 那么图6-8中的阴影部分的面积是多少平方分米?



图6-7



图6-8

【分析与解】在图6-7中, 原正三角形被分成25个小正三角形, 而阴影部分含有12个小正三角形, 所以每个小正三角形的面积为  $294 \div 12 = 24.5$ , 所以原正三角形的面积为  $24.5 \times 25 = 612.5$  (平方分米).

而在图6-8中, 原正三角形被分成49块, 而阴影部分含有16块, 所以阴影部分的面积为  $612.5 \div 49 \times 16 = 200$  (平方分米).

### [难度等级] ☆ ☆

7. 图6-9是5×5的方格纸, 小方格的面积是1平方厘米, 小方格的顶点称为格点. 请在图上选7个格点, 要求选出的点中任意3点都不在同一条直线上, 并且使这7个点用直线连接后所围成的面积尽可能大. 那么所围图形的面积是多少平方厘米?

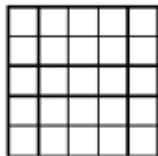
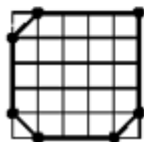


图6-9

**[分析与解]** 我们知道满足题意的7个点可以组成一个七边形, 适当的切去正方形的一个角可以得到一个五边形, 切去2个角可以得到一个六边形, 切去3个角可以得到七边形.

为了使最后留下的七边形的面积尽可能大, 那么切去的3个角面积应尽可能的小.

如下切法得到的七边形的面积最大, 为  $25 - 3 \times 0.5 = 23.5$  (平方厘米).



### [难度等级] ☆ ☆

8. 在图6-10中, 三角形ABC和DEF是两个完全相同的等腰直角三角形, 其中DF长9厘米, CF长3厘米, 那么阴影部分的面积是多少平方厘米?

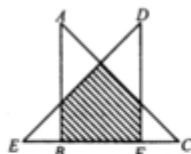
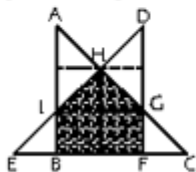


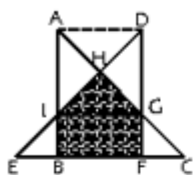
图 6-10

**[分析与解]** 方法一: 如下图, 将原题中图形分为12个完全一样的小等腰三角形.



$\triangle ABC$  占有9个小等腰三角形, 其中阴影部分占有6个小等腰三角形,  $S_{\triangle ABC} = 9 \times 9 \div 2 = 40.5$  (平方厘米), 所以阴影部分的面积为  $40.5 \div 9 \times 6 = 27$  (平方厘米).

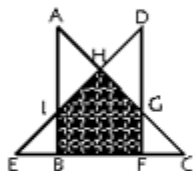
方法二：如下图，连接IG，有四边形ADGI为正方形，易知 $FG=FC=3$ (厘米)，所以 $DG=DF-FG=9-3=6$ (厘米)，于是 $S_{\triangle HIG} = \frac{1}{4} \times S_{\text{正方形AIGD}} = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9$ 。



而四边形IGFB为长方形，有 $BF=AD=DG=6$ (厘米)， $GF=3$ (厘米)，所以 $S_{\text{长方形IGFB}} = 6 \times 3 = 18$ 。

阴影部分面积为 $\triangle HIG$ 与长方形IGFB的面积和，即为 $9+18=27$ (平方厘米)。

方法三：如下图，为了方便叙述，将图6-10中某些交点标上字母。



易知三角形BIE、CGF、AHI、DGH均为等腰直角三角形。

先求出等腰直角三角形AHI、CGF的面积，再用已知的等腰三角形ABC的面积与其作差，即为需求阴影部分的面积。

$$\text{有 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times EF \times DF = \frac{81}{2}, \quad S_{\triangle CGF} = \frac{1}{2} \times CF \times FG = \frac{9}{2}.$$

因为 $CF=FG=3$ ，所以 $DG=DF-FG=6$ 。

如下图，可以将4个三角形DGH拼成一个边长为DG的正方形。



$$\text{所以, } S_{\triangle DGH} = \frac{1}{4} \times DG \times DG = 9, \text{ 而 } S_{\triangle AHI} = S_{\triangle DGH} = 9, \text{ 所以 } S_{\text{阴影BFGHI}} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CGF} - S_{\triangle AHI} = \frac{81}{2} - \frac{9}{2} - 9 = 27 \text{ (平方厘米).}$$

$$S_{\text{阴影}} = \frac{81}{2} - \frac{9}{2} - 9 = 27 \text{ (平方厘米).}$$

即阴影部分的面积为27平方厘米。

**【难度等级】** ☆ ☆

9. 如图6-11, 在长方形ABCD中, O是长方形的中心, BC长20厘米, AB长12厘米,  $DE=4AE$ ,  $CF=3DF$ , 那么阴影部分的面积是多少平方厘米?

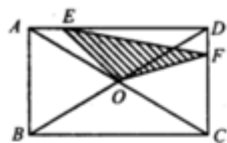


图 6-11

**【分析与解】** 我们只用先求出四边形ADFO的面积, 再将其减去两个三角形AEO、EFD的面积和, 即为所求阴影部分的面积.

而四边形ADFO的面积等于两个三角形AOD、ODF的面积和.

由题意知  $AE=4$ ,  $ED=16$ ,  $DF=3$ ,  $FC=9$ .

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形}ABCD} = \frac{1}{4} \times 20 \times 12 = 60, \quad S_{\triangle ODF} = \frac{1}{2} \times DF \times \left(\frac{1}{2} AD\right) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} \times 20 = 15.$$

$$S_{\triangle AEO} = \frac{1}{2} \times AE \times \left(\frac{1}{2} AB\right) = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 12 = 12, \quad S_{\triangle EFD} = \frac{1}{2} \times ED \times DF = \frac{1}{2} \times 16 \times 3 = 24.$$

$$S_{\text{阴影}} = (S_{\triangle AOD} + S_{\triangle ODF}) - S_{\triangle AEO} - S_{\triangle EFD} = 60 + 15 - 12 - 24 = 39 (\text{平方厘米}).$$

即阴影部分的面积为39平方厘米.

**【难度等级】** ☆ ☆

10. 如图6-12, 大正方形的边长为10厘米. 连接大正方形的各边中点得小正方形, 将小正方形每边三等分, 再将三等分点与大正方形的中心和一个顶点相连, 那么图中阴影部分的面积总和等于多少平方厘米?



图 6-12

**【分析与解】** 如下图, 我们将大正方形中的所有图形分成A、B两种三角形.





其中含有A形三角形8个，B形三角形16个，其中阴影部分含有A形三角形4个，B形三角形8个。

所以，阴影部分面积恰好为大正方形面积的  $\frac{1}{2}$ ，即为  $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$  (平方厘米)。

**【难度等级】** ☆ ☆ ☆

11. 如图6-13，ABCD是边长为8厘米的正方形，梯形AEBD的对角线相交于O，三角形AOE的面积比三角形BOD的面积小16平方厘米，则梯形AEBD的面积是多少平方厘米？

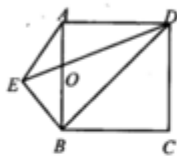
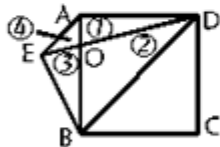


图 6-13

**【分析与解】** 如下图，将梯形AEBD内4个三角形的面积分别记为①、②、③、④。



在梯形AEBD中，有 $\triangle EBD$ 、 $\triangle ABD$ 同底等高，所以有 $S_{\triangle EBD} = S_{\triangle ABD}$ ，即 $③+②=①+②$ 。显然有①=③。

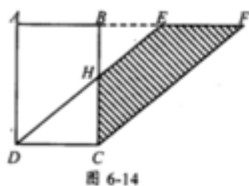
由题意知 $S_{\triangle BOD} - S_{\triangle AOE} = 16$ ，即 $② - ④ = 16$ ，于是有 $(①+②) - (③+④) = 16$ 。已知 $①+② = S_{\triangle ABD} =$

$\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$ ，所以 $③+④ = (①+②) - 16 = 16$ 。

所以有 $S_{\text{梯形AEBD}} = (①+②) + (③+④) = 32 + 16 = 48$  (平方厘米)。

## [难度等级] ☆ ☆

12. 如图6-14, ABCD是长方形, 长AD等于7.2厘米, 宽AB等于5厘米, CDEF是平行四边形. 如果BH的长是3厘米, 那么图中阴影部分面积是多少平方厘米?



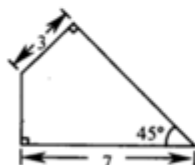
[分析与解]  $S_{\text{平行四边形}CDEF} = DC \times BC = 5 \times 7.2 = 36$ ,  $HC = BC - BH = 7.2 - 3 = 4.2$ , 所以  $S_{\triangle CDH} = \frac{1}{2}$

$$\times CD \times HC = \frac{1}{2} \times 5 \times 4.2 = 10.5.$$

$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{平行四边形}CDEF} - S_{\triangle CDH} = 36 - 10.5 = 25.5 (\text{平方厘米}).$$

## [难度等级] ☆ ☆ ☆

13. 如图6-15, 已知一个四边形的两条边的长度和三个角, 那么这个四边形的面积是多少?

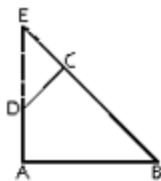


[分析与解] 将AD、BC延长交于E, 有  $\angle EDC = 45^\circ$ ,  $\angle ECD = 90^\circ$ , 所以  $\triangle CDE$  为等腰直角三角形, 有  $EC = DC$ .

而  $\angle EDC = 45^\circ$ ,  $\angle EAB = 90^\circ$ , 所以  $\triangle ABE$  也是等腰直角三角形, 有  $EA = AB$ .

$$\text{有 } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times AB \times EA = \frac{49}{2}, S_{\triangle EDC} = \frac{1}{2} \times EC \times DC = \frac{9}{2}.$$

$$\text{有 } S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle CDE} = \frac{49}{2} - \frac{9}{2} = 20.$$



【难度等级】☆☆☆

14. 图 6-16 是边长为 1 的正方形和一个梯形拼成的“火炬”。梯形的上底长 1.5 米, A 为上底的中点, B 为下底的中点, 线段 AB 恰好是梯形的高, 长为 0.5 米, CD 长为  $\frac{1}{3}$  米。那么图中阴影部分的面积是多少平方米?

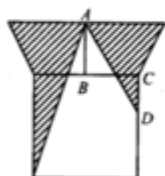
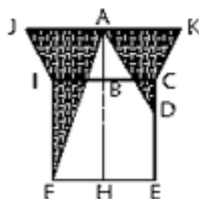


图 6-16

【分析与解】方法一：为了方便叙述，将下图中一些点标上字母，延长 AB 交正方形边 EF 于 H 点，过 D 作 AH 的垂线，交 AH 于 G 点。



我们先求出梯形 JICK 与正方形 IFEC 的面积和，再求出三角形 AFH 与梯形 AHED 的面积和，将前者与后者作差所得到的值即为所求阴影部分的面积。

$$S_{\text{梯形}JICK} = \frac{1}{2} \times (1.5+1) \times 0.5 = 0.625, S_{\text{正方形}IFEC} = 1 \times 1 = 1.$$

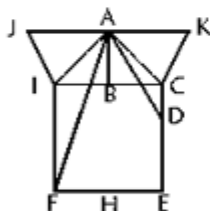
$$S_{\triangle AFH} = \frac{1}{2} \times AH \times FH = \frac{1}{2} \times (AB+BH) \times \left(\frac{1}{2}FE\right) = \frac{1}{2} \times (0.5+1) \times \left(\frac{1}{2} \times 1\right) = 0.375,$$

$$S_{\text{梯形}AHED} = \frac{1}{2} \times (AH+DE) \times HE = \frac{1}{2} \times (AB+BH+CE-CD) \times \left(\frac{1}{2}FE\right) = \frac{1}{2} \times \left(0.5+1+1-\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{13}{24}.$$

$$\text{有 } S_{\text{阴影}} = S_{\text{梯形}JICK} + S_{\text{正方形}IFEC} - S_{\triangle AFH} - S_{\text{梯形}AHED} = 0.625 + 1 - 0.375 - \frac{13}{24} = \frac{17}{24} (\text{平方米}).$$

即阴影部分的面积为  $\frac{17}{24}$  平方米.

方法二：如下图，连接AI、AC，将阴影部分分成四个部分.



$\triangle AJI$  可以看作以  $AJ$  为底， $AB$  的长为高的三角形； $\triangle AKC$  可以看作以  $AK$  为底， $AB$  的长为高的三角形； $\triangle AIF$  可以看作以  $IF$  为底， $IB$  为高的三角形； $\triangle ACD$  可以看作以  $CD$  为底， $CB$  为高的三角形.

$$\text{阴影部分面积为 } S_{\triangle AJI} + S_{\triangle AKC} + S_{\triangle AIF} + S_{\triangle ACD}$$

$$= 0.75 \times 0.5 \div 2 + 0.75 \times 0.5 \div 2 + 1 \times 0.5 \div 2 + \frac{1}{3} \times 0.5 \div 2$$

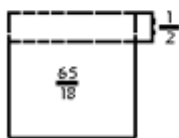
$$= 0.1875 + 0.1875 + 0.25 + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{17}{24} \text{ 平方米.}$$

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆ ☆

15. 从一块正方形木板锯下宽为  $\frac{1}{2}$  米的一个木条以后, 剩下的面积是  $\frac{65}{18}$  平方米. 问锯下的木条面积是多少平方米?

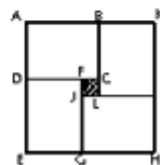
**[分析与解]** 我们画出示意图a, 则剩下的木块为图b, 将4块剩下的木块如下拼成一个正方形得到图c.



图a



图b



图c

我们称AB为长, AD为宽, 有长与宽的差为  $\frac{1}{2}$ , 所以图c中心的小正方形边长为  $\frac{1}{2}$ , 于是大正方形AEHK

的面积为  $\frac{65}{18} \times 4 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{529}{36} = \frac{23}{6} \times \frac{23}{6}$ , 所以AK长为  $\frac{23}{6}$ .

即, 长+宽 =  $\frac{23}{6}$ , 已知 长-宽 =  $\frac{1}{2}$ , 得长 =  $\frac{13}{6}$ , 于是锯去部分的木条的面积为  $\frac{13}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$  (平方米).

## 7. 仁华思维导引解析 7 讲: 数字谜综合之一

## 【内容概述】

涉及分数与小数的各种类型的数字谜问题, 包括竖式的补填、算式的构造、小数的舍入与变化等, 较为复杂的数字问题, 以及其他略有综合性的数字谜问题。

## 【典型问题】

## 【难度等级】★

1. 有一个四位整数, 在它的某位数字前面加上一个小数点, 再与这个四位数相加, 得数是2000.81. 求这个四位数是多少?

【分析与解】设四位整数A的某位数字前加上一个小数点得到一个新的数B, A与B的和为2000.81, 而小数只能由B得到, 且0.81为B的小数部分, 所以小数点加在A的百位与十位之间, 即缩小了100倍。

有  $A+0.01A=2000.81$ , 所以  $A=1981$ .

## 【难度等级】★★

2. 老师在黑板上写了13个自然数, 让小明计算平均数(保留两位小数), 小明计算出的答数是12.43. 老师说最后一位数字错了, 其他的数字都对. 正确答案应该是什么?

【分析与解】老师说最后一位数字错了, 那么前3位数字是正确的, 所以正确的平均数在12.40~12.5(不能取12.5)之间, 那么这13个数的和在161.2~162.5(不能取162.5), 因为这13个数都是自然数, 所以它们的和也应该是自然数。

那么这13个数的和只能是162, 它们的平均数应该是  $162 \div 13 \approx 12.46$ .

所以正确的平均数应该是12.46.

## 【难度等级】★★

3. 两个带小数相乘, 乘积四舍五入以后是22.5. 这两个数都只有一位小数, 且个位数字都是4. 这两个数的乘积四舍五入前是多少?

【分析与解】因为这两个带小数均只有一位小数, 那么给它们均乘以10, 则这两个数均是整数。

开始它们的乘积在22.45~22.55(不能取22.55)之间, 所以在这两个数在均乘以10以后再相乘而得到的乘积应该在2245~2255(不能取2255)之间。

——验证,  $2245=5 \times 449$ ,  $2246=2 \times 1123$ ,  $2247=3 \times 7 \times 107$ ,  $2248=2 \times 2 \times 2 \times 281$ ,  $2249=13 \times 17$

3,  $2250=2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$ , 2251为质数,  $2252=2 \times 2 \times 563$ ,  $2253=3 \times 751$ ,  $2254=2 \times 7 \times 7 \times 23$ .

其中只有2254可以表达为  $(2 \times 23) \times (7 \times 7) = 46 \times 49$ , 两个十位数字均为4的数的乘积。

所以, 四舍五入前乘积应为  $2254 \div 10 \div 10 = 22.54$ .

即两个数的乘积四舍五入前是22.54.

## 【难度等级】☆☆

4.  $[4.2 \times 5 - (1 \div 2.5 + 9.1 \div 0.7)] \div 0.04 = 100$

改动上面算式中一个数的小数点的位置,使其成为一个正确的等式,那么被改动的数变为多少?

【分析与解】我们先把题中左边算式计算一遍,在计算过程中发现问题.

$$\begin{aligned} & [4.2 \times 5 - (1 \div 2.5 + 9.1 \div 0.7)] \div 0.04 \\ &= [21 - (0.4 + 13)] \div 0.04 \\ &= [21 - 13.4] \div 0.04 \\ &= 7.6 \div 0.04 \\ &= 190. \end{aligned}$$

注意到在“ $[21 - (0.4 + 13)] \div 0.04$ ”这一步中如果 $(0.4 + 13)$ 是 $(4 + 13)$ ,那么有最终的结果为100.所以只用将 $1 \div 2.5$ 改为 $1 \div 0.25$ 即可,即将2.5改为0.25即可.

## 【难度等级】☆☆☆

5. 在算式 $2 \div 3 \div 4 \div 5 \div 6$ 中添上若干个括号,使算式的结果是整数,并且尽可能小.试写出添加完括号后的算式.

【分析与解】注意到将除号前加一个括号,可以使括号内的除号在脱括号之后变为乘号.

又注意到2、3、4、5、6只有5含有质因数5,就是说其他的质因数可能经过变换运算法则除去,而质因数只能保留,且只能作为乘数,也就是说题中算式变化后最终的结果最小为5.

有 $2 \div 3 \div 4 \div 5 \div 6 = \frac{1}{180}$ ,现在要得到5,扩大了 $5 \div \frac{1}{180} = 900$ ,所以必须将原来作为除数的30变为乘数30,有 $5 \times 6 = 30$ ,所以将5、6由除数变为乘数.  
有 $2 \div 3 \div (4 \div 5 \div 6) = 5$ ,此式即为所求.

## 【难度等级】☆☆☆

6. 用1, 4, 5, 6四个数,并适当选择加号、减号、乘号、除号以及括号,组成一个结果等于24的正确算式.

【分析与解】有 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ,常规的方法,无法使1, 4, 5, 6通过运算得到24,但是注意到可利用

分数:有 $4 \div \frac{1}{6} = 24$ ,  $6 \div \frac{1}{4} = 24$ 等.

于是有下面两个算式满足:

$$4 \div (1 - 5 \div 6) = 24, \quad 6 \div (5 \div 4 - 1) = 24.$$

[难度等级]



$$7. \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \approx 0.658$$

上式是经过四舍五入得到的等式，其中每个 $\Delta$ 代表一个一位数，那么这3个 $\Delta$ 所代表的3个数分别是多少？

**[分析与解]** 设 $\Delta$ 代表的三个数从小到大为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 。

当 $a$ 取最小值2时， $\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta}$  最小为  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0.736$ ，所以 $a$ 最小取3。

当 $a=3$ ， $b$ 最小取4时， $\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta}$  最小为  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \approx 0.694$ ，所以 $b$ 最小取5。

当 $a=3$ ， $b=5$ 时， $\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta}$  最小为  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \approx 0.644$ ，有可能。

验证当， $a=3$ ， $b=5$ ， $c=8$ 时有  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \approx 0.658$ 。满足。

所以这三个数分别为3、5、8。

[难度等级]



8. 用0、1、2、…、9这10个数字组成5个两位数，每个数字只用一次，要求它们的和是一个奇数，并且尽可能的大。那么这5个两位数的和是多少？

**[分析与解]** 要求5个数的和是奇数，所以这5个数中有奇数个奇数，如果用9、8、7、6、5作十位数字，那么个位数字为0、1、2、3、4，这样组成的5个数中有2个数是奇数。

所以调整，将9、8、7、6、4作为十位数字，0、1、2、3、5作为个位数字，那么组成的5个两位数的和是  $(9+8+7+6+4) \times 10 + (0+1+2+3+5) = 351$ 。

因为已经使十位数字尽可能的大，所以所得的和为最大值。

即在满足题意下，得到的5个两位数的和为351。



【难度等级】



9. 将1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8这8个数分成3组, 分别计算各组数的和. 已知这3个和互不相等, 且最大的和是最小的和的2倍, 那么最小的和是多少?

【分析与解】设分成的3组数的和从大到小依次为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,  $a=2c$ , 并且有

$a+b+c=b+3c=1+2+3+\cdots+8=36$ .  $3c$ 为3的倍数,  $36$ 为3的倍数, 所以 $b$ 为3的倍数.

解得  $\begin{cases} b=3 \\ c=11 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} b=6 \\ c=10 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} b=9 \\ c=9 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} b=12 \\ c=8 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} b=15 \\ c=7 \end{cases}$ , 不难看出随着 $b$ 的增大,  $a$ 在减小, 所以其他情况不用再讨论.

满足条件的解只有 $b=12$ ,  $c=8$ ,  $a=16$ .

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8可以分成 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 、 $\{5, 7\}$ 、 $\{8\}$ 这三组.

所以满足题意的最小一组数的和为8.

【难度等级】



10. 用1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9这9个数字组成3个三位数(每个数字只用一次), 使其中最大的三位数被3除余2, 并且尽可能地小; 次大的三位数被3除余1; 最小的三位数能被3整除. 那么, 最大的三位数是多少?

【分析与解】被3除余2、1、0的数, 其数字和除以3也分别余2、1、0.

为了使最大的三位数尽可能地小, 所以其百位最小取3, 因为如果取1或2, 那么剩下两个三位中的某一个其百位数字大于3, 显然不满足.

当最大三位数的百位取3时, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9组成的三个三位数只能是3□□、2□□、1□□, 而3□□的十位最小取4, 百位与十位的数字和为7, 则个位只能取7.

满足条件的最大三位数347.

## [难度等级] ☆☆☆

11. 红、黄、蓝和白色卡片各一张，每张上写有一个数字。小明将这4张卡片如图7.1放置，使它们构成一个四位数，并计算这个四位数与它的数字之和的10倍的差。结果小明发现，无论白色卡片上是什么数字，计算结果都是1998。问：红、黄、蓝3张卡片上各是什么数字？



图7-1

[分析与解] 设这个四位数为  $\overline{abcd}$ ，其中a、b、c、d依次代表红、黄、白、蓝。

有  $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ ，而  $\overline{abcd}$  的数字和为  $a + b + c + d$ ，所求的差：

$(1000a + 100b + 10c + d) - 10(a + b + c + d) = 1998$ ，即  $990a + 90b - 9d = 1998$ 。

因为a、b、d均为小于10的自然数，所以  $a = 2$ ， $b = 1$ ， $d = 8$ 。

即红、黄、蓝3张卡片上的数字分别为2、1、8。

## [难度等级] ☆☆☆

12. 一个四位数的数码都是由非零的偶数码组成，它又恰是某两个偶数码组成的数的平方。问这个四位数是多少？

[分析与解] 设这个四位数为  $A = \overline{abcd}$ ，其为  $B = \overline{ef}$  的平方，因为f只能取0、2、4、6、8，所以B平方后的个位为0、4、6。即d为4或6。

而B中的十位数字e只能取4、6、8这三个数，不然平方后得到的不是4位数。

验证有  $68 \times 68 = 4624$  满足。

## [难度等级] ☆☆☆

13. 一个整数乘以13后，乘积的最后三位数是123。这样的整数中最小的是多少？

[分析与解] 设  $A = \overline{...cba}$ ， $B = \overline{...123}$ ，有  $\overline{...cba} \times 13 = \overline{...123}$ 。

方法一：  $\overline{...123}$  一定是13的倍数，而13的倍数满足其后三位与前面隔开，差是13的倍数。

$123 \div 13 = 9 \cdots 6$ ，那么4123一定是13的倍数，且为满足条件的最小自然数。

那么题中所求的最小整数为  $4123 \div 13 = 471$ 。

方法二：有A的个位a只能是1，不然其与13的乘积的个位不是3。

显然有A的个位1与13相乘过程中进有1，则A的十位b乘以13得到的数的个位为 $2-1=1$ ，显然只有当b=7时才能满足。

此时A的十位7与13相乘过程中进有9，则A的百位c乘以13得到的数的个位为 $(1+10)-9=2$ ，显然只用当c=4。

于是  $\overline{471}$  乘以13后得到的积其最后三位数是123。

而这样的数中最小的是471。

**【难度等级】**



14. 将1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9分别填入图7.2中的9个圆圈内，使其中一条边上的4个数之和与另一条边的4个数之和的比值最大。那么这个比值是多少？

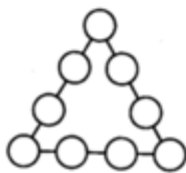
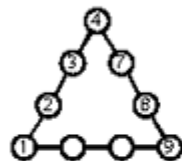


图 7-2

**【分析与解】** 为了使比值尽可能的大，那么一边应尽可能的小，另一边尽可能的大。有两种情况：



第一种情况



第二种情况

第一种情况，两边上各自4个数字和的比值为  $\frac{4+7+8+9}{4+3+2+1} = \frac{28}{10} = 2.8$ ，

第二种情况，两边上各自4个数字和的比值为  $\frac{6+7+8+9}{6+1+2+3} = \frac{30}{12} = 2.5$ 。

显然有第一种情况的比值最大，为2.8。

【难度等级】☆☆☆☆

15. 在图7-3所示的除法算式中, 只知道一个数字“3”, 且商是一个循环小数. 问被除数是多少?

$$\begin{array}{r}
 0.\dot{\square}3\dot{\square} \\
 \square\square \overline{) \square\square} \\
 \underline{\square\square\square} \\
 \square\square\square \\
 \underline{\square\square\square} \\
 \square\square \\
 \underline{\square\square} \\
 \square\square
 \end{array}$$

图 7-3

【分析与解】为了方便说明, 标出字母.

$$\begin{array}{r}
 0.\dot{A}3\dot{B} \\
 \square\square \overline{) \square\square} \\
 \underline{\square\square\square} \\
 \square\square\square \\
 \underline{\square\square\square} \\
 \square\square \\
 \underline{\square\square} \\
 \square\square
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{B对应的被除数为三位数} \\
 \text{而B} \neq 0, \text{所以B只能为1或2} \\
 \text{第1行} \\
 \text{第2行} \\
 \text{第3行} \\
 \text{第4行} \\
 \text{第5行} \\
 \text{第6行} \\
 \text{第7行}
 \end{array}$$

$$0.\dot{A}3\dot{B} = \frac{A3B}{999} = \overline{A3B} \div 999 = \overline{EF} \div \overline{CD}, \text{被除数与除数均为两位数.}$$

所以  $\frac{A3B}{999}$  可以约分, 约分后为  $\frac{EF}{CD}$ , 999为除数  $\overline{CD}$  的倍数,

$999 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$ , 999的约数中只有27、37为两位数, 所以除数  $\overline{CD}$  只能是27或37.

$$\begin{array}{r}
 0.\dot{4}3\dot{2} \\
 37 \overline{) 16} \\
 \underline{148} \\
 120 \\
 \underline{111} \\
 90 \\
 \underline{74} \\
 16
 \end{array}$$

第四行对应为  $\overline{CD} \times 3$ , 且为三位数, 所以  $\overline{CD} = 37$ . 那么第四行为  $37 \times 3 = 111$ .

则第五行首位为0减1, 借位后为9.

所以第五行为90, 对应为  $\overline{CD} \times B + \overline{EF} = 37 \times B + \overline{EF} \ (\overline{EF} < \overline{CD})$ .

当  $B=1$  时,  $37 \times B + \overline{EF}$  小于  $37 \times (1+1) = 74$ , 不满足;

当  $B=2$  时,  $37 \times B + \overline{EF} = 37 \times 2 + \overline{EF} = 90$ , 解得被除数  $\overline{EF} = 16$ .

## 8. 仁华思维导引解析 8 讲：包含与排除

## 【内容概述】

涉及互相重复的两类或三类对象的计数问题。解题可利用计算所有对象总个数的容斥原理，以及图示包含与排除关系。

## 【典型问题】

## 【难度等级】★

1. 某班有40名学生，其中有15人参加数学小组，18人参加航模小组，有10人两个小组都参加。那么有多少人两个小组都不参加？

【分析与解】有至少参加一个小组的同学有  $15+18-10=23$  人，所以有  $40-23=17$  人两个小组都不参加。

## 【难度等级】★ ★

2. 某班45个学生参加期末考试，成绩公布后，数学得满分的有10人，数学及语文均得满分的有3人，这两科都没有得满分的有29人。那么语文成绩得满分的有多少人？

【分析与解】有数学、语文至少有一门得满分的学生有  $45-29=16$  人。所以语文成绩得满分的有  $16-10+3=9$  人。

## 【难度等级】★ ★

3. 50名同学面向老师站成一行。老师先让大家从左至右按1, 2, 3, ..., 49, 50依次报数；再让报数是4的倍数的同学向后转，接着又让报数是6的倍数的同学向后转。问：现在面向老师的同学还有多少名？

【分析与解】在转过两次后，面向老师的同学分成两类：

第一类是标号既不是4的倍数，又不是6的倍数；第二类是标号既是4的倍数又是6的倍数。

1~50之间，4的倍数有  $\left[\frac{50}{4}\right]=12$ ，6的倍数有  $\left[\frac{50}{6}\right]=8$ ，即是4的倍数又是6的倍数的数一定是12的倍

数，所以有  $\left[\frac{50}{12}\right]=4$ 。

于是，第一类同学有  $50-12-8+4=34$  人，第二类同学有4人，所以现在共有  $34+4=38$  名同学面向老师。

## [难度等级] ☆ ☆

4. 在游艺会上, 有100名同学抽到了标签分别为1至100的奖券. 按奖券标签号发放奖品的规则如下: ①标签号为2的倍数, 奖2支铅笔; ②标签号为3的倍数, 奖3只铅笔; ③标签号既是2的倍数, 又是3的倍数可重复领奖; ④其他标签号均奖1支铅笔. 那么游艺会为该项活动准备的奖品铅笔共有多少支?

[分析与解] 1~100, 2的倍数有  $\left[\frac{100}{2}\right] = 50$  个, 3的倍数有  $\left[\frac{100}{3}\right] = 33$  个, 因为既是2的倍数, 又是3的

倍数的数一定是6的倍数, 所以标签为这样的数有  $\left[\frac{100}{6}\right] = 16$  个.

于是, 既不是2的倍数, 又不是3的倍数的数在1~100中有  $100 - 50 - 33 + 16 = 33$ .

所以, 游艺会为该项活动准备的奖品铅笔共有  $50 \times 2 + 33 \times 3 + 33 \times 1 = 232$  支.

## [难度等级] ☆ ☆ ☆

5. 有一根长为180厘米的绳子, 从一端开始每隔3厘米作一记号, 每隔4厘米也作一记号, 然后将标有记号的地方剪断. 问绳子共被剪成了多少段?

[分析与解] 我们只用先计算剪了多少刀, 再加上1即为剪成的段数.

从一端开始, 将绳上距离这个端点整数厘米数的点编号, 并将距离长度作为编号.

有1~180, 3的倍数有  $\left[\frac{180}{3}\right] = 60$  个, 4的倍数有  $\left[\frac{180}{4}\right] = 45$  个, 而既是3的倍数, 又是4的倍数的数一定

是12的倍数, 所以这样的数有  $\left[\frac{180}{12}\right] = 15$  个.

注意到180厘米处的无法标上记号, 所以剪了  $(60-1) + (45-1) - (15-1) = 89$ , 所以绳子被剪成  $89+1=90$  段.

## [难度等级] ☆ ☆

6. 东河小学画展上展出了许多幅画, 其中有16幅画不是六年级的, 有15幅画不是五年级的. 现知道五、六年级共有25幅画, 那么其他年级的画共有多少幅?

[分析与解] 将东河小学分成3个部分, 六年级、五年级、其他年级,

那么有五年级和其他年级共作画16幅, 六年级和其他年级共作画15幅. 而五、六年级共作画25幅, 所以其他年级的画共有  $(16+15-25) \div 2 = 3$  幅.

## [难度等级] ☆ ☆

7. 有若干卡片, 每张卡片上写着一个数, 它是3的倍数或4的倍数, 其中标有3的倍数的卡片占  $\frac{2}{3}$ , 标有

4的倍数的卡片占  $\frac{3}{4}$ , 标有12的倍数的卡片有15张. 那么, 这些卡片一共有多少张?

[分析与解] 设这些卡片的总数为“1”, 而标有12的倍数的卡片既属于3的倍数又属于4的倍数.

所以有  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 15 = \text{“1”}$ , 解得“1”对应36张.

即这些卡片一共有36张.

## [难度等级] ☆

8. 在从1至1000的自然数中, 既不能被5除尽, 又不能被7除尽的数有多少个?

[分析与解] 1~1000之间, 5的倍数有  $\left[\frac{1000}{5}\right] = 200$  个, 7的倍数有  $\left[\frac{1000}{7}\right] = 142$  个, 因为既是5的倍

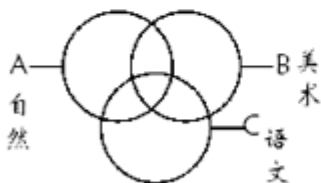
数, 又是7的倍数的数一定是35的倍数, 所以这样的数有  $\left[\frac{1000}{35}\right] = 28$  个.

所以既不能被5除尽, 又不能被7除尽的数有  $1000 - 200 - 142 + 28 = 686$  个.

## [难度等级] ☆

9. 五年级三班学生参加课外兴趣小组, 每人至少参加一项. 其中有25人参加自然兴趣小组, 35人参加美术兴趣小组, 27人参加语文兴趣小组, 参加语文同时又参加美术兴趣小组的有12人, 参加自然同时又参加美术兴趣小组的有8人, 参加自然同时又参加语文兴趣小组的有9人, 语文、美术、自然3科兴趣小组都参加的有4人. 求这个班的学生人数.

[分析与解] 设参加自然兴趣小组的人组成集合A, 参加美术兴趣小组的人组成集合B, 参加语文兴趣小组的人组成集合C.



$$|A| = 25, |B| = 35, |C| = 27, |B \cap C| = 12, |A \cap B| = 8, |A \cap C| = 9, |A \cap B \cap C| = 4,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

所以, 这个班中至少参加一项活动的人有  $25 + 35 + 27 - 12 - 8 - 9 + 4 = 62$ , 而这个班每人至少参加一项. 即这个班有62人.

### [难度等级] ☆ ☆

10. 如图8-1, 已知甲、乙、丙3个圆的面积均为30, 甲与乙、乙与丙、甲与丙重合部分的面积分别为6, 8, 5, 而3个圆覆盖的总面积为73. 求阴影部分的面积.

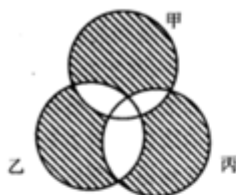


图 8-1

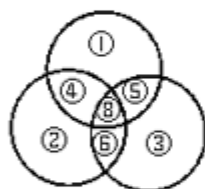
[分析与解] 设甲圆组成集合A, 乙圆组成集合B, 丙圆组成集合C.

$$|A| = |B| = |C| = 30, \quad |A \cap B| = 6, \quad |B \cap C| = 8, \quad |A \cap C| = 5, \quad |A \cup B \cup C| = 73,$$

$$\text{而 } |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

有  $73 = 30 \times 3 - 6 - 8 - 5 + |A \cap B \cap C|$ , 即  $|A \cap B \cap C| = 2$ , 即甲、乙、丙三者的公共面积(⑧部分面积)为

2.



那么只是甲与乙(④), 乙与丙(⑥), 甲与丙(⑤)的公共的面积依次为  $6 - 2 = 4$ ,  $8 - 2 = 6$ ,  $5 - 2 = 3$ , 所以有阴影部分(①、②、③部分之和)的面积为  $73 - 4 - 6 - 3 - 2 = 58$ .

### [难度等级] ☆ ☆

11. 四年级一班有46名学生参加3项课外活动. 其中有24人参加了数学小组, 20人参加了语文小组, 参加文艺小组的人数是既参加数学小组也参加文艺小组人数的3.5倍, 又是3项活动都参加人数的7倍, 既参加文艺小组也参加语文小组的人数相当于3项都参加的人数的2倍, 既参加数学小组又参加语文小组的有10人. 求参加文艺小组的人数.

[分析与解] 设参加数学小组的学生组成集合A, 参加语文小组的学生组成集合B, 参加文艺小组的学生组成集合C. 三者都参加的学生有x人.

$$\text{有 } |A \cup B \cup C| = 46, \quad |A| = 24, \quad |B| = 20, \quad |C| = 3.5|A \cap C| = 7|A \cap B \cap C|, \quad |B \cap C| = 2|A \cap B \cap C|, \quad |A \cap B| = 10.$$

因为  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ , 所以  $46 = 24 + 20 + 7x - 10 - 2x - 2x + x$ , 解得  $x = 3$ , 即三者的都参加的有3人.

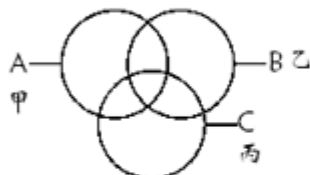
那么参加文艺小组的有  $3 \times 7 = 21$  人.



### [难度等级] ☆☆☆

12. 图书室有100本书, 借阅图书者需在图书上签名. 已知这100本书中有甲、乙、丙签名的分别有33, 44和55本, 其中同时有甲、乙签名的图书为29本, 同时有甲、丙签名的图书为25本, 同时有乙、丙签名的图书为36本. 问这批图书中最少有多少本没有被甲、乙、丙中的任何一人借阅过?

**[分析与解]** 设甲借过的书组成集合A, 乙借过的书组成集合B, 丙借过的书组成集合C.



$$|A|=33, |B|=44, |C|=55, |A \cap B|=29, |A \cap C|=25, |B \cap C|=36.$$

本题只需算出甲、乙、丙中至少有一人借过的书的最大值, 再将其与100作差即可.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ , 当  $|A \cap B \cap C|$  最大时,  $|A \cup B \cup C|$  有最大值.

也就是说当三人都借过的书最多时, 甲、乙、丙中至少有一人借过的书最多.

而  $|A \cap B \cap C|$  最大不超过  $|A|$ 、 $|B|$ 、 $|C|$ 、 $|A \cap B|$ 、 $|B \cap C|$ 、 $|A \cap C|$  6个数中的最小值, 所以  $|A \cap B \cap C|$  最大为25.

有此时  $|A \cup B \cup C| = 33 + 44 + 55 - 29 - 25 - 36 + 25 = 67$ , 即三者至少有一人借过的书最多为67本, 所以这批图书中最少有33本没有被甲、乙、丙中的任何一人借阅过.

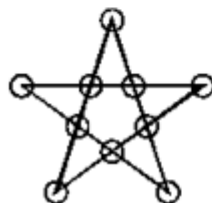
### [难度等级] ☆☆☆

13. 如图8-2, 5条同样长的线段拼成了一个五角星. 如果每条线段上恰有1994个点被染成红色, 那么在这个五角星上红色点最少有多少个?



图 8-2

**[分析与解]** 如下图, 下图中“○”位置均有两条线段通过, 也就是交点, 如果这些交点所对应的线段都在“○”位置恰有红色点, 那么在五角星上重叠的红色点最多, 显然此时就有显现的红色点最少, 有  $1994 \times 5 - (2-1) \times 10 = 9960$  个.



### [难度等级] ☆☆☆

14. 甲、乙、丙同时给100盆花浇水。已知甲浇了78盆，乙浇了68盆，丙浇了58盆，那么3人都浇过的花最少有多少盆？

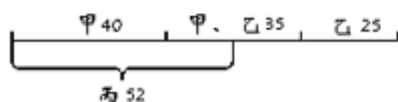
**[分析与解]** 只考虑甲乙两人情况，有甲、乙都浇过的最少为： $78+68-100=46$ 盆，此时甲单独浇过的为 $78-46=32$ 盆，乙单独浇过的为 $68-46=22$ 盆；

欲使甲、乙、丙三人都浇过的花最少时，应将丙浇过的花尽量分散在两端，于是三者都浇过花最少为 $58-32-22=4$ 盆。

### [难度等级] ☆☆☆

15. 甲、乙、丙都在读同一本故事书，书中有100个故事。每个人都从某一个故事开始，按顺序往后读。已知甲读了75个故事，乙读了60个故事，丙读了52个故事。那么甲、乙、丙3人共同读过的故事最少有多少个？

**[分析与解]** 只考虑甲乙两人情况，有甲、乙都读过的最少为： $75+60-100=35$ 个，此时甲单独读过的为 $75-35=40$ 个，乙单独读过的为 $60-35=25$ 个；



欲使甲、乙、丙三人都读过的书最少时，应将丙读过的书尽量分散在某端，于是三者都读过书最少为 $52-40=12$ 个。

## 9. 仁华思维导引解析 9讲: 复杂抽屉原理

## 【内容概述】

运用抽屉原理求解的较为复杂的组合计算与证明问题, 这里不仅“抽屉”与“苹果”需要恰当地设计与选取, 而且有时还应构造出达到最佳状态的例子.

## 【典型问题】

## 【难度等级】☆☆

1. 从1, 2, 3, ..., 1988, 1989这些自然数中, 最多可以取出多少个数, 使得其中每两个数的差不等于4?

**【分析与解】** 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 25, ...,  
 这些数中任何两个数的差都不为4, 这些数是每8个连续的数中选取前4个连续的数.  
 有  $1989 \div 8 = 248 \cdots 5$ , 所以最多可以选  $248 \times 4 + 4 = 996$  个数.

## 【难度等级】☆☆☆☆

2. 从1至1993这1993个自然数中最多能取出多少个数, 使得其中任意的两数都不连续且差不等于4?

**【分析与解】** 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 21, ...,  
 这些数中任何两个数不连续且差不等于4, 这些数是每5个连续的数中选择第1、3个数.  
 $1993 \div 5 = 398 \cdots 3$ , 所以最多可以选  $398 \times 2 + 2 = 798$  个数.

## 【难度等级】☆☆

3. 从1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12中最多能选出几个数, 使得在选出的数中, 每一个数都不是另一个数的2倍?

**【分析与解】** 方法一: 直接从1开始选择1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 这样可以选出8个数;  
 而从2开始选择2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 这样也是可以选出8个数.  
 3包含在组内, 所以只用考虑这两种情况即可.  
 所以, 在满足题意情况下, 最多可以选择出8个数.

方法二: 我们知道选择多少个奇数均满足, 有1, 3, 5, 7, 9, 11均为奇数, 并且有偶数中4的倍数, 但不是8的倍数的也满足, 有4, 12是这样的数.

所以, 在满足题意情况下最多可以取出8个数.

[难度等级]



4. 从1, 3, 5, 7, ..., 97, 99中最多可以选出多少个数, 使得选出的数中, 每一个数都不是另一个数的倍数?

**[分析与解]** 方法一: 因为均是奇数, 所以如果存在倍数关系, 那么也一定是3、5、7等奇数倍。

$3 \times 33 = 99$ , 于是从35开始, 1~99的奇数中没有一个是35~99的奇数倍(不包括1倍), 所以选出35, 37, 39, ..., 99这些奇数即可。

共可选出33个数, 使得选出的数中, 每一个数都不是另一个数的倍数。

方法二: 利用3的若干次幂与质数的乘积对这50个奇数分组。

(1, 3, 9, 27, 81), (5, 15, 45), (7, 21, 63), (11, 33), (13, 39), (17, 51), (19, 57), (23, 69), (25, 75), (29, 87), (31, 93), (35), (37), (41), (43), ..., (97)共33组。

前11组, 每组内任意两个数都存在倍数关系, 所以每组内最多只能选择一个数。

即最多可以选出33个数, 使得选出的数中, 每一个数都不是另一个数的倍数。

[难度等级]



5. 证明: 任给12个不同的两位数, 其中一定存在着这样的两个数, 它们的差是个位与十位数字相同的两位数。

**[分析与解]** 因为两个不同的两位数相减得到的差不可能为三位或三位以上的数。如果这个差是11的倍数, 那么一定有这个差的个位与十位数字相同。

两个数的差除以11的余数有0、1、2、3、...、10这11种情况。将这11种情况视为11个抽屉。

将12个数视为12个苹果, 那么必定有两个苹果在同一抽屉, 也就是说有两个数除以11的余数相同, 那么它们的差一定是11的倍数。

而两个两位数的差一定是一个两位数, 如果这个差是11的倍数, 那么就有一个数与十位数字相等。问题得证。

**[难度等级]** ☆☆☆

6. 从1, 2, 3, ..., 49, 50这50个数中取出若干个, 使其中任意两个数的和都不能被7整除, 则最多能取出多少个数?

**[分析与解]** 利用除以7的余数分类:

余0: (7, 14, 21, 28, 35, 42, 49);

余1: (1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50);

余2: (2, 9, 16, 23, 30, 37, 44);

余3: (3, 10, 17, 24, 31, 38, 45);

余4: (4, 11, 18, 25, 32, 39, 46);

余5: (5, 12, 19, 26, 33, 40, 47);

余6: (6, 13, 20, 27, 34, 41, 48).

第一组内的数最多只能取1个; 如果取第2组, 那么不能取第7组内任何一个数; 取第3组, 不能取第6组内任何一个数; 取第4组, 不能取第5组内任意一个数.

第2、3、4、5、6、7组分别有8、7、7、7、7、7个数, 所以最多可以取 $1+8+7+7=23$ 个数.

**[难度等级]** ☆☆☆

7. 从1, 2, 3, ..., 99, 100这100个数中任意选出51个数. 证明:

(1) 在这51个数中, 一定有两个数互质;

(2) 在这51个数中, 一定有两个数的差等于50;

(3) 在这51个数中, 一定存在9个数, 它们的最大公约数大于1.

**[分析与解]** (1) 我们将1~100分成(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), ..., (99, 100)这50组, 每组内的数相邻, 而相邻的两个自然数互质.

将这50组数作为50个抽屉, 同一个抽屉内的两个数互质.

而现在51个数, 放进50个抽屉, 则必定有两个数在同一抽屉, 于是这两个数互质. 问题得证.

(2) 我们将1~100分成(1, 51), (2, 52), (3, 53), ..., (40, 90), ..., (50, 100)这50组, 每组内的数相差50. 将这50组数视为抽屉, 则现在有51个数放进50个抽屉内, 则必定有2个数在同一抽屉, 那么这两个数的差为50. 问题得证.

(3) 我们将1~100按2的倍数、3的奇数倍、既不是2又不是3的倍数的情况分组, 有(2, 4, 6, 8, ..., 98, 100), (3, 9, 15, 21, 27, ..., 93, 99), (5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., 95, 97)这三组. 第一、二、三组分别有50、17、33个元素.

最不利情况下, 51个数中有33个元素在第三组, 那么剩下的18个数分到第一、二两组内, 那么至少有9个数在同一组. 所以这9个数的最大公约数为2或3或它们的倍数, 显然大于1. 问题得证.

### [难度等级] ☆☆☆

8. 求证：可以找到一个各位数字都是4的自然数，它是1996的倍数。

[分析与解] 注意到  $1996 = 4 \times 499$ ;

对于  $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots1}_{440\text{个}1}$  中必定有两个数关于499同余。

于是  $\underbrace{111\dots1}_{m\text{个}1} = \underbrace{111\dots1}_{n\text{个}1} \pmod{499} (m > n)$ 。

有  $\underbrace{111\dots1}_{m\text{个}1} - \underbrace{111\dots1}_{n\text{个}1} = \underbrace{111\dots1000\dots0}_{m-n\text{个}1, n\text{个}0}$ ，所以  $499 \mid \underbrace{111\dots1000\dots0}_{m-n\text{个}1, n\text{个}0}$ ，因为  $(499, \underbrace{1000\dots0}_{n\text{个}0}) = 1$ ，所以  $499 \mid$

$\underbrace{111\dots1}_{m-n\text{个}1}$ ；于是有  $(499 \times 4) \mid (\underbrace{111\dots1}_{m-n\text{个}1} \times 4)$ ，即  $1996 \mid \underbrace{444\dots4}_{m-n\text{个}4}$ 。  
于是，就找到这样的全部都是4组成的数字，它是1996的倍数。

### [难度等级] ☆☆☆

9. 有49个小孩，每人胸前有一个号码，号码从1到49各不相同。现在请你挑选若干小孩，排成一个圆圈，使任何相邻两个小孩的号码数的乘积小于100。那么你最多能挑选出多少个孩子？

[分析与解] 将1至49中相乘小于100的两个数，按被乘数分成9组，如下：

$(1 \times 2), (1 \times 3), (1 \times 4), \dots, (1 \times 49)$ ;

$(2 \times 3), (2 \times 4), (2 \times 5), \dots, (2 \times 49)$ ;

$\dots \dots \dots$

$(8 \times 9), (8 \times 10), (8 \times 11), (8 \times 12)$ ;

$(9 \times 10), (9 \times 11)$ 。

因为每个数只能与左右两个数相乘，也就是每个数作为被乘数或乘数最多两次，所以每一组中最多会有两对数出现在圆圈中，最多可以取出18个数对，共  $18 \times 2 = 36$  次，但是每个数都出现两次，故出现了18个数。

例如： $(10 \times 9), (9 \times 11), (11 \times 8), (8 \times 12), (12 \times 7), (7 \times 13), (13 \times 6), (6 \times 14), (14 \times 5), (5 \times 15), (15 \times 4), (4 \times 16), (16 \times 3), (3 \times 17), (17 \times 2), (2 \times 18), (18 \times 1), (1 \times 10)$ 。共出现1~18号，共18个孩子。

若随意选取出19个孩子，那么共有19个号码，由于每个号码数要与旁边两数分别相乘，则会形成19个相乘的数对。

那么在9组中取出19个数时，有  $19 = 9 \times 2 + 1$ ，由抽屉原则知，必有三个数对落入同一组中，这样某个数字会在数对中出现三次(或三次以上)，由分析知，这是不允许的。故最多挑出18个孩子。

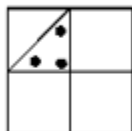
[难度等级]



10. 在边长为1的正方形内随意放进9个点, 证明其中必有3个点构成的三角形的面积不大于  $\frac{1}{8}$ .

**[分析与解]** 如下图, 把正方形分成四个形状相同、大小相等的正方形. 九个点任意放入这四个正方形中.

根据抽屉原理, 多于  $2 \times 4$  个点放入四个长方形中, 至少有  $2+1$  个点 (即三个点) 落在某一个正方形之内. 现在, 特别取出这个正方形来加以讨论.



把落在这正方形中的三点组成的三角形记为  $\triangle ABC$ , 其面积不超过小正方形面积的  $\frac{1}{2}$ , 所以其面积不超过  $\frac{1}{8}$ . 这样就得到了需要证明的结论.

[难度等级]



11. 某班有16名学生, 每个月教师把学生分成两个小组. 问最少要经过几个月, 才能使该班的任意两个学生总有某个月份是分在不同的小组里?

**[分析与解]** 经过第一个月, 将16个学生分成两组, 至少有8个学生分在同一组, 下面只考虑这8个学生.

经过第二个月, 将这8个学生分成两组, 至少有4个学生有分在同一组, 下面只考虑这4个学生.

经过第三个月, 将这4个学生分成两组, 至少有2个学生仍分在同一组, 这说明只经过3个月是无法满足题目要求的.

如果经过四个月, 每个月都将一直保持同组的学生一分为二, 放入两个组, 那么第一个月保持同组的人数为  $16 \div 2 = 8$  人, 第二个月保持同组的人数为  $8 \div 2 = 4$  人, 第三个月保持同组人数为  $4 \div 2 = 2$  人, 这说明, 照此分法, 不会有2个人一直保持同一组内, 即满足题目要求, 故最少要经过4个月.

[难度等级]



12. 上体育课时, 21名男、女学生排成3行7列的队形做操. 老师是否总能从队形中划出一个长方形, 使得站在这个长方形4个角上的学生或者都是男生, 或者都是女生? 如果能, 请说明理由; 如果不能, 请举出实例.

**[分析与解]** 因为只有男生或女生两种情况, 所以第1行的7个位置中至少有4个位置同性别.

为了确定起见, 不妨设前4个位置同是男生, 如果第二行的前4个位置有2名男生, 那么4个角同是男生的情况已经存在, 所以我们假定第二行的前4个位置中至少有3名女生, 不妨假定前3个是女生.

又第三行的前3个位置中至少有2个位置是同性别学生, 当是2名男生时与第一行构成一个四角同性别的矩形, 当有2名女生时与第二行构成四角同性别的矩形.

所以, 不论如何, 总能从队形中划出一个长方形, 使得站在这个长方形4个角上的学生同性别. 问题得证.

[难度等级]



13. 8个学生解8道题目.

(1) 若每道题至少被5人解出, 请说明可以找到两个学生, 每道题至少被这两个学生中的一个解出.

(2) 如果每道题只有4个学生解出, 那么(1)的结论一般不成立. 试构造一个例子说明这点.

**[分析与解]** (1) 先设每道题被一人解出称为一次, 那么8道题目至少共解出 $5 \times 8 = 40$ 次, 分到8个学生身上, 至少有一个学生解出了5次或5次以上题目, 即这个学生至少解出5道题, 称这个学生为A, 我们讨论以下4种可能:

**第一种可能:** 若A只解出5道题, 则另3道题应由其他7个人解出, 而3道题至少共被解出 $3 \times 5 = 15$ 次, 分到7个学生身上, 至少有一名同学解出了3次或3次以上的题目( $15 = 2 \times 7 + 1$ , 由抽屉原则便知)由于只有3道题那么这3道题被一名学生全部解出, 记这名同学为B.

那么, 每道题至少被A、B两名同学中某人解出.

**第二种可能:** 若A解出6道题, 则另2道题应由另7人解出, 而2道题至少共被解出 $2 \times 5 = 10$ 次, 分到7个同学身上, 至少有一名同学解出2次或2次以上的题目( $10 = 1 \times 7 + 3$ , 由抽屉原则便知). 同**第一种可能**中道理, 这两道题必被一名学生全部解出, 记这名同学为C.

那么, 每道题目至少被A、C学生中一人解出.

**第三种可能:** 若A解出7道题目, 则另一题必由另一人解出, 记此人为D. 那么, 每道题目至少被A、D两名学生中一人解出.

**第四种可能:** 若A解出8道题目, 则随意找一名学生, 记为E, 那么, 每道题目至少被A、E两名学生中一人解除出, 所以问题(1)得证.

(2) 类似问题(1)中的想法, 题目共被解出 $8 \times 4 = 32$ 次, 可以使每名学都解出4次, 那每人解出4道题.

随便找一名学生, 必有4道未被他解出, 这4道题共被7名同学解出 $4 \times 4 = 16$ 次, 由于 $16 = 2 \times 7 + 2$ , 可以使每名同学解出题目不超过3道, 这样就无法找到两名学生, 使每道题目至少被其中一人解出.

具体构造如下图, 其中汉字代表题号, 数字代表学生, 打√代表该位置对应的题目被该位置对应的学生解出.



	一	二	三	四	五	六	七	八
1	√	√	√	√				
2		√			√		√	√
3			√	√	√	√		
4		√			√		√	√
5	√					√	√	√
6			√	√	√	√		
7	√	√	√	√				
8	√					√	√	√

14. 时钟的表盘上按标准的方式标着1, 2, 3, ..., 11, 12这12个数, 在其上任意做 $n$ 个 $120^\circ$ 的扇形, 每一个都恰好覆盖4个数, 每两个覆盖的数不全相同. 如果从这任做的 $n$ 个扇形中总能恰好取出3个覆盖整个钟面的全部12个数, 求 $n$ 的最小值.

**[分析与解]** 如下图, 只要从某个数字对应的位置开始, 做出的 $120^\circ$ 扇形, 一定能覆盖4个数.



从最不利情况出发,  $n$ 个扇形中最大程度的重叠, 需做(12, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 7), (5, 6, 7, 8), (6, 7, 8, 9), (7, 8, 9, 10), (8, 9, 10, 11)这9个 $120^\circ$ 扇形才能将整个钟面覆盖. 从中可以挑出3个覆盖整个钟面全部12个数.

也就是说 $n$ 最小取9时, 才能保证题意的满足.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

15. 试卷上共有4道选择题, 每题有3个可供选择的答案. 一群学生参加考试, 结果是对于其中任何3人, 都有一个题目的答案互不相同. 问参加考试的学生最多有多少人?

**[分析与解]** 设总人数为 $A$ , 再由分析可设第一题筛选取出的人数为 $A_1$ , 第二题筛选的人数为 $A_2$ , 第三题筛选取出的人数为 $A_3$ , 第四道题筛选的人数为 $A_4$ .

如果不能满足题目要求, 则:

$A_4$ 至少是3, 即3个人只有两种答案.

由于 $A_4$ 是 $A_3$ 人做第四题后筛选取出的人数, 则由抽屉原则知(两种答案)中至少放有 $A_3 - \left\lfloor \frac{A_3}{3} \right\rfloor$ 个苹果(即 $A_4$ ).

$A_3 - \left\lfloor \frac{A_3}{3} \right\rfloor = A_4 = 3$ , 则 $A_3$ 至少为4, 即4人只有两种答案.

由于 $A_3$ 是 $A_2$ 人做第三题后筛选人数, 则同抽屉原则知, 将 $A_3$ 个苹果放入三个抽屉(三种答案), 那么必

然有两个抽屉(两种答案), 中至少放有 $A_2 - \left\lfloor \frac{A_2}{3} \right\rfloor$ 个苹果(即 $A_3$ ).

$A_2 - \left\lfloor \frac{A_2}{3} \right\rfloor = A_3 = 4$ , 则 $A_2$ 至少为5, 即5人只有两种答案.

同理, 有 $A_1 - \left\lfloor \frac{A_1}{3} \right\rfloor = A_2 = 5$ 则 $A_1$ 至少为7, 即做完第一道题必然有7个人只有两种答案; 则有 $A_0 - \left\lfloor \frac{A_0}{3} \right\rfloor$

$= A_1 = 7$ . 则 $A_0$ 至少为10, 即当有10人参加考试时无法满足题目的要求.

考虑9名学生参加考试, 令每人题情况如下即可(汉字表示题号, 数字表示学生):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
一	A	A	A	B	B	B	C	C	C
二	A	B	C	A	B	C	A	B	C
三	A	B	C	B	C	A	C	A	B
四	A	B	C	C	A	B	B	C	A

故参加考试的学生最多有9人.

## 10. 仁华思维导引解析 10讲: 逻辑推理之一

## 【内容概述】

各种通过枚举或列表分析法求解的逻辑推理问题。枚举即为逐个探讨各种假设的正确性，进而得出确切的信息；列表即将同一对象的两种不同表达方式分别用行与列标出，通过横向与纵向的不断比较得出结论。

## 【典型问题】

## 【难度等级】



1. 在三只盒子里，一只装有两个黑球，一只装有两个白球，还有一只装有黑球和白球各一个。现在三只盒子上的标签全贴错了，你能否仅从一只盒子里拿出一个球来，就确定这三只盒子里各装的是什么球？

## 【难度等级】



2. 甲、乙、丙、丁4位同学的运动衫上印有不同的号码。赵说：“甲是2号，乙是3号。”钱说：“丙是4号，乙是2号。”孙说：“丁是2号，丙是3号。”李说：“丁是1号，乙是3号。”又知道赵、钱、孙、李每人都只说对了一半。那么丙的号码是几号？

【分析与解】如下表，先假设赵的前半句话正确，判断一次；再假设赵的后半句正确，再判断一次。

矛盾											
赵说：甲是2号	✓	②	乙是3号	×	①	赵说：甲是2号	×	②	乙是3号	✓	①
钱说：丙是4号	×	④	乙是2号	✓	⑦	钱说：丙是4号	✓	③	乙是2号	×	②
孙说：丁是2号	×	④	丙是3号	✓	③	孙说：丁是2号	✓	③	丙是3号	×	④
钱说：丁是1号	✓	③	乙是3号	×	②	钱说：丁是1号	×	④	乙是3号	✓	⑦

即甲是1号，乙是3号，丙是4号，丁是2号。所以丙是4号。

### 【难度等级】☆☆☆

3. 某校数学竞赛, A, B, C, D, E, F, G, H这8位同学获得前8名. 老师让他们猜一下谁是第一名. A说: “或者F是第一名, 或者H是第一名.” B说: “我是第一名.” C说: “G是第一名.” D说: “B不是第一名.” E说: “A说得不对.” F说: “我不是第一名, H也不是第一名.” G说: “C不是第一名.” H说: “我同意A的意见.” 老师指出: 8个人中有3人猜对了. 那么第一名是谁?

【分析与解】我们抓住谁是第一名这点, 一一尝试,

如果A是第一名, 那么D、E、F、G这4人都猜对了, 不满足;

如果B是第一名, 那么B、E、F、G这4人都猜对了, 不满足;

**如果C是第一名, 那么D、E、F这3人都猜对了, 满足;**

如果D是第一名, 那么D、E、F、G这4人都猜对了, 不满足;

如果E是第一名, 那么D、E、F、G这4人都猜对了, 不满足;

如果F是第一名, 那么A、D、G、H这4人都猜对了, 不满足;

如果G是第一名, 那么C、D、E、F、G这5人都猜对了, 不满足;

如果H是第一名, 那么A、D、G、H这4人都猜对了, 不满足.

所以, 第一名是C.

### 【难度等级】☆☆

4. 某参观团根据下列条件从A, B, C, D, E这5个地方中选定参观地点: ①若去A地, 则也必须去B地; ②B, C两地中至多去一地; ③D, E两地中至少去一地; ④C, D两地都去或者都不去; ⑤若去E地, 一定要去A, D两地. 那么参观团所去的地点是哪些?

【分析与解】假设参观团去了A地, 由①知一定去了B地, 由②知没去C地, 由④知没去D地, 由③知去了E地, 由⑤知去了A, D两地, 矛盾.

所以开始的假设不正确, 那么参观团没有去A地, 由①知也没去了B地, 由②知去了C地, 由④知去了D地, 因为A, D两地没有都去, 所以由⑤知去了没去E地.

即参观团去了C, D两地.

### [难度等级] ☆ ☆

5. 人的血型通常分为A型、B型、O型、AB型。子女的血型与其父母间的关系如图10-1所示。现有3个分别身穿红、黄、蓝上衣的孩子，他们的血型依次为O, A, B。每个孩子的父母都戴着同颜色的帽子，颜色也分红、黄、蓝3种，依次表示所具有的血型为AB, A, O。问：穿红、黄、蓝上衣的孩子的父母各戴什么颜色的帽子？

父母的血型	子女可能的血型
O, O	O
O, A	A, O
O, B	B, O
O, AB	A, B
A, A	A, O
A, B	A, B, AB, O
A, AB	A, B, AB
B, B	B, O
B, AB	A, B, AB
AB, AB	A, B, AB

图 10-1

**[分析与解]** 孩子是O型血的父母只能均是O型或A型血，孩子是A型血的父母只能均是A型或AB型血，孩子是B型血的父母只能均是B型或AB型血。

因为现在这些孩子的父母中没有人是B型血，所以孩子是B型血的父母均是AB型血，孩子是A型血的父母只能均是A型血，孩子是O型血的父母只能均是O型血。

即穿红、黄、蓝上衣的孩子父母对应的均是O、A、AB型血，对应戴蓝、黄、红颜色帽子。

### [难度等级] ☆ ☆

6. 如图10-2，有一座4层楼房，每个窗户的4块玻璃分别涂上黑色和白色，每个窗户代表一个数字。每层楼有3个窗户，由左向右表示一个三位数。4个楼层表示的三位数为：791，275，362，612。问：第二层楼表示哪个三位数？

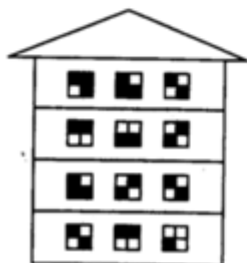








图 10-2

**【分析与解】** 因为275、362、612均有数字2，且362、612的个位相同，所以有某两层楼的最右边的窗户涂色情况相同，有4、2层楼最右的窗户涂色情况相同。

所以  表示2，有第1层的最左边一个窗户也是如此涂色，所以第一层楼表示的数字为275，所以  表示7， 表示5。

而第三层的最左边的窗户也是  涂色，所以第三层表示的数为791，所以  表示9， 表示1。

第2层的中间一个窗户也是  涂色，即中间数为1，所以第二层代表612。

有四层对应的四个三位数为：

	3	6	2
	7	9	1
	6	1	2
	2	7	5

**【难度等级】** ☆ ☆ ☆

7. 房间里有12个人，其中有些人总说假话，其余的人总说真话。其中一个人说：“这里没有一个老实人。”第二个人说：“这里至多有一个老实人。”第三个人说：“这里至多有两个老实人。”如此往下，至第十二个人说：“这里至多有11个老实人。”问房间里究竟有多少个老实人？

**【分析与解】** 方法一：假设这房间里没有老实人，那么第1个人的话正确，说正确话的人应该是老实人，矛盾；

假设这房间里只有1个老实人，那么第2~12个人的话都正确，那么应该有11个老实人，矛盾；

假设这房间里只有2个老实人，那么第3~12个人的话都正确，那么应该有10个老实人，矛盾；

假设这房间里只有3个老实人，那么第4~12个人的话都正确，那么应该有9个老实人，矛盾；

假设这房间里只有4个老实人，那么第5~12个人的话都正确，那么应该有8个老实人，矛盾；

假设这房间里只有5个老实人，那么第6~12个人的话都正确，那么应该有7个老实人，矛盾；

假设这房间里只有6个老实人，那么第7~12个人的话都正确，那么应该有6个老实人，满足；

.....

以下假设有7~12个老实人，均矛盾，所以这个房间里只有6个老实人。

方法二：如果一共有 $n$ 个老实人，则说“至多0个老实人”、“至多1个老实人”……“至多 $n-1$ 个老实人”的都是骗子；

说“至多 $n$ 个老实人”、“至多 $n+1$ 个老实人”……“至多11个老实人”的都是老实人，共有 $n$ 个老实人、 $n$ 个骗子，而一共12个人，所以 $n=6$ 。

综上所述，一共6个老实人。

### [难度等级] ☆ ☆

8. 甲、乙、丙、丁约定上午10时在公园门口集合。见面后，

甲说：“我提前了6分钟，乙是正点到的。”

乙说：“我提前了4分钟，丙比我晚到2分钟。”

丙说：“我提前了3分钟，丁提前了2分钟。”

丁说：“我还以为我迟到了1分钟呢，其实我到后1分钟才听到收音机报北京时间10时整。”

请根据以上谈话分析，这4个人中，谁的表最快，快多少分钟？

[分析与解] 方法一：注意到丁有标准时间依据，从丁开始推算，有各自到达公园的时间为：

丁	9:59	乙	9:56
丙	9:58	甲	9:50

甲说：提前了6分钟，实际上甲提前了10分钟，所以甲表快了4分钟，验证为甲的表的最快。

方法二：丁表快2分钟，丁实际上提前了1分钟到达；

再依据丙的话，丙表慢1分钟，丙实际提前2分钟到达；

再依据乙的话，乙表准时，乙实际提前4分钟到达；

再依据甲的话，甲表快4分钟，甲提前了10分钟。

于是，甲的表最快，快4分钟。

### [难度等级] ☆ ☆ ☆ ☆

9. 桌子上放了8张扑克牌，都背面向上，牌放置的位置如图10-3所示。现在知道：①每张牌都是A，K，Q，J中的某一张；②这8张牌中至少有一张是Q；③其中只有一张A；④所有的Q都夹在两张K之间；⑤至少有一张K夹在两张J之间；⑥至少有两张K相邻；⑦J与Q互不相邻，A与K也互不相邻。试确定这8张牌各是什么？

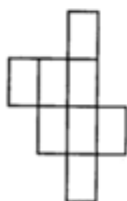
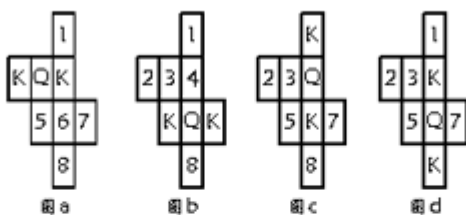


图 10-3

[分析与解] 为了方便说明我们将8张牌标上数字，如下图所示，



由于至少有一个Q，其两边为K，则这样的KQK在图中的位置只能为下图的a、b、c、d的4种，另一方面，条件⑤告诉我们还有JKJ的存在，因此可以将KQK与JKJ的位置结合起来考虑：



对于上图a，JKJ只能在146，或567，若JKJ在146，则无法有两个K相连，与条件⑥矛盾；若JKJ在567，则在5的J与Q相连，与条件⑦矛盾。

对于上图b，JKJ只能为234则在4的J与Q相连，与条件⑦矛盾。

对于上图c，JKJ只能为567，再考虑A，由条件⑦，A不能在8，只能在2或3，为使两个K相连，则8为K，由条件④知，2与3中不能有Q，再由条件⑦，知2是J，3是A，此为正确答案。

对于上图d，无法填入JKJ，与条件⑤矛盾。

综上所述，本题有唯一的答案，如下图。



**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

10. 甲、乙、丙、丁4个同学同在一间教室里，他们当中一个人在做数学题，一个人在念英语，一个人在看小说，一个人在写信。已知：

- ①甲不在念英语，也不在看小说；
- ②如果甲不在做数学题，那么丁不在念英语；
- ③有人说乙在做数学题，或在念英语，但事实并非如此；
- ④丁如果不在做数学题，那么一定在看小说，这种说法是不对的；
- ⑤丙既不是在看小说，也不在念英语。

那么在写信的是谁？

**[分析与解]** 我们将①、③、⑤的条件反应在下图中。图中“√”表示对应列的人在做对应行的事，“×”表示对应列的人不在做对应行的事。



	甲	乙	丙	丁
做数学题		×		
念英语	×	×	×	
看小说	×		×	
写信				

	甲	乙	丙	丁
做数学题	√	×		
念英语	×	×	×	√
看小说	×	√	×	
写信			√	

显然只能是丁在念英语，由②知甲在做数学题，那么丙只能在写信，进一步可以得到如上右表。

11. 在国际饭店的宴会桌旁，甲、乙、丙、丁4位朋友进行有趣的交谈，他们分别用了汉语、英语、法语、日语4种语言，并且还知道：

- ①甲、乙、丙各会两种语言，丁只会一种语言；
- ②有一种语言4人中有3人都会；
- ③甲会日语，丁不会日语，乙不会英语；
- ④甲与丙、丙与丁不能直接交谈，乙与丙可以直接交谈；
- ⑤没有人既会日语，又会法语。

请根据上面的情况，判断他们各会什么语言？

**[分析与解]** 由条件③，④知丙不会日语，⑤知甲不会法语。如下表，×表示不会这门语言，√表示会这门语言。

【分析与解】 由条件③，④知丙不会日语，⑤知甲不会法语。如下表，×表示不会这门语言，√表示会这门语言。

	汉	英	法	日
甲			×	√
乙		×		
丙				×
丁				×

由丙会不会作为突破口：

**第一种情况** 如果丙会汉语，那么由④“甲与丙不能直接交谈”知甲不会汉语，由①知甲会英语。

那么丙不会英语，会法语。如下左表。

	汉	英	法	日
甲	×	√	×	√
乙		×		
丙	√	×	√	×
丁				×

	汉	英	法	日
甲	×	√	×	√
乙		×		
丙	√	×	√	×
丁	×	√	×	×

由④“丙不能与丁直接交谈”，所以丁不会汉语也不会法语，那么丁会英语。由上右表知，这样就有一种语言 3 人都会与②矛盾，所以开始的假设不正确。

**第二种情况** 丙不会汉语，由①知丙会英语、法语。由④“甲与丙不能直接交谈”，所以甲不会英语。

由①知甲会汉语。

由④“丙与丁不能直接交谈”，所以丁不会英语，也不会法语。由①知丁会汉语，由下左表与②知只能是汉语三者都会。

	汉	英	法	日
甲	√	×	×	√
乙		×		
丙	×	√	√	×
丁		×	×	×

	汉	英	法	日
甲	√	×	×	√
乙	√	×	√	×
丙	×	√	√	×
丁	√	×	×	×

所以乙会汉语，因为④，乙与丙能直接交谈，所以乙会法语。由①知乙不会日语。最终情况如上右表。

### [难度等级] ☆☆☆

12. 甲、乙、丙3个学生分别戴着3种不同颜色的帽子，穿着3种不同颜色的衣服去参加一次申办奥运的活动。已知：

①帽子和衣服的颜色都只有红、黄、蓝3种；

②甲没戴红帽子，乙没戴黄帽子；

③戴红帽子的学生没有穿蓝衣服；

④戴黄帽子的学生穿着红衣服；

⑤乙没有穿黄色衣服。

试问：甲、乙、丙3人各戴什么颜色的帽子，穿什么颜色的衣服？

**[分析与解]** 如图所示，其中实线表示两端需同时成立，虚线表示两端不能同时成立。



因为戴黄帽子的穿红衣服，而戴红帽子的又不穿蓝衣服，所以对戴红帽子的人而言只能穿黄衣服，所以戴蓝帽子的之只能穿蓝衣服。

乙不穿黄衣服，又不带黄帽子→穿红衣服，所以乙只能穿蓝衣服，即乙—蓝帽子—蓝衣服，

甲不戴红帽子，而乙戴蓝帽子，所以甲戴黄帽子，即甲—黄帽子—红衣服，

所以丙—红帽子—黄衣服。

即甲戴黄帽子，穿红衣服；乙戴蓝帽子，穿蓝衣服；丙戴红帽子，穿黄衣服。

### [难度等级] ☆☆☆

13. 甲、乙、丙、丁、戊5人各从图书馆借来一本小说，他们约定读完后互相交换，这5本书的厚度以及他们5人的阅读速度都差不多，因此总是5人同时交换书。经过数次交换后，他们5人每人都读完了这5本书。现已知：

①甲最后读的书是乙读的第二本；

②丙最后读的书是乙读的第四本；

③丙读的第二本书甲在最初就读了；

④丁最后读的书是丙读的第三本；

⑤乙读的第四本是戊读的第三本；

⑥丁第三次读的书是丙最初读的那本。

设甲、乙、丙、丁、戊5个人最后读的书分别为A，B，C，D，E，根据以上情况确定他们5人读的第四本书各是什么书？

**[分析与解]** 由①知乙读的第二本书是A，由②知乙读的四本书是C，由④知丙读的第三本书是D，由⑤知戊读的第二本书是C。如下左图。

	甲	乙	丙	丁	戊
第一本					
第二本		A			
第三本			D		C
第四本		C			
最后一本	A	B	C	D	E

	甲	乙	丙	丁	戊
第一本		D			
第二本		A			
第三本		E	D		C
第四本		C			
最后一本	A	B	C	D	E

乙读的第三本书是 D 或 E，但是丙读的第三本书是 D，而一本书不能同时被二人阅读，所以乙读的第三本书是 E，那么乙读的第一本书为 D。如上右表。

丁读的第三本书只能是 A 或 B，而由⑥知丙读的第一本书是 A 或 B。

如果丁读的第三本书是 B，那么丙读的第一本书是 B，那么丙的第二本书只能是 E。由下左表知，这样甲的第三本书只能是 A，与其最后读的一本书是 A 矛盾，所以开始的假设不正确，即丁读的第三本书是 A。

	甲	乙	丙	丁	戊
第一本		D	B		
第二本		A			
第三本		E	D	B	C
第四本		C			
最后一本	A	B	C	D	E

	甲	乙	丙	丁	戊
第一本	E	D	A		
第二本		A	E		
第三本	B	E	D	A	C
第四本		C			
最后一本	A	B	C	D	E

由⑥知丙读的第一本书也是 A，则甲读的第三本书只能是 B，由③知丙读的第二本书只能是 B 或 E，而甲读的第一本书与丙读的第二本书一样，但不能是 A、B，所以丙读的第二本书、甲读的第一本书均是 E。如上右表，这样我们将题中所给的 6 个条件均全部用完。

那么丙读的第四本书是 B，丁读的第四本书是 E，所以甲读的第四本书是 D，则戊读的第四本书是 A，如下左表所示。（反复利用某个位置的字母与其同一行、同一列的字母全部都不相同）

	甲	乙	丙	丁	戊
第一本	E	D	A		
第二本		A	E		
第三本	B	E	D	A	C
第四本	D	C	B	E	A
最后一本	A	B	C	D	E

	甲	乙	丙	丁	戊
第一本	E	D	A	C	B
第二本	C	A	E	B	D
第三本	B	E	D	A	C
第四本	D	C	B	E	A
最后一本	A	B	C	D	E

进一步的利用某个位置的字母与其同一行、同一列的字母全部都不相同可以将所有的情况列出，如上右表。

那么，显然甲、乙、丙、丁、戊读的第四本书依次是 D、C、B、E、A。

# [难度等级] ☆☆☆

14. 如图 10-4, 这是一个挖地雷的游戏, 在 64 个方格中一共有 10 个地雷, 每个方格中至多有一个地雷. 对于写有数字的方格, 其格中无地雷. 但与其相邻(由公共边或公共顶点)的格中有可能有地雷, 地雷的个数与该数字相等. 请你指出哪些方格中有地雷.

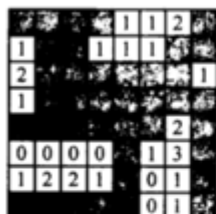
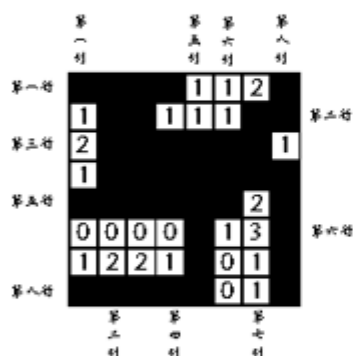
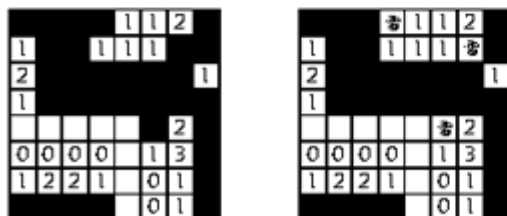


图 10-4

[分析与解] 如下图, 我们利用数组将未知区域编号, 如第三行第二列称为(3, 2)



①. 我们通过第六行的 4 个“0”, 第 6 列的 2 个“0”, 所以这 6 个方格的附近区域都没有地雷. 如下左图:



②. 因为(2, 5), (1, 6), (6, 6)这 3 个位置的附近均只有一个地雷, 而这 3 个位置又各只有一个附近位置可能存在地雷, 所以这 3 个位置的附近未知的位置一定有地雷, 如上右图.

③. 而(1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 8)这些位置的附近只有一个地雷, 并且这个地雷已经确定, 所以它们的附近位置不再有多地雷, 如下左图所示.

1				1	1	2	
2				1	1	1	
1							1
0	0	0	0		1	3	
1	2	2	1		0	1	
					0	1	

				1	1	2	
1				1	1	1	
2							1
1							
0	0	0	0		1	3	
1	2	2	1		0	1	
					0	1	

④. (1, 7)这个方格的附近有2个地雷, 其中一个地雷已知, 所以还有1个地雷在其附近, 但是其附近只有(1, 8)这个位置有可能, 所以(1, 8)格有地雷, 如上右图所示.

⑤. 注意到(4, 1)格附近只有1格地雷, 而只用(3, 2), (4, 2)两个位置中的其中之一有可能, 如果是(4, 2)格有地雷, 那么(3, 2)格就没有地雷. 而(3, 1)格附近必须有2个地雷, 现在只有(4, 2)格有地雷, 所以剩下的唯一有可能存在地雷的(2, 2)格一定有地雷, 这样就满足了(2, 1)格附近只用一个地雷, 所以(2, 1)格附近的其他格内就没有地雷, 即(1, 1), (1, 2)格没有地雷, 如下左图所示.

如果开始假设是(3, 2)格有地雷, 可推至矛盾.

1				1	1	2	
2							1
1							
0	0	0	0		1	3	
1	2	2	1		0	1	
					0	1	

1				1	1	2	
2							1
1							
0	0	0	0		1	3	
1	2	2	1		0	1	
					0	1	

⑥. 再看(7, 1)格, 其附近只有1个地雷, 而(8, 1), (8, 2)两个位置有可能, 假设(8, 1)格有地雷, 那么(8, 2)格无地雷, 再根据(7, 2)格附近有2个地雷的条件知(8, 3), (8, 4)格均有地雷, 这样(7, 4)格的附近有2个地雷, 矛盾, 所以开始的假设错误.

即(8, 2)格有地雷, (8, 1)格无地雷, (8, 3)格有地雷, (8, 4)格无地雷, 如上右图所示.

⑦. 接着看(8, 7)格, 其附近只有1个地雷, 而(8, 8), (7, 8)两个位置有可能, 假设(8, 8)格有地雷, 那么(7, 8)格无地雷. 又因为(7, 7)格附近只有一个地雷, 所以(6, 8)格没有地雷, 又因为(6, 7)格附近有3个地雷, 现在只有(5, 6)格有地雷, 那么其附近剩下的两个位置(5, 8), (6, 8)格均有地雷, 但是这样(5, 7)格附近就有3个地雷, 与条件矛盾, 所以开始的假设错误.

那么只能是(7, 8)格有地雷, (8, 8)格无地雷, 因为(7, 7)格附近不再有地雷, 所以(6, 8)格也无地雷, 又(5, 7)格附近要求有2个地雷, 现在只有1个地雷, 所以剩下的唯一附近位置(5, 8)格有地雷, 这样也满足(6, 7)格附近有3格地雷, 如下左图所示.

1				1	1	2	
2							1
1							
0	0	0	0		1	3	
1	2	2	1		0	1	
					0	1	


⑧. 这样10个地雷均找到, 所以剩下的位置均不再有多地雷, 最终地雷分布情况如上右图.

**[难度等级]**

15. 5位学生A, B, C, D, E参加一场比赛. 某人预测比赛结果的顺序是ABCDE, 结果没有猜对任何一个名次, 也没有猜中任何一对相邻的名次(意即某两个人实际上名次相邻, 而在此人的猜测中名次也相邻, 且先后顺序相同); 另一个人预测比赛结果为DAECB, 结果猜对了两个名次, 同时还猜中了两对相邻的名次. 求这次比赛的结果.

**[分析与解]** 猜中两对相邻的名次, 可以有两种情况: 一种是3个相连字母的相对位置正确; 另一种是两对即4个字母各自相对位置正确.

**第一种情况:** 3个相连字母相对位置正确.

这时, 如果这3个字母中有一个字母本身的位置正确, 则这3个字母的位置就都正确, 但这与DAECB中只有两个字母位置正确矛盾, 所以5个字母中, 位置正确的只能为3个字母之外的两个字母, 由于这3个字母相连, 则位置正确的字母只能为D、A或D、B, 但无论哪一种情况, 剩下三个字母相连的位置确定不变, 得到的结果均仍为DAECB, 这显然是不符合条件.

**第二种情况:** 两对4个字母是相邻正确的,

这时, 因5个字母中一共有2个字母的位置是正确的, 所以在这4个字母中一定有一个字母位置正确, 那么和它相邻位置正确的字母本身位置也正确, 并且一共有这样相邻一对字母的位置与实际位置相同, 则这对字母有4种可能:

①正确顺序为DA□□□:

此时, 符合DAECB所满足条件的顺序有2组, 分别是DACBE、DABEC为正确答案, 若DACBE正确, 则C为第3个, 不符合ABCDE所满足的条件; 若DABEC为正确答案, 则AB相邻, 也不符合ABCDE, 所满足条件, 这样, DA□□□不可能为正确名次.

②正确顺序为□AE□□:

这时, 因另有两个字母的位置是相邻正确的, 则只能为CB, 可这样推出的实际顺序只能还是DAECB, 显然不符合题目条件, 这样□AE□□不可能为正确名次.

③正确顺序为□□EC□:

此时的情况和□AE□□类似, 也不可能为正确名次.

④正确顺序为□□□CB:

此时, 符合DAECB所满足条件的顺序有两组, 分别是AEDCB、EDACB; 若AEDCB为正确答案, AEDCE中A的位置正确, 不符合条件, 经验证, EDACB为正确答案.

这样, 就得到了正确答案: EDACB.

## 11. 仁华思维导引解析 1 1 讲: 估算与比较、通分与裂项

## 【内容概述】

求近似值或整数部分等需要进行估算的计算题, 估算的关键在于确定已知数据具有恰当精度的近似值. 与分数和小数比较有关的问题, 用通分后再约分, 或者裂项后再相消的方法解的长分式计算题.

## 【典型问题】

## 【难度等级】



1. 除式  $12345678910111213 \div 31211101987654321$  计算结果的小数点后前三位数字是多少?

**【分析与解】** 对于除法算式, 我们将被除数和除数同时扩大或缩小若干倍, 所得的商不变, 所以可以将被除数和除数的小数点同时向左移动若干位, 所得的商不变.

因为要求计算小数点后前三位数字, 所以只用保留小数点后四位数字即可.

$$\begin{aligned} & 12345678910111213 \div 31211101987654321 \\ &= 1234.5678910111213 \div 3121.1101987654321 \\ &\approx 1235 \div 3121 \\ &\approx 0.3957 \end{aligned}$$

所以, 原除式所得结果的小数点后前三位数字是 395.

## 【难度等级】



2. 计算下式的值, 其中小数部分四舍五入, 答案仅保留整数:

$$33.333^2 - 3.1415926 \div 0.618.$$

**【分析与解】**  $33.333^2 \approx \left(\frac{100}{3}\right)^2 = \frac{10000}{9} \approx 1111.1$ ;  $3.1415926 \div 0.618 \approx 3.14 \div 0.62 \approx 5.1$ .

所以  $33.333^2 - 3.1415926 \div 0.618 \approx 1111.1 - 5.1 = 1106$ .  
即原式的运算结果的整数部分为 1106.



**【难度等级】** ☆

3. 在  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$  中选出若干个使它们的和大于 3，最少要选多少个数？

**【分析与解】** 为了使选出的数最少，那么必须尽可能选择较大的数。

有  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$  依次减小，所以我们选择时应从左至右的选择。

$$\text{有 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \approx 2.925,$$

$$\text{而 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \approx 3.015.$$

所以最少选择 11 个即可使它们的和大于 3。

**【难度等级】** ☆ ☆

4. 数  $\frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19}}$  的整数部分是几？

**【分析与解】** 我们可以先算出这 10 个分数的值  $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19}$ ，然后用所得的结果去除 1，所得的商的整数部分即为所求。

现在问题在于如何在我们所需的精度内简单的求出  $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19}$  的值。

$$\text{因为 } \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19} < \underbrace{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10}}_{10 \text{ 个分数}} = 1;$$

$$\text{而 } \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19} > \underbrace{\frac{1}{19} + \frac{1}{19} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{19}}_{10 \text{ 个分数}} = \frac{10}{19};$$

即  $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19}$  的值在  $\frac{10}{19} \sim 1$ ，那么它的倒数在  $1 \sim \frac{19}{10}$  之间，显然所求的数的整数部分为 1。

## [难度等级] ☆ ☆

5.  $8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22$  的整数部分是多少?

**[分析与解]**  $8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22 \approx 3 \times 8.0 \times 1.2 = 28.8$ , 与 29 很接近, 所以我们需要进一步的提高近似计算的精度.

$(8.01, 1.24)$ ,  $(8.02, 1.23)$ ,  $(8.03, 1.22)$  这三组数的和相等, 当每组内的两个数越接近它们的积越大, 所以  $8.01 \times 1.24$  在三组数中乘积最大,  $8.03 \times 1.22$  在三组数中乘积最小.

所以  $8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22 < 3 \times 8.01 \times 1.24 < 3 \times 8.00 \times 1.25 = 30$ ;

$8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22 > 3 \times 8.03 \times 1.22 = 29.3898$ .

显然  $8.01 \times 1.24 + 8.02 \times 1.23 + 8.03 \times 1.22$  的整数部分是 29.

## [难度等级] ☆ ☆

6. (1) 如果  $A = \frac{111111110}{222222221}$ ,  $B = \frac{444444443}{888888887}$ , 那么 A 与 B 中较大的数是哪一个?

(2) 请把  $\frac{656}{657}$ ,  $\frac{52}{53}$ ,  $\frac{2679}{2680}$ ,  $\frac{8}{9}$  这 4 个数从大到小排列.

**[分析与解]** (1)  $\frac{1}{2} - A = \frac{1}{2} - \frac{111111110}{222222221} = \frac{0.5}{222222221}$ ,

$\frac{1}{2} - B = \frac{1}{2} - \frac{444444443}{888888887} = \frac{0.5}{888888887}$ , 有  $\frac{0.5}{222222221} > \frac{0.5}{888888887}$ ,

即  $\frac{1}{2} - A > \frac{1}{2} - B$ , 所以  $A < B$ .

即 A 与 B 中较大的数是 B.

(2) 将 1 与这四个分数依次做差, 得  $\frac{1}{657}$ ,  $\frac{1}{53}$ ,  $\frac{1}{2680}$ ,  $\frac{1}{9}$ , 显然有  $\frac{1}{2680} < \frac{1}{657} < \frac{1}{53} < \frac{1}{9}$ , 被减数相

同, 差小的数反而大, 所以  $\frac{2679}{2680} > \frac{656}{657} > \frac{52}{53} > \frac{8}{9}$ .

【难度等级】



$$7. \quad \frac{24}{31} < \frac{80}{\square} < \frac{7}{9}$$

在上式的方框内填入一个整数，使两端的不等号成立，那么要填的整数是多少？

【分析与解】将不等式中的三个数同时除以80，不等号的方向不改变，有  $\frac{3}{310} < \frac{1}{\square} < \frac{7}{720}$ ，而  $\frac{3}{310}$ 、

$\frac{7}{720}$  的倒数分别为  $\frac{310}{3}$ 、 $\frac{720}{7}$ ，而  $\square$  应该在  $\frac{310}{3} \sim \frac{720}{7}$  之间，即在 103.33~102.86 之间(在计算循环小数时，将其小数点后保留2位数字)，其中的整数只有103，所以  $\square$  内所填的整数为103.

【难度等级】



8. 有8个数， $0.\dot{5}\dot{1}$ ， $\frac{2}{3}$ ， $\frac{5}{9}$ ， $0.5\dot{1}$ ， $\frac{24}{47}$ ， $\frac{13}{25}$  是其中6个，如果按从小到大的顺序排列时，第4个数是  $0.5\dot{1}$ ，那么按从大到小排列时，第4个数是哪一个数？

【分析与解】  $\frac{2}{3} = 0.\dot{6}$ ， $\frac{5}{9} = 0.\dot{5}$ ， $\frac{24}{47} \approx 0.5106$ ， $\frac{13}{25} = 0.52$ ，

显然有  $0.5106 < 0.5\dot{1} < 0.\dot{5}\dot{1} < 0.52 < 0.\dot{5} < 0.\dot{6}$ ，即  $\frac{24}{47} < 0.5\dot{1} < 0.\dot{5}\dot{1} < \frac{13}{25} < \frac{5}{9} < \frac{2}{3}$ ，8个数从小到

大排列第4个是  $0.5\dot{1}$ ，所以有  $\square < \square < \frac{24}{47} < 0.5\dot{1} < 0.\dot{5}\dot{1} < \frac{13}{25} < \frac{5}{9} < \frac{2}{3}$ . (“ $\square$ ”表示未知的那2个数)

所以，这8个数从大到小排列第4个数是  $0.\dot{5}\dot{1}$ .

[难度等级] ☆ ☆

9. 在下面9个算式中:

$$\textcircled{1} \frac{3}{5} + \frac{5}{20}, \textcircled{2} \frac{3}{6} + \frac{6}{20}, \textcircled{3} \frac{3}{7} + \frac{7}{20}, \textcircled{4} \frac{3}{8} + \frac{8}{20}, \textcircled{5} \frac{3}{9} + \frac{9}{20}, \textcircled{6} \frac{3}{10} + \frac{10}{20}, \textcircled{7} \frac{3}{11} + \frac{11}{20}, \textcircled{8} \frac{3}{12} + \frac{12}{20},$$

$$\textcircled{9} \frac{3}{13} + \frac{13}{20},$$

第几个算式的答数最小, 这个答数是多少?

[分析与解] 方法一:

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} = \left( \frac{3}{5} + \frac{5}{20} \right) - \left( \frac{3}{6} + \frac{6}{20} \right) = \frac{3}{5 \times 6} - \frac{1}{20} > 0, \text{ 即 } \textcircled{1} > \textcircled{2};$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} = \left( \frac{3}{6} + \frac{6}{20} \right) - \left( \frac{3}{7} + \frac{7}{20} \right) = \frac{3}{6 \times 7} - \frac{1}{20} > 0, \text{ 即 } \textcircled{2} > \textcircled{3};$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} = \left( \frac{3}{7} + \frac{7}{20} \right) - \left( \frac{3}{8} + \frac{8}{20} \right) = \frac{3}{7 \times 8} - \frac{1}{20} > 0, \text{ 即 } \textcircled{3} > \textcircled{4};$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{5} = \left( \frac{3}{8} + \frac{8}{20} \right) - \left( \frac{3}{9} + \frac{9}{20} \right) = \frac{3}{8 \times 9} - \frac{1}{20} < 0, \text{ 即 } \textcircled{4} < \textcircled{5};$$

$$\textcircled{5} - \textcircled{6}, \textcircled{6} - \textcircled{7}, \textcircled{7} - \textcircled{8}, \textcircled{8} - \textcircled{9} \text{ 所得的差依次为 } \frac{3}{10 \times 11} - \frac{1}{20}, \frac{3}{11 \times 12} - \frac{1}{20}, \frac{3}{11 \times 12} - \frac{1}{20} \text{ 均小于}$$

0, 所以  $\textcircled{5} < \textcircled{6}$ ,  $\textcircled{6} < \textcircled{7}$ ,  $\textcircled{7} < \textcircled{8}$ ,  $\textcircled{8} < \textcircled{9}$ , 那么这些算式中最小的为  $\textcircled{4}$ , 有  $\textcircled{4}$  为  $\frac{3}{8} + \frac{8}{20} = \frac{31}{40}$ .

方法二: 注意到每组内两个分数的乘积相等, 均为  $\frac{3}{20}$ .

因为当两个数的乘积相等时, 这两个数越接近, 和越小. 其中第4个算式中  $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{8}{20}$  最接近, 所以第4个算式最小.

【难度等级】☆☆☆

10. 下面的4个算式中, 哪个式子的得数最大?

①  $\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) \times 20$ , ②  $\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{29}\right) \times 30$ , ③  $\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{37}\right) \times 40$ ; ④  $\left(\frac{1}{41} + \frac{1}{47}\right) \times 50$ .

【分析与解】

$$\textcircled{1} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) \times 20 = 2 + \frac{3}{17} + \frac{1}{19},$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{29}\right) \times 30 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{29},$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{37}\right) \times 40 = 2 + \frac{9}{31} + \frac{3}{37},$$

$$\textcircled{4} \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{47}\right) \times 50 = 2 + \frac{9}{41} + \frac{3}{47}.$$

于是只用比较  $\frac{3}{17} + \frac{1}{19}$ ,

$\frac{1}{4} + \frac{1}{29}$ ,  $\frac{9}{31} + \frac{3}{37}$ ,  $\frac{9}{41} + \frac{3}{47}$  的大小.

$$\textcircled{1} \frac{3}{17} + \frac{1}{19} = \frac{9}{51} + \frac{3}{57},$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{29} = \frac{9}{36} + \frac{3}{87},$$

$$\textcircled{3} \frac{9}{31} + \frac{3}{37} = \frac{9}{31} + \frac{3}{37},$$

$$\textcircled{4} \frac{9}{41} + \frac{3}{47} = \frac{9}{41} + \frac{3}{47}.$$

因为  $\frac{9}{31} > \frac{9}{51}$ ,  $\frac{3}{37} > \frac{3}{57}$ , 所以  $\frac{9}{31} + \frac{3}{37} > \frac{9}{51} + \frac{3}{57}$ , 即③>①,

因为  $\frac{9}{31} > \frac{9}{36}$ ,  $\frac{3}{37} > \frac{3}{87}$ , 所以  $\frac{9}{31} + \frac{3}{37} > \frac{9}{36} + \frac{3}{87}$ , 即③>②,

因为  $\frac{9}{31} > \frac{9}{41}$ ,  $\frac{3}{37} > \frac{3}{47}$ , 所以  $\frac{9}{31} + \frac{3}{37} > \frac{9}{41} + \frac{3}{47}$ , 即③>④.

所以4个算式中, ③最大.



**[难度等级]** ☆ ☆

12. 计算:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{99}\right) \times \left(1 - \frac{1}{99}\right).$$

**[分析与解]**  $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{99}\right) \times \left(1 - \frac{1}{99}\right)$

$$= \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{99}\right) \right] \times \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{99}\right) \right]$$

$$= \left( \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{100}{99} \right) \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{98}{99} \right)$$

$$= \frac{100}{2} \times \frac{1}{99}$$

$$= \frac{50}{99}.$$

**[难度等级]** ☆ ☆

13. 计算:  $1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+15\frac{1}{72}+17\frac{1}{90}$ .

**[分析与解]**  $1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+15\frac{1}{72}+17\frac{1}{90}$

$$= (1+3+5+7+9+11+13+15+17) + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} \right)$$

$$= \frac{(1+17) \times 9}{2} + \left( \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} \right)$$

$$= 81 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) +$$

$$+ \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right)$$

$$= 81 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right)$$

$$= 81\frac{2}{5}.$$

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

14. 计算:  $\left( \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168} + \frac{1}{224} \right) \times 64$ .

**[分析与解]**  $\left( \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168} + \frac{1}{224} \right) \times 64$

$$= \left( \frac{1}{1 \times 8} + \frac{1}{3 \times 8} + \frac{1}{6 \times 8} + \frac{1}{10 \times 8} + \frac{1}{15 \times 8} + \frac{1}{21 \times 8} + \frac{1}{28 \times 8} \right) \times 64$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{8} \times \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} \right) \times 64 \\
 &= 8 \times \left( \frac{2}{2} + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{42} + \frac{2}{56} \right) \\
 &= 8 \times \left( \frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \frac{2}{4 \times 5} + \frac{2}{5 \times 6} + \frac{2}{6 \times 7} + \frac{2}{7 \times 8} \right) \\
 &= 8 \times 2 \times \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} \right) \\
 &= 16 \times \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) \right] \\
 &= 16 \times \left( 1 - \frac{1}{8} \right) \\
 &= 14.
 \end{aligned}$$

【难度等级】☆☆☆☆

15. 计算：

$$1 - \frac{2}{1 \times (1+2)} - \frac{3}{(1+2) \times (1+2+3)} - \frac{4}{(1+2+3) \times (1+2+3+4)} - \dots - \frac{10}{(1+2+\dots+9) \times (1+2+\dots+9+10)}$$

【分析与解】方法一：  $1 - \frac{2}{1 \times (1+2)} = \frac{1}{3}$ ；

$$1 - \frac{2}{1 \times (1+2)} - \frac{3}{(1+2) \times (1+2+3)} = \frac{1}{6}；$$

$$1 - \frac{2}{1 \times (1+2)} - \frac{3}{(1+2) \times (1+2+3)} - \frac{4}{(1+2+3) \times (1+2+3+4)} = \frac{1}{10}；$$

.....

发现  $1+2=3$ ， $1+2+3=6$ ， $1+2+3+4=10$ ，…，也就是说当作为最后一个减数分母的最后一个乘数为多少，作为最终结果的单位分数的分母就是多少。

所以，原题中最后一个减数分母的最后一个乘数为  $1+2+3+4+\cdots+9+10=55$ ，所以最终计算结果为  $\frac{1}{55}$ 。

$$\text{方法二：} \frac{2}{1 \times (1+2)} = 1 - \frac{1}{1+2},$$

$$\frac{3}{(1+2) \times (1+2+3)} = \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2+3},$$

$$\frac{4}{(1+2) \times (1+2+3)} = \frac{1}{1+2+3} - \frac{1}{1+2+3+4},$$

.....,

$$\frac{10}{(1+2+3+\cdots+9) \times (1+2+3+\cdots+9+10)} = \frac{1}{1+2+3+\cdots+9} - \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}.$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 1 - \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) - \left(\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2+3}\right) - \left(\frac{1}{1+2+3} - \frac{1}{1+2+3+4}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{1+2+3+\cdots+9} - \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}\right) \\ &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+10} \\ &= \frac{1}{55}. \end{aligned}$$

方法三：先找出通项的规律为  $\frac{n}{[1+2+\cdots+(n-1)] \times [1+2+\cdots+n]}.$

$$\text{有 } \frac{n}{[1+2+\cdots+(n-1)] \times [1+2+\cdots+n]} = \frac{n}{\frac{(n-1) \times n}{2} \times \frac{n \times (n+1)}{2}} = \frac{4}{(n-1) \times n \times (n+1)}.$$

$$\text{而 } \frac{4}{(n-1) \times n \times (n+1)} = 2 \times \left[ \frac{1}{(n-1) \times n} - \frac{1}{n \times (n+1)} \right],$$

以下省略。

## 12. 仁华思维导引解析 1 2 讲: 行程问题之四

## 【内容概述】

具有时钟形式的行程问题, 综合性较强的行程问题, 运动过程中通常包括变速、转向或依据某种规律, 解题时要注意发挥图示的辅助作用, 并需要恰当选择关键点分段加以考虑. 与设计优化方案相结合的行程问题.

## 【典型问题】

【难度等级】



1. 有一座时钟现在显示10时整. 那么, 经过多少分钟, 分针与时针第一次重合; 再经过多少分钟, 分针与时针第二次重合?

【分析与解】 在10点时, 时针所在位置为刻度10, 分针所在位置为刻度12;

当两针重合时, 分针必须追上50个小刻度, 设分针速度为“1”, 有时针速度为“ $\frac{1}{12}$ ”, 于是需要时

间:  $50 \div \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 54\frac{6}{11}$ .

所以, 再过  $54\frac{6}{11}$  分钟, 时针与分针将第一次重合.

第二次重合时显然为12点整, 所以再经过  $(12-10) \times 60 - 54\frac{6}{11} = 65\frac{5}{11}$  分钟, 时针与分针第二次重合.

【难度等级】☆☆☆

2. 8时到9时之间时针和分针在“8”的两边, 并且两针所形成的射线到“8”的距离相等. 问这时是8时多少分?

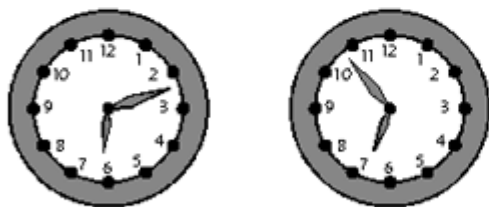
【分析与解】8点整的时候, 时针较分针顺时针方向多40格, 设在满足题意时, 时针走过 $x$ 格, 那么分针走过 $40-x$ 格, 所以时针、分针共走过 $x+(40-x)=40$ 格.

于是, 所需时间为 $40 \div \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 36\frac{12}{13}$ 分钟, 即在8点 $36\frac{12}{13}$ 分钟为题中所求时刻.

【难度等级】☆☆☆

3. 某人下午六时多外出买东西, 出门时看手表, 发现表的时针和分针的夹角为 $110^\circ$ , 七时前回家时又看手表, 发现时针和分针的夹角仍是 $110^\circ$ . 那么此人外出多少分钟?

【分析与解】如下示意图, 开始分针在时针左边 $110^\circ$ 位置, 后来追至时针右边 $110^\circ$ 位置.



于是, 分针追上了 $110^\circ + 110^\circ = 220^\circ$ , 对应 $\frac{220}{6}$ 格.

所需时间为 $\frac{220}{6} \div \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 40$ 分钟. 所以此人外出40分钟.

### 【难度等级】☆☆☆☆

4. 甲、乙两车分别从A、B两地同时出发相向而行，6小时后相遇在C点。如果甲车速度不变，乙车每小时多行5千米，且两车还从A、B两地同时出发相向而行，则相遇地点距C点12千米；如果乙车速度不变，甲车每小时多行5千米，且两车还从A、B两地同时出发相向而行，则相遇地点距C点16千米。甲车原来每小时行多少千米？

【分析与解】 方法一：  $(12+16) \div 5 = 5.6$  小时，  $1 \div 5.6 = \frac{5}{28}$ 。

$$AB = 5 \div \left( \frac{5}{28} - \frac{1}{6} \right) = 420 \text{ (千米)}, \quad 420 \div 6 = 70 \text{ (千米)}.$$

$$\text{甲车原来每小时走 } 70 \times \frac{12}{12+16} = 30 \text{ (千米)}.$$

方法二：设甲、乙两人原来的速度分别为 $x$ 千米/时， $y$ 千米/时，那么 $AC=6x$ ， $BC=6y$ ，

在第二、三次相遇中利用甲、乙两人所用时间相等，可得方程组：

$$\begin{cases} \frac{6x-12}{x} = \frac{6y+12}{y+5}, \\ \frac{6x+16}{x+5} = \frac{6y-16}{y} \end{cases}$$

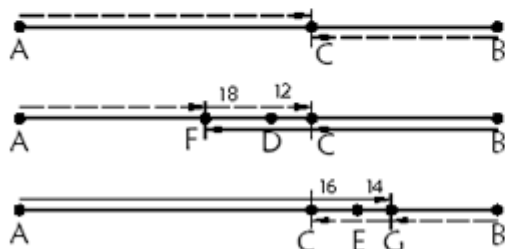
交叉相乘，解得  $\begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$ 。

即甲原来的速度是每小时30千米。

方法三：设第一次改变速度，甲、乙相遇在D点，第二次改变速度，甲、乙相遇在E点。

在第二次相遇中，假设走满6小时，甲走到了C点，乙则走到了F点，FC长： $5 \times 6 = 30$  (千米)，FD长： $30 - 12 = 18$  (千米)。

所以乙提速5千米/时后，甲、乙速度比为 $DC:DF = 12:18 = 2:3$ 。



同样的，在第三次相遇中，假设走满6小时，乙走到了C点，甲则走到了G点，CG长： $5 \times 6 = 30$  (千米)，EG长： $30 - 16 = 14$  (千米)，所以甲提速5千米/时后，甲、乙速度比为 $EG:CE = 14:16 = 7:8$ 。

设甲原来速度为 $x$ 千米/小时,乙原来速度为 $y$ 千米/小时,则
$$\begin{cases} \frac{x}{y+5} = \frac{2}{3} \\ \frac{x+5}{y} = \frac{7}{8} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}.$$
即甲原来的速度为每小时30千米.

【难度等级】☆☆☆

5. 甲、乙两人同时从山脚开始爬山,到达山顶后就立即下山,他们两人的下山速度都是各自上山速度的1.5倍,而且甲比乙速度快.两人出发后1小时,甲与乙在离山顶600米处相遇,当乙到达山顶时,甲恰好下到半山腰.那么甲回到出发点共用多少小时?

【分析与解】 用 $h$ 表示山顶到山脚的距离

甲	乙	
$h$ + 600 以上山速度    以下山速度	$h - 600$ 以上山速度	1小时
$h + 600 \div 1.5 = h + 400$ 以上山速度	$h - 600$ 以上山速度	
$h$ +0.5 $h$ 以上山速度    以下山速度	$h$ 以上山速度	
$h + 0.5h \div 1.5 = \frac{4}{3}h$ 以上山速度	$h$ 以上山速度	

因为转化后甲、乙均是在相同的时间内,以不变的速度各自行走相应路程,所以有:

$$(h+400):(h-600) = \frac{4}{3}h:h, \text{即} (h+400):(h-600) = 4:3, \text{解得} h = 3600 \text{米}.$$

即山顶到山脚的距离为3600米.

又由“甲下山速度是上山速度的1.5倍”.由1小时后,甲距山脚还有 $3600 - 600 = 3000$ 米知,甲到山脚还需 $3000 \div (4000 \times 1.5) = 0.5$ 小时.

所以甲自出发到回到山脚共用 $1 + 0.5 = 1.5$ 小时.

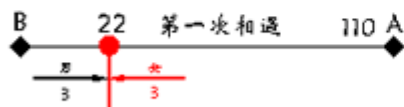
【难度等级】



6. 男、女两名田径运动员在长110米的斜坡上练习跑步(坡顶为A, 坡底为B). 两人同时从A点出发, 在A, B之间不停地往返奔跑. 已知男运动员上坡速度是每秒3米, 下坡速度是每秒5米, 女运动员上坡速度是每秒2米, 下坡速度是每秒3米. 那么两人第二次迎面相遇的地点离A点多少米?

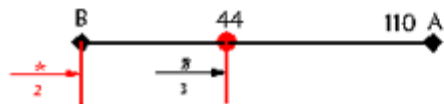
【分析与解】 开始下山时, 男运动员的速度大于女运动员的速度, 有男运动员到达坡底B所需时间为 $110 \div 5 = 22$ 秒, 此时女运动员才跑了 $22 \times 3 = 66$ 米.

现在女运动员的速度不变, 还是每秒3米, 而男运动员将从B上坡到A, 速度变为每秒3米. 男、女运动员的距离为 $110 - 66 = 44$ 米, 所以当男运动员再跑 $44 \div (3+3) \times 3 = 22$ 米后男女运动员第一次迎面相遇, 相遇点距B地22米, 如下图所示.

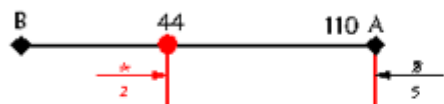


(本题4图所标注数字均是距坡底B的距离数)

所以当女运动员到达坡底B时, 男运动员又跑了22米, 即到达距B地44米的地方, 如下图所示.

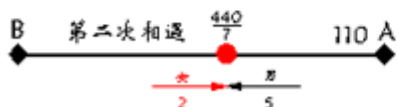


此后, 女运动员从坡底B上坡到A, 速度变为每秒2米, 男运动员的速度还是每秒3米, 所以当男运动员再跑 $110 - 44 = 66$ 米到达坡顶A时, 女运动员才跑了 $66 \div 3 \times 2 = 44$ 米, 即距离坡底B地44米的地方, 如下图所示.



这时, 女运动员的速度不变还是每秒2米, 而男运动员的速度变为每秒5米, 男、女运动员相距 $110 - 44$

$= 66$ 米, 所以当男、女运动员第二次相遇时, 男运动员又跑了 $66 \div (5+2) \times 5 = 47\frac{1}{7}$ 米, 如下图所示.



即第二次相遇的地点距A点 $47\frac{1}{7}$ 米.

### [难度等级] ☆ ☆

7. 某人沿电车线路行走, 每12分钟有一辆电车从后面追上, 每4分钟有一辆电车迎面开来. 假设两个起点站的发车间隔是相同的, 求这个发车间隔.

【分析与解】 设电车的速度为 $a$ , 行人的速度为 $b$ , 因为每辆电车之间的距离为定值, 设为 $l$ .

有电车能在12分钟追上行人 $l$ 的距离知,  $\frac{l}{a-b}=12$ ;

有电车能在4分钟能与行人共同走过 $l$ 的距离知,  $\frac{l}{a+b}=4$ .

所以有 $l=12(a-b)=4(a+b)$ , 有 $a=2b$ , 即电车的速度是行人步行速度的2倍.

那么 $l=4(a+b)=6a$ , 则发车间隔 $\frac{l}{a}=\frac{6a}{a}=6$ .

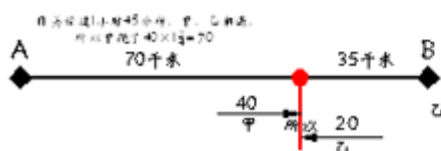
即发车间隔为6分钟.

### [难度等级] ☆ ☆ ☆ ☆

8. A, B两地相距105千米, 甲、乙两人分别骑车从A, B两地同时相向出发, 甲速度为每小时40千米, 出发后1小时45分钟相遇, 然后甲、乙两人继续沿各自方向往前骑. 在他们相遇3分钟后, 甲与迎面骑车而来的丙相遇, 而丙在C地追上乙. 若甲以每小时20千米的速度, 乙以每小时比原速度快2千米的车速, 两人同时分别从A, B出发相向而行, 则甲、乙二人在C点相遇, 问丙的车速是多少?

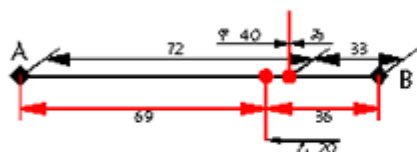
【分析与解】 甲以40千米/小时的速度行驶1小时45分钟, 行驶了 $40 \times \left(1 + \frac{45}{60}\right) = 70$ 千米, 那么剩下的

$105 - 70 = 35$ 千米为乙在1小时45分钟内行驶的, 所以乙的速度为 $35 \div 1\frac{3}{4} = 20$ 千米/小时, 如下图所示.



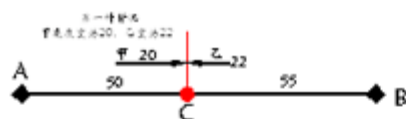


又甲、乙再行驶3分钟,那么甲又行驶了 $40 \times \frac{3}{60} = 2$ 千米,乙又行驶了 $20 \times \frac{3}{60} = 1$ 千米.即在甲、乙相遇3分钟后,乙行驶至距B地 $35+1=36$ 千米的地方,甲行驶至距A地 $70+2=72$ 千米的地方,此地距B地 $105-72=33$ 千米,如下图所示.



而如果甲以20千米/小时的速度,乙的速度增加2千米/小时至22千米/小时,那么相遇点C距B

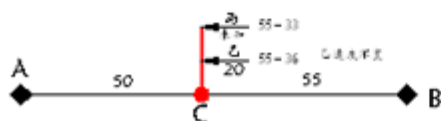
$\frac{105}{20+22} \times 22 = 55$ 千米,如下图所示.



那么,当丙与甲相遇在距B地33千米的地方时,乙在距B地36千米的地方,而后丙行驶至C地(距B地55千米)时,乙也在C地,即相遇.

在这段时间内,乙行驶了 $55-36=19$ 千米,而丙行驶了 $55-33=22$ 千米,所以丙的速度为 $20 \times \frac{22}{19} =$

$23\frac{3}{19}$ 千米/小时,如下图所示.

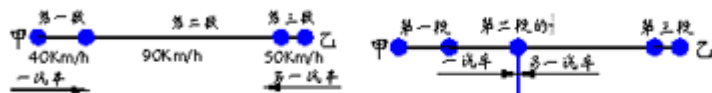


# [难度等级] ☆☆☆

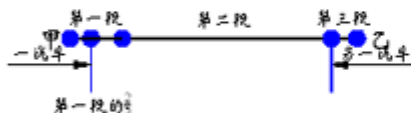
9. 从甲市到乙市有一条公路, 它分成三段. 在第一段上, 汽车速度是每小时40千米; 在第二段上, 汽车速度是每小时90千米; 在第三段上, 汽车速度是每小时50千米. 已知第一段公路的长恰好是第三段的2

倍, 现有两汽车分别从甲、乙两市同时出发, 相向而行, 1小时20分后, 在第二段从甲到乙方向的  $\frac{1}{3}$  处相遇. 那么, 甲、乙两市相距多少千米?

【分析与解】 设第一、二、三段公路的长度依次为a、b、c, 有a=2c, 示意图如下:

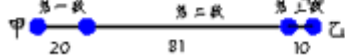


易知当另一汽车到达第二、三段交接点处, 即行驶的路程为c时, 一汽车行驶的路程为  $\frac{40}{50}c$ , 而第一段长度为第三段长度的2倍, 所以甲行驶至第一段的  $\frac{40}{50} \div 2 = \frac{2}{5}a$  处, 如下图所示.



所以当另一汽车行驶  $\frac{2}{3}b$  路程的时间内, 一汽车行驶了  $\frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b$  的距离, 同时减去  $\frac{1}{3}b$  的里程, 则另一汽车行驶了  $\frac{1}{3}b$  的路程, 一汽车行驶了  $\frac{3}{5}a$  的路程.

有两汽车行驶的时间相等知  $\frac{\frac{3}{5}a}{40} = \frac{\frac{1}{3}b}{50}$ , 即a: b=20: 81, 如下图所示.



设第一段路程为20k, 则第二段路程为81k, 第三段路程为10k;

于是, 一汽车跑至  $\frac{1}{3}$  第二段时, 所需时间为  $20k \div 40 + \frac{1}{3} \times 81k \div 90 = 1\frac{1}{3}$ , 解得  $k = \frac{5}{3}$ , 而甲乙全程为  $20k + 81k + 10k = 111k$ , 有  $111 \times \frac{5}{3} = 185$ .  
所以甲、乙两市相距185千米.

【难度等级】



10. 甲、乙两人在400米圆形跑道上进行10000米比赛。两人从起点同时同向出发，开始时甲的速度为每秒8米，乙的速度为每秒6米。当甲每次追上乙以后，甲的速度每秒减少2米，乙的速度每秒减少0.5米。这样下去，直到甲发现乙第一次从后面追上自己开始，两人都把自己的速度每秒增加0.5米，直到终点。那么领先者到达终点时，另一人距终点多少米？

【分析与解】 这题我们没有什么十分简洁的方法，只能详细的分析，以获得解答。

先求出当第一次甲追上乙时的详细情况，因为甲乙同向，所以为追击问题。

甲、乙速度差为 $8-6=2$ 米/秒，当甲第一次追上乙时，甲应比乙多跑了一圈400米，即甲跑了 $400 \div 2 \times 8 = 1600$ 米，乙跑了 $400 \div 2 \times 6 = 1200$ 米。

相遇后，甲的速度变为 $8-2=6$ 米/秒，乙的速度变为 $6-0.5=5.5$ 米/秒。显然，甲的速度大于乙，所以仍是甲超过乙。

当甲第二次追上乙前，甲、乙速度差为 $6-5.5=0.5$ 米/秒，追上乙时，甲应在原基础上再比乙多跑一圈400米，于是甲又跑了 $400 \div 0.5 \times 6 = 4800$ 米，乙又跑了 $400 \div 0.5 \times 5.5 = 4400$ 米。

甲第二次追上乙后，甲的速度变为 $6-2=4$ 米/秒，乙的速度变为 $5.5-0.5=5$ 米/秒。显然，现在乙的速度大于甲，所以变为乙超过甲。

当乙追上甲时，甲、乙速度差为 $5-4=1$ 米/秒，乙追上甲时，乙应比甲多跑一圈400米，于是甲又跑了 $400 \div 1 \times 4 = 1600$ 米，乙又跑了 $400 \div 1 \times 5 = 2000$ 米。

这时甲的速度变为 $4+0.5=4.5$ 米/秒，乙的速度变为 $5+0.5=5.5$ 米/秒。并以这样的速度跑完剩下的全程。

在这过程中甲共跑了 $1600+4800+1600=8000$ 米，乙共跑了 $1200+4400+2000=7600$ 米。

甲还剩下 $10000-8000=2000$ 米的路程，乙还剩下 $10000-7600=2400$ 米的路程。

显然乙先跑完全程，此时甲还剩下 $2000-4.5 \times \frac{2400}{5.5} = \frac{400}{11} = 36\frac{4}{11}$ 米的路程。

即当领先者到达终点时，另一人距终点 $36\frac{4}{11}$ 米。

【难度等级】



11. 龟兔赛跑，全程5.2千米，兔子每小时跑20千米，乌龟每小时跑3千米。乌龟不停地跑，但兔子却边跑边玩，它先跑了1分钟然后玩15分钟，又跑2分钟然后玩15分钟，再跑3分钟然后玩15分钟，……。那么先到达终点的比后到达终点的快多少分钟？

【分析与解】 乌龟到达终点所需时间为 $5.2 \div 3 \times 60 = 104$ 分钟。

兔子如果不休息，则需要时间 $5.2 \div 20 \times 60 = 15.6$ 分钟。

而兔子休息的规律是跑1、2、3、…分钟后，休息15分钟。

因为 $15.6 = 1+2+3+4+5+0.6$ ，所以兔子休息了 $5 \times 15 = 75$ 分钟，即兔子跑到终点所需时间为 $15.6+75=90.6$ 分钟。

显然，兔子先到达，先乌龟 $104-90.6=13.4$ 分钟达到终点。

# [难度等级] ☆☆☆☆

12. A, B 两地相距 125 千米, 甲、乙二人骑自行车分别从 A, B 两地同时出发, 相向而行. 丙骑摩托车以每小时 63 千米的速度, 与甲同时从 A 出发, 在甲、乙二人间来回穿梭 (与乙相遇立即返回, 与甲相遇也立即返回). 若甲车速每小时 9 千米, 且当丙第二次回到甲处时 (甲、丙同时出发的那一次为丙第零次回到甲处), 甲、乙二人相距 45 千米. 问: 当甲、乙二人相距 20 千米时, 甲与丙相距多少千米?

【分析与解】 我们设乙的速度为  $9x$ , 即甲的  $x$  倍.

当乙、丙第一次相遇的时候, 设甲走了 “1”, 则乙走了 “ $x$ ”, 丙走了 “7”, 所以有 “7” + “ $x$ ” = 12

5, 于是 “1” =  $\frac{125}{7+x}$ , 此时甲、丙相距 “7” - “1” = “6”.

这样丙第一次回到甲处时, 甲又向前行  $\frac{6}{63+9} \times 9 = \frac{3}{4}$ , 丙又行了 “6” -  $\frac{3}{4} = \frac{21}{4}$ , 乙又行了  $\frac{3}{4} \times$

$x = \frac{3}{4}x$ .

所以, 甲、乙此时相距  $\frac{21}{4} - \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}(7-x) = \frac{3}{4} \times \frac{125}{7+x} \times (7-x) = \frac{3}{4} \times \frac{7-x}{7+x} \times 125$  (千米).

有丙第二次回到甲处的时, 125 千米的路程相当于  $\frac{3}{4} \times \frac{7-x}{7+x} \times 125$  千米, 即甲、乙相距  $\left[ \frac{3}{4} \times \left( \frac{7-x}{7+x} \right) \right]^2 \times$

$125 = 45$ , 所以  $\left( \frac{7-x}{7+x} \right)^2 = \frac{16}{25}$ ,  $\frac{7-x}{7+x} = \frac{4}{5}$ , 解得  $x = \frac{7}{9}$ . 所以乙的速度为  $9x = 9 \times \frac{7}{9} = 7$  千米/小时.

当第三次甲、丙相遇时, 甲、乙相距  $\frac{3}{4} \times \frac{7-x}{7+x} \times 45 = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times 45 = \frac{3}{5} \times 45 = 27$  (千米).

当第四次甲、丙相遇时, 甲、乙相距  $\frac{3}{5} \times 27 = \frac{81}{5}$  (千米), 而题中甲、乙相距 20 千米, 此时应在甲、丙第三次和第四次相遇的某个时刻.

有  $20 - \frac{81}{5} = \frac{19}{5}$  (千米), 而甲、乙的速度比为 9: 7, 所以甲从甲、丙第四次相遇处倒退  $\frac{19}{5} \times \frac{9}{9+7} =$

$\frac{171}{80}$  千米即可.

又因为丙的速度是甲的7倍,所以丙倒退的路程应为甲的7倍,于是甲、丙相距  $\frac{171}{80} \times (7+1) = \frac{171}{10} = 17.1$  千米.

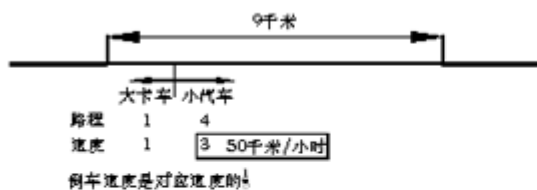
当甲、乙二人相距20千米时,甲与丙相距17.1千米.

**【难度等级】** ☆ ☆ ☆

13. 一辆小汽车与一辆大卡车在一段9千米长的狭路上相遇,必须倒车,才能继续通行. 已知小汽车的

速度是大卡车速度的3倍,两车倒车的速度是各自速度的  $\frac{1}{5}$ ,小汽车需倒车的路程是大卡车需倒车的路程的4倍. 如果小汽车的速度是每小时50千米,那么要通过这段狭路最少用多少小时?

**【分析与解】**



如果一辆车在倒车,另一辆的速度一定大于其倒车速度,即一车倒出狭路另一车也驶离狭路,倒车的车可立即通过.

小汽车倒车的路程为  $\frac{9}{4+1} \times 4 = 7.2$  千米,大卡车倒车的路程为  $\frac{9}{4+1} \times 1 = 1.8$  千米.

小汽车倒车的路程为  $\frac{9}{4+1} \times 4 = 7.2$  千米, 大卡车倒车的路程为  $\frac{9}{4+1} \times 1 = 1.8$  千米.

小汽车倒车的路程为  $50 \times \frac{1}{5} = 10$  千米/小时, 大卡车倒车的速度为  $50 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{10}{3}$  千米/小时.

当小汽车倒车时, 倒车需  $7.2 \div 10 = 0.72$  小时, 而行驶过狭路需  $9 \div 50 = 0.18$  小时, 共需  $0.72 + 0.18 = 0.9$  小时;

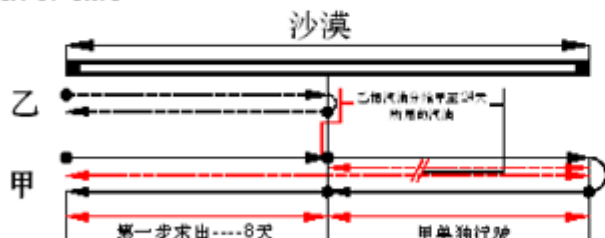
当大卡车倒车时, 倒车需  $1.8 \div \frac{10}{3} = 0.54$  小时, 而行驶过狭路需  $9 \div \frac{50}{3} = 0.54$  小时, 共  $0.54 + 0.54 = 1.08$  小时.

显然当小轿车倒车时所需时间最少, 需 0.9 小时.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

14. 在一个沙漠地带, 汽车每天行驶 200 千米, 每辆汽车载运可行驶 24 天的汽油. 现有甲、乙两辆汽车同时从某地出发, 并在完成任务后, 沿原路返回. 为了让甲车尽可能开出更远的距离, 乙车在行驶一段路程后, 仅留下自己返回出发地的汽油, 将其他的油给甲车. 求甲车所能开行的最远距离.

**[分析与解]**



甲车尽可能行驶更远, 则乙车离开甲车时, 应保证甲车还有可行驶 24 天的汽油.

设此时乙车已行驶了  $x$  天, 有甲也行驶了  $x$  天, 乙返程也需要  $x$  天, 有  $x + x + x + 24 = 48$ , 所以  $x = 8$ , 即乙车行驶 8 天后返程.

留下还可行驶 8 天的汽油, 将剩下的  $24 - 8 - 8 = 8$  天的汽油给甲车.

所以加上开始的 24 天的汽油, 甲车共得到  $24 + 8 = 32$  天的汽油. 那么甲车单程最多可行驶  $32 \div 2 = 16$  天.

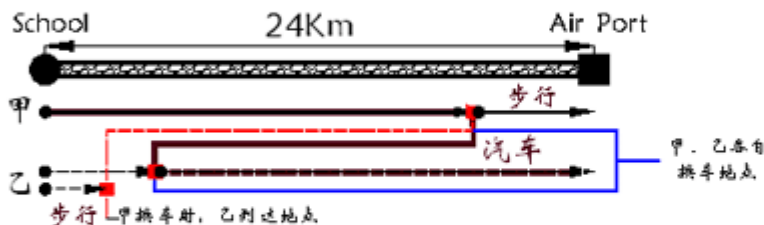
即甲车所能开行的最远距离为  $16 \times 200 = 3200$  千米.

【难度等级】



15. 甲、乙两班学生到离校24千米的飞机场参观，但只有一辆汽车，一次只能乘坐一个班的学生。为了尽快到达飞机场，两个班商定，由甲班先坐车，乙班先步行，同时出发，甲班学生在途中某地下车后步行去飞机场，汽车则从某地立即返回接在途中步行的乙班学生。如果甲、乙两班学生步行速度相同，汽车速度是他们步行速度的7倍，那么汽车应在距飞机场多少千米处返回接乙班学生，才能使两班同时到达飞机场？

【分析与解】 设学生步行时速度为“1”，那么汽车的速度为“7”，有如下示意图。



我们让甲班先乘车，那么当乙班步行至距学校1处，甲班已乘车至距学校71处。此时甲班下车步行，汽车往回行驶接乙班，汽车、乙班将相遇。

汽车、乙班的距离为 $71-1=61$ ，两者的速度和为 $7+1=8$ ，所需时间为 $61 \div 8=0.751$ ，这段时间乙班学生又步行0.751的路程，所以乙班学生共步行 $1+0.751=1.751$ 乘车而行。

应要求甲、乙班同时出发、同时到达，且甲、乙两班步行的速度相等，所以甲班也应在步行1.751路程后达到飞机场，有甲班经过的全程为 $71+1.751=8.751$ ，应为全程。

所以有 $71=24 \div 8.75 \times 7=19.2$ 千米，即在距学校19.2千米的地方甲班学生下车步行，此地距飞机场 $24-19.2=4.8$ 千米。

即汽车应在距飞机场4.8千米的地方返回接乙班学生，才能使两班同时到达飞机场。



## 13. 仁华思维导引解析 13讲: 应用题综合之一

## 【内容概述】

涉及分数与小数的典型应用题, 需要利用整数知识, 含有不确定性或与周期性等相关的较为复杂的应用题.

## 【典型问题】

## 【难度等级】



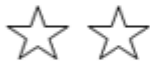
1. 有一些糖, 每人分5块多10块; 如果现有的人数增加到原人数的1.5倍, 那么每人4块就少2块. 问这些糖共有多少块?

【分析与解】方法一: 设开始共有 $x$ 人, 两种分法的糖总数不变, 有 $5x+10=4\times 1.5x-2$ , 解得 $x=12$ , 所以这些糖共有 $12\times 5+10=70$ 块.

方法二: 人数增加1.5倍后, 每人分4块, 相当与原来的人数, 每人分 $1.5\times 4=6$ 块.

有这些糖, 每人分5块多10块, 每人分6块少2块, 所以开始总人数为 $(10+2)\div(6-5)=12$ 人, 那么共有糖 $12\times 5+10=70$ 块.

## 【难度等级】



2. 一只猴子摘了一堆桃子, 第一天它吃了这堆桃子的七分之一; 第二天它吃了余下桃子的六分之一; 第三天它吃了余下桃子的五分之一; 第四天它吃了余下桃子的四分之一; 第五天它吃了余下桃子的三分之一; 第六天它吃了余下桃子的二分之一, 这时还剩12只桃子. 那么第一天和第二天猴子所吃桃子的总数是多少?

【分析与解】这堆桃子总数为单位“1”, 有第一天吃了 $\frac{1}{7}$ , 于是还剩下 $\frac{6}{7}$ ,

则第二天吃了 $\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{7}$ , 则现在还剩下 $\frac{5}{7}$ ,

则第三天吃了 $\frac{5}{7}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{7}$ , 则现在还剩下 $\frac{4}{7}$ ,

.....

所以第六天吃了 $\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{7}$ , 则现在还剩下 $\frac{1}{7}$ .



所以最终剩下  $\frac{1}{7}$  的桃子, 为12只, 所以开始共有桃子  $12 \div \frac{1}{7} = 84$ 只, 前二天共吃了  $\frac{2}{7}$  的桃子, 即为  $\frac{2}{7} \times 84 = 24$ 只.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆ ☆

3. 甲、乙、丙三堆石子共196块. 先从甲堆分给另外两堆, 使得后两堆石子数增加一倍; 再把乙堆照样

分配一次; 最后把丙堆也照样分配一次. 结果丙堆石子数为甲堆的  $\frac{5}{22}$ . 那么原来三堆石子中, 最少的一堆石子数为多少?

**[分析与解]** 易知, 甲堆最后的石子数为甲堆第一次分给另外两堆后数的  $2 \times 2 = 4$ 倍, 那么最后甲堆的石

子数为4的倍数; 又因为丙堆石子数为甲堆的  $\frac{5}{22}$ , 所以甲堆石子数应为22的倍数.

$[4, 22] = 44$ , 所以甲堆最后的石子数为44的倍数, 丙堆最后的石子数为10的倍数.

(1) 当甲堆最后的石子数为44时:

	甲	乙	丙
丙分配后(最后)	44	$196 - 44 - 10 = 142$	10
乙分配后	$44 \div 2 = 22$	$142 \div 2 = 71$	$196 - 22 - 71 = 103$

此时丙堆为奇数块, 而丙堆在乙堆分配后应为甲堆分配后块数的2倍, 为偶数块, 所以不满足.

(2) 当甲堆最后的石子数为88时:

	甲	乙	丙
丙分配后(最后)	88	$196 - 88 - 20 = 88$	20
乙分配后	$88 \div 2 = 44$	$88 \div 2 = 44$	$196 - 44 - 44 = 108$
甲分配后	$44 \div 2 = 22$	$196 - 22 - 54 = 120$	$108 \div 2 = 54$
原来	$196 - 60 - 27 = 109$	$120 \div 2 = 60$	$54 \div 2 = 27$

显然满足.

验证甲堆最后的石子数为132时, 不满足.

所以在原来的三堆石子中, 最少的一堆是丙堆, 石子数为27块.

### [难度等级] ☆☆☆

4. 甲、乙两个小朋友各有一袋糖, 每袋糖不到20粒. 如果甲给乙一定数量的糖后, 甲的糖就是乙的糖粒数的2倍; 如果乙给甲同样数量的糖后, 甲的糖就是乙的糖粒数的3倍. 那么, 甲、乙两个小朋友共有糖多少粒?

**[分析与解]** 由题意知糖的总数应该是3的倍数, 还是4的倍数, 即为12的倍数, 因为两袋糖每袋都不超过20粒, 所以总数不超过40粒. 于是糖的总数只可能为12、24或36粒.

如果糖的总数为12的奇数倍, 那么“乙给甲同样数量的糖后”, 甲的糖为 $12 \div (3+1) \times 3 = 9$ 的奇数倍. 那么在甲给乙两倍“同样的数量糖”后, 甲的糖为 $12 \div (2+1) \times 2 = 8$ 的奇数倍.

也就是说一个奇数加上一个偶数等于偶数, 显然不可能. 所以糖的总数不能为12的奇数倍.

那么甲、乙两个小朋友共有的糖只能为12的偶数倍, 即为24粒.

### [难度等级] ☆☆

5. 甲班有42名学生, 乙班有48名学生. 已知在某次数学考试中按百分制评卷, 评卷结果各班的数学总成绩相同, 各班的平均成绩都是整数, 并且平均成绩都高于80分. 那么甲班的平均成绩比乙班高多少分?

**[分析与解]** 方法一: 因为每班的平均成绩都是整数, 且两班的总成绩相等, 所以总成绩既是42的倍数, 又是48的倍数, 所以为 $[42, 48] = 336$ 的倍数.

因为乙班的平均成绩高于80分, 所以总成绩应高于 $48 \times 80 = 3840$ 分.

又因为是按百分制评卷, 所以甲班的平均成绩不会超过100分, 那么总成绩应不高于 $42 \times 100 = 4200$ 分.

在3840~4200之间且是336的倍数的数只有4032. 所以两个班的总分均为4032分.

那么甲班的平均分为 $4032 \div 42 = 96$ 分, 乙班的平均分为 $4032 \div 48 = 84$ 分.

所以甲班的平均分比乙班的平均分高 $96 - 84 = 12$ 分.

方法二: 有 甲班平均分 $\times 42 =$ 乙班平均分 $\times 48$ , 即甲班平均分 $\times 7 =$ 乙班平均分 $\times 8$ , 因为7、8互质, 所以甲班的平均分为某数的8倍, 乙班的平均分为某数的7倍, 又因为两个班的平均分均超过80分, 不高于100分, 所以这个数只能为12.

所以有甲班的平均分比乙班的平均分高 $12 \times (8 - 7) = 12$ 分.

# [难度等级] ☆☆☆

6. 参加迎春杯数学竞赛的人数共有 2000 多人。其中光明区占  $\frac{1}{3}$ ，中心区占  $\frac{2}{7}$ ，朝阳区占  $\frac{1}{5}$ ，剩余的全是远郊区的学生。比赛结果，光明区有  $\frac{1}{24}$  的学生得奖，中心区有  $\frac{1}{16}$  的学生得奖，朝阳区有  $\frac{1}{18}$  的学生得奖，全部获奖者的  $\frac{1}{7}$  是远郊区的学生。那么参赛学生有多少名？获奖学生有多少名？

[分析与解] 如下表所示，我们将题中所给的条件列在表格内：

	光明区	中心区	朝阳区	远郊区
参赛学生占参赛总数的	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}$	
获奖学生占本区全部获奖学生总数的	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{18}$	
有远郊区参赛的占参赛总数的	$1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{19}{105}$			$\frac{1}{7}$

而光明区，中心区，朝阳区获奖学生数占参赛总数的  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{72}$ ， $\frac{2}{7} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{56}$ ， $\frac{1}{5} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{90}$ 。

所以有参赛学生数是 3、7、5、72、56、90 的倍数，即为 2520 的倍数，而参赛学生总数只有 2000 多人，所以只能是 2520。

	光明区	中心区	朝阳区	远郊区
参赛学生数	840	720	504	456
获奖学生数	35	45	28	

光明区，中心区，朝阳区获奖学生共  $35+45+28=108$  人，占获奖总数的  $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ ，所以获奖学生总数

为  $108 \div \frac{6}{7} = 126$  名。

即参赛学生有 2520 名，获奖学生有 126 名。

【难度等级】



7. 把100个人分成四队，第一队人数是第二队人数的 $1\frac{1}{3}$ 倍，是第三队人数的 $1\frac{1}{4}$ 倍，那么第四队有多少人？

【分析与解】方法一：由条件知，第二队人数可写成 $3A$ ，第三队人数可以写成 $4B$ ，那么第一队人数为 $4A$ ，也应为 $5B$ 。

则 $A:B=5:4$ ，不妨令 $A=5k$ ， $B=4k$ ，有第一、二、三队的人数为 $20k$ ， $15k$ ， $16k$ ，三队总数为 $51k$ ，且小于100，所以只能是51，那么第四队为 $100-51=49$ 人。

第一、二、三队各有20、15、16人，第四队有49人。

方法二：由条件知，第二队人数是第一队的 $\frac{3}{4}$ 倍，第三队人数是第一队的 $\frac{4}{5}$ 倍，所以第一、二、三的

总人数是第一队的 $1+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{51}{20}$ 倍，所以第一队人数是20的倍数，可能是20，40，60，80，但是当第一队人数是40人时，前三队总人数已是102人，所以第一队为20人，前三队为51人，则第四队为49人。

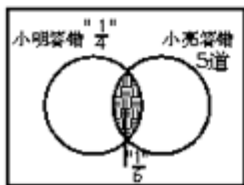
【难度等级】



8. 一次数学竞赛均是填空题，小明答错的恰是题目总数的 $\frac{1}{4}$ ，小亮答错5题，两人都答错的题目占总题

数的 $\frac{1}{6}$ 。已知小明、小亮都答对的题目数超过了试题总数的一半，则他们都答对多少题？

【分析与解】由题中条件知，题目总数是小明答错题的4倍，是小明、小亮两人都答错题的6倍，即题目总数是12的倍数。



因为总题数的  $\frac{1}{6}$  不大于 5 道, 所以总题数不超过 30 道. 那么只能为 12 或 24 道.

当题目总数为 12 道时, 小明答错的题为  $12 \times \frac{1}{4} = 3$  道, 两人都答错的题为  $12 \times \frac{1}{6} = 2$  道, 由容斥原理知, 小明、小亮都答对的题为  $12 - 3 - 5 + 2 = 6$  道, 没有超过试题总数的一半 6 道, 所以不满足;

当题目总数为 24 道时, 小明答错的题为  $24 \times \frac{1}{4} = 6$  道, 两人都答错的题为  $24 \times \frac{1}{6} = 4$  道, 由容斥原理知, 小明、小亮都答对的题为  $24 - 6 - 5 + 4 = 17$  道, 超过了试题总数的一半 12 道, 满足.  
所以小明、小亮都答对的题为 17 道.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

9. 巧克力每盒 9 块, 软糖每盒 11 块. 要把这两种糖分发给一些小朋友, 每样糖每人一块. 由于又来了一位小朋友, 软糖就要增加一盒, 两种糖发的盒数就一样多. 现在又来了一位小朋友, 巧克力还要增加一盒. 问最后共有小朋友多少人?

**[分析与解]** 没有加小朋友时, 软糖全部发完, 所以原来小朋友的人数是 11 的倍数;  
又来了一个小朋友时, 巧克力全部发完, 所以原来小朋友人数加 1 是 9 的倍数.  
而 44 是满足此条件的最小数, 且满足原来软糖比巧克力少一盒的条件.  
因此, 原来小朋友有 44 人, 最后有 46 人.

**[难度等级]** ☆ ☆

10. 在一个两位质数的两个数字之间, 添上数字 6 以后, 所得的三位数比原数大 870, 那么原数是多少?

**[分析与解]** 设这个数是  $\overline{ab}$ , 则在数字之间添上 6, 变为  $\overline{a6b}$ , 有  $\overline{a6b} - \overline{ab} = 870$ , 即  $(100a + 60 + b) - (10a + b) = 90a + 60 = 870$ , 所以  $a = 9$ , 要求  $\overline{ab}$  为质数, 所以只能是 97.  
即原数是 97.

### [难度等级] ☆☆☆

11. 大雪后的第一天, 大亮和爸爸共同步测一个圆形花圃的周长, 他俩的起点和走的方向完全相同. 大亮每步长54厘米, 爸爸每步长72厘米, 由于两人的脚步有重合, 所以雪地上只留下60个脚印. 求这个花圃的周长是多少米?

**[分析与解]** 因为 $[54, 72] = 216$ , 所以每走216米, 父子的脚印重合一次, 即父亲走3步, 大亮走4步后, 只留下6个脚印.

现在有60个脚印, 所以父亲走了 $60 \div 6 \times 3 = 30$ 步, 即 $30 \times 72 = 2160$ 厘米 $= 21.6$ 米.

所以, 这个花圃的周长是21.6米.

### [难度等级] ☆☆☆

12. 某乡水电站按户收取电费, 具体规定是: 如果每月用电不超过24度, 就按每度9分钱收费; 如果超过24度, 超出的部分按每度2角钱收费. 已知在某月中, 甲家比乙家多交了电费9角6分(用电按整数度计算), 问甲、乙两家各交了多少电费?

**[分析与解]** 如果甲、乙两家用电均超过24度, 那么他们两家的电费差应是2角钱的整数倍;

如果甲、乙两家用电均不超过24度, 那么他们两家的电费差应是9分钱的整数倍.

现在9角6分既不是2角钱的整数倍, 又不是9分钱的整数倍, 所以甲家的用电超过了24度, 乙家的用电不超过24度.

设甲家用了 $24+x$ 度电, 乙家用了 $24-y$ 度电, 有 $20x+9y=96$ , 得 $x=3, y=4$ .

即甲家用了27度电, 乙家用了20度电, 那么乙家应交电费 $20 \times 9 = 180$ 分 $= 1$ 元8角, 则甲家交了 $180+96 = 276$ 分 $= 2$ 元7角6分.

即甲、乙两家各交电费2元7角6分, 1元8角.

### [难度等级] ☆☆☆

13. 团体游园购买公园门票的票价如图3-1所示. 今有甲、乙两个旅游团, 若分别购票, 两团总计应付门票费1142元. 如合在一起作为一个团体购票, 总计只付门票费864元. 问这两个旅游团各有多少人?

购票人数	50人以下	51~100人	100人以上
每人票价	12元	10元	8元

图3-1

**[分析与解]** 因为 $864 > 8 \times 100$ , 可知两团总人数超过100人, 因而两团总人数为 $864 \div 8 = 108$ .

因为 $108 \times 10 = 1080 < 1142$ ,  $108 \times 12 = 1296 > 1142$ , 所以每个团的人数不会都大于50人, 也不会都小于50人, 即一个团大于50人, 另一个团小于50人.

当两团都大于50人, 则分别付款时, 应付 $108 \times 10 = 1080$ 元, 实际多付了 $1142 - 1080 = 62$ 元. 这是少于50人的旅游团多付的钱.

因此, 甲的人数为 $62 \div (12 - 10) = 31$ 人, 乙旅行团人数为 $108 - 31 = 77$ 人.

## [难度等级] ☆☆☆☆

14. 一小、二小两校春游的人数都是10的整数倍, 出行时两校人员不合乘一辆车, 且每辆车尽量坐满. 现在知道, 若两校都租用有14个座位的旅游车, 则两校共需租用这种车72辆; 若两校都租用19个座位的旅游车, 则二小要比一小多租用这种车7辆. 问两校参加这次春游的人数各是多少?

[分析与解] 设二小春游人数为 $m$ , 一小春游人数为 $n$ . 由已知乘19座面包车二小比一小多租用7辆. 所以

$$19 \times 6 + 1 \leq m - n \leq 19 \times 8 - 1, \text{ 即 } 115 \leq m - n \leq 151.$$

又已知两校共需租用14座面包车72辆, 所以

$$70 \times 14 + 2 \leq m + n \leq 72 \times 14, \text{ 即 } 982 \leq m + n \leq 1008.$$

同时已知 $m$ 与 $n$ 都是10的倍数, 于是有

$$\begin{cases} m - n = 120 \text{ 或 } 130 \text{ 或 } 140 \text{ 或 } 150 \\ m + n = 990 \text{ 或 } 1000 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = 570 \\ n = 430 \end{cases}, \begin{cases} m = 570 \\ n = 420 \end{cases}, \begin{cases} m = 560 \\ n = 440 \end{cases}, \begin{cases} m = 560 \\ n = 430 \end{cases}, \text{ 另外四组因为解得 } m, n \text{ 不是 } 10 \text{ 的倍数.}$$

$$\text{经检验只有 } \begin{cases} m = 570 \\ n = 430 \end{cases} \text{ 满足.}$$

所以, 一小参加春游430人, 二小参加春游570人.

## [难度等级] ☆☆☆☆

15. 某游客在10时15分由码头划出一条小船, 他欲在不迟于13时回到码头. 河水的流速为每小时1.4千米, 小船在静水中的速度为每小时3千米, 他每划30分钟就休息15分钟, 中途不改变方向, 并在某次休息后往回划. 那么他最多能划离码头多远?

[分析与解] 从10时15分出发, 不迟于13时必须返回, 所以最多可划行2小时45分, 即165分钟.  $165 = 4 \times 30 + 3 \times 15$ , 最多可划4个30分钟, 休息3个15分钟.

顺流速度为 $3 + 1.4 = 4.4$ 千米/小时; 所以顺游半小时划行路程为 $4.4 \times 0.5 = 2.2$ 千米;

逆流速度为 $3 - 1.4 = 1.6$ 千米/小时; 所以逆流半小时划行路程为 $1.6 \times 0.5 = 0.8$ 千米.

休息15分钟, 则船顺流漂行的路程为 $1.4 \times 0.25 = 0.35$ 千米.

**第一种情况:** 当开始顺游时, 至少划行半小时, 行驶2.2千米, 而在休息的3个时间内船又顺流漂行了 $0.35 \times 3 = 1.05$ 千米的路程, 所以逆流返回时需划行 $2.2 + 1.05 = 3.25$ 千米.

$3.25 \div 1.6 = 2.03125$ 小时 = 121.875分钟. 即最少需 $30 + 15 \times 3 + 121.875 = 196.875$ 分钟  $> 165$ 分钟, 来不及按时还船, 不满足.

**第二种情况:** 当开始逆流时, 每逆流半小时, 则行驶0.8千米, 则3次逆流后, 行驶了 $0.8 \times 3 = 2.4$ 千米, 船在游客休息时顺流漂行了1.05千米, 所以回划时只用划行 $2.4 - 1.05 = 1.35$ 千米的路程, 需 $1.35 \div 4.4 \approx 0.3068$ 小时  $\approx 18.41$ 分钟. 共需 $3 \times 30 + 3 \times 15 + 18.41 = 153.41$ 分钟  $< 165$ 分钟, 满足.

于是, 只有第二种情况满足, 此时最远的路程为休息了2次后第3次逆流所至的地点, 为 $0.8 \times 3 - 0.35 \times 2 = 1.7$ 千米.

所以, 他最多能划离码头1.7千米.

## 14. 仁华思维导引解析 14讲: 约数与倍数

## 【内容概述】

一个整数的约数个数与约数和的计算方法, 两数的最大公约数与最小公倍数之间的关系, 分数的最小公倍数. 涉及一个整数的约数, 以及若干整数最大公约数与最小公倍数的问题, 其中质因数分解发挥着重要作用.

## 【典型问题】

## 【难度等级】



1. 数360的约数有多少个? 这些约数的和是多少?

**【分析与解】** 360分解质因数:  $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ;

360的约数可以且只能是  $2^a \times 3^b \times 5^c$ , (其中  $a, b, c$  均是整数, 且  $a$  为  $0 \sim 3$ ,  $b$  为  $0 \sim 2$ ,  $c$  为  $0 \sim 1$ ).

因为  $a, b, c$  的取值是相互独立的, 由计数问题的乘法原理知, 约数的个数为  $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$ .

4.

我们先只改动关于质因数3的约数, 可以是1, 3,  $3^2$ , 它们的和为  $(1+3+3^2)$ , 所以所有360约数的和为  $(1+3+3^2) \times 2^4 \times 5$ ;

我们再来确定关于质因数2的约数, 可以是1, 2,  $2^2$ ,  $2^3$ , 它们的和为  $(1+2+2^2+2^3)$ , 所以所有360约数的和为  $(1+3+3^2) \times (1+2+2^2+2^3) \times 5$ ;

最后确定关于质因数5的约数, 可以是1, 5, 它们的和为  $(1+5)$ , 所以所有360的约数的和为  $(1+3+3^2) \times (1+2+2^2+2^3) \times (1+5)$ .

现在, 我们计算出值了:  $13 \times 15 \times 6 = 1170$ .

所以, 360所有约数的和为1170.

## 【难度等级】



2. 一个数是5个2, 3个3, 6个5, 1个7的连乘积. 这个数有许多约数是两位数, 那么在这些两位数的约数中, 最大的是多少?

**【分析与解】** 设这个数为A, 有  $A = 2^5 \times 3^3 \times 5^6 \times 7$ ,  $99 = 3 \times 3 \times 11$ ,  $98 = 2 \times 7 \times 7$ , 97均不是A的约数, 而  $96 = 2^5 \times 3$  为A的约数, 所以96为其最大的两位数约数.



### [难度等级] ☆☆☆

3. 写出从360到630的自然数中有奇数个约数的数。

**[分析与解]** 一个合数的约数的个数是在严格分解质因数之后，将每个质因数的指数(次数)加1后所得的乘积。如：1400严格分解质因数后为 $2^3 \times 5^2 \times 7$ ，所以它的约数有 $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 个。(包括1和它自身)

如果某个自然数有奇数个约数，那么这个数的所有质因子的个数均为偶数个，这样它们加1后均是奇数，所得的乘积才能是奇数。而所有质因数的个数均是偶数个的数为完全平方数。即完全平方数(除0外)有奇数个约数，反过来，有奇数个约数的数一定是完全平方数。

由以上分析知，我们所求的为360~630之间有多少个完全平方数？

$18 \times 18 = 324$ ， $19 \times 19 = 361$ ， $25 \times 25 = 625$ ， $26 \times 26 = 676$ ，所以在360~630之间的完全平方数为 $19^2$ ， $20^2$ ， $21^2$ ， $22^2$ ， $23^2$ ， $24^2$ ， $25^2$ 。

即360到630的自然数中有奇数个约数的数为361，400，441，484，529，576，625。

### [难度等级] ☆

4. 今有语文课本42册，数学课本112册，自然课本70册，平均分成若干堆，每堆中这3种课本的数量分别相等。那么最多可分多少堆？

**[分析与解]** 显然堆数是42的约数，是112的约数，是70的约数。即为42，112，70的公约数，有 $(42, 112, 70) = 14$ 。

所以，最多可以分成14堆。

### [难度等级] ☆

5. 加工某种机器零件，要经过三道工序，第一道工序每名工人每小时可完成6个零件，第二道工序每名工人每小时可完成10个零件，第三道工序每名工人每小时可完成15个零件。要使加工生产均衡，三道工序最少共需要多少名工人？

**[分析与解]** 为了使生产均衡，则每道工序每小时产生的零件个数应相等，设第一、二、三道工序上分别有A、B、C个工人，有 $6A = 10B = 15C = k$ ，那么k的最小值为6，10，15的最小公倍数，即 $[6, 10, 15] = 30$ 。

所以 $A = 5$ ， $B = 3$ ， $C = 2$ ，则三道工序最少共需要 $5 + 3 + 2 = 10$ 名工人。

### [难度等级] ☆☆☆

6. 有甲、乙、丙3人，甲每分钟行走120米，乙每分钟行走100米，丙每分钟行走70米。如果3个人同时同向，从同地出发，沿周长是300米的圆形跑道行走，那么多少分钟之后，3人又可以相聚？

**[分析与解]** 设在x分钟后3人再次相聚，甲走了 $120x$ 米，乙走了 $100x$ 米，丙走了 $70x$ 米，他们3人之间的路程差均是跑道长度的整数倍。

即 $120x - 100x$ ， $120x - 70x$ ， $100x - 70x$ 均是300的倍数，那么300就是 $20x$ ， $50x$ ， $30x$ 的公约数。

有 $(20x, 50x, 30x) = 300$ ，而 $(20x, 50x, 30x) = x(20, 50, 30) = 10x$ ，所以 $x = 30$ 。

即在30分钟后，3人又可以相聚。

即  $120x-100x$ ,  $120x-70x$ ,  $100x-70x$  均是 300 的倍数, 那么 300 就是  $20x$ ,  $50x$ ,  $30x$  的公因数.  
有  $(20x, 50x, 30x)=300$ , 而  $(20x, 50x, 30x)=x(20, 50, 30)=10x$ , 所以  $x=30$ .  
即在 30 分钟后, 3 人又可以相聚.

**[难度等级]** ☆☆☆

7. 3 条圆形跑道, 圆心都在操场中的旗杆处, 甲、乙、丙 3 人分别在里圈、中圈、外圈沿同样的方向跑

步. 开始时, 3 人都在旗杆的正东方向, 里圈跑道长  $\frac{1}{5}$  千米, 中圈跑道长  $\frac{1}{4}$  千米, 外圈跑道长  $\frac{3}{8}$  千米. 甲每

小时跑  $3\frac{1}{2}$  千米, 乙每小时跑 4 千米, 丙每小时跑 5 千米. 问他们同时出发, 几小时后, 3 人第一次同时回到出发点?

**[分析与解]** 甲跑完一圈需  $\frac{1}{5} \div 3\frac{1}{2} = \frac{2}{35}$  小时, 乙跑一圈需  $\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$  小时, 丙跑一圈需  $\frac{3}{8} \div 5 =$

$\frac{3}{40}$ . 则他们同时回到出发点时都跑了整数圈, 所以经历的时间为  $\frac{2}{35}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{3}{40}$  的倍数, 即它们的公倍数.

而  $\left[\frac{2}{35}, \frac{1}{16}, \frac{3}{40}\right] = \frac{[2, 1, 3]}{(35, 16, 40)} = \frac{6}{1} = 6$ .

所以, 6 小时后, 3 人第一次同时回到出发点.

**[难度等级]** ☆

8. 甲数和乙数的最大公约数是 6, 最小公倍数是 90. 如果甲数是 18, 那么乙数是多少?

**[分析与解]** 有两个数的最大公约数与最小公倍数的乘积等于这两个数的乘积.

有它们的最大公约数与最小公倍数的乘积为  $6 \times 90 = 540$ , 则乙数为  $540 \div 18 = 30$ .

## [难度等级] ☆ ☆

9. A, B两数都仅含有质因数3和5, 它们的最大公约数是75. 已知数A有12个约数, 数B有10个约数, 那么A, B两数的和等于多少?

**[分析与解]** 方法一: 由题意知A可以写成 $3 \times 5^2 \times a$ , B可以写成 $3 \times 5^2 \times b$ , 其中a, b为整数且只含质因子3, 5.

即 $A=3^{1+x} \times 5^{2+y}$ ,  $B=3^{1+m} \times 5^{2+n}$ , 其中x, y, m, n均为自然数(可以为0)

由A有12个约数, 所以 $[(1+x)+1] \times [(2+y)+1] = (2+x) \times (3+y) = 12$ , 所以 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ . 对应A为 $3^{1+2} \times 5^2 = 675$ ,  $3^{1+1} \times 5^{2+1} = 1125$ , 或 $3^{1+0} \times 5^{2+4} = 46875$ ;

由B有10个约数, 所以 $[(1+m)+1] \times [(2+n)+1] = (2+m) \times (3+n) = 10$ , 所以 $\begin{cases} m=0 \\ n=2 \end{cases}$ . 对应B为 $3^{1+0} \times 5^{2+2} = 1875$ .

只有 $(675, 1875) = 75$ , 所以 $A=675$ ,  $B=1875$ .

那么A, B两数的和为 $675+1875=2550$ .

方法二: 易知A, B中有一个数质因数中出现了两次5, 多于一次3, 那么, 先假设它出现了N次3, 则约数有:

$(2+1) \times (N+1) = 3 \times (N+1)$  个

12与10其中只有12是3的倍数, 所以 $3(N+1)=12$ , 易知 $N=3$ , 这个数是A, 即 $A=3^3 \times 5^2 = 675$ .

那么B的质数中出现了一次3, 多于两次5, 则出现了M次5, 则有:  $(1+1) \times (M+1) = 2(M+1) = 10$ ,  $M=4$ .  $B=3 \times 5^4 = 1875$ .

那么A, B两数的和为 $675+1875=2550$ .

## [难度等级] ☆ ☆ ☆

10. 有两个自然数, 它们的和等于297, 它们的最大公约数与最小公倍数之和等于693. 这两个自然数的差等于多少?

**[分析与解]** 设这两数为a, b, 记 $a=(a, b)q_1$ ,  $b=(a, b)q_2$ .

它们的和为:  $a+b=(a, b)q_1+(a, b)q_2=(a, b)(q_1+q_2)=297$ . .....①

它们的最大公约数与最小公倍数的和为:

$[a, b] + (a, b) = (a, b)q_1q_2 + (a, b) = (a, b)(q_1q_2+1) = 693$ , 且 $(q_1, q_2)=1$ . .....②

综合①、②知 $(a, b)$ 是297, 693的公约数, 而 $(297, 693)=99$ , 所以 $(a, b)$ 可以是99, 33, 11, 9, 3, 1.

**第一种情况:**  $(a, b)=99$ , 则 $(q_1+q_2)=3$ ,  $(q_1q_2+1)=7$ , 即 $q_1q_2=6=2 \times 3$ , 无满足条件的 $q_1, q_2$ ;

**第二种情况:**  $(a, b)=33$ , 则 $(q_1+q_2)=9$ ,  $(q_1q_2+1)=21$ , 即 $q_1q_2=20=2^2 \times 5$ , 则 $q_1=5$ ,  $q_2=4$ 时满

足,  $a = (a, b)q_1 = 33 \times 5 = 165$ ,  $b = (a, b)q_2 = 33 \times 4 = 132$ , 则  $a - b = 165 - 132 = 33$ ;

**第三种情况:**  $(a, b) = 11$ , 则  $(q_1 + q_2) = 27$ ,  $(q_1 q_2 + 1) = 63$ , 即  $q_1 q_2 = 62 = 2 \times 31$ , 无满足条件的  $q_1, q_2$ ;

——验证第四种情况, 第五种情况, 第六种情况没有满足条件的  $q_1, q_2$ .

所以, 这两个自然数的差为33.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆ ☆

11. 两个不同自然数的和是60, 它们的最大公约数与最小公倍数的和也是60. 问这样的自然数共有多少组?

**[分析与解]** 设这两数为  $a, b$ , 记  $a = (a, b)q_1$ ,  $b = (a, b)q_2$ .

它们的和为:  $a + b = (a, b)q_1 + (a, b)q_2 = (a, b)(q_1 + q_2) = 60$ . .....①

它们的最大公约数与最小公倍数的和为:

$[a, b] + (a, b) = (a, b)q_1 q_2 + (a, b) = (a, b)(q_1 q_2 + 1) = 60$ , 且  $(q_1, q_2) = 1$ . .....②

联立①、②有  $(q_1 + q_2) = (q_1 q_2 + 1)$ , 即  $q_1 + q_2 - q_1 q_2 = 1$ ,  $(q_1 - 1)(1 - q_2) = 0$ , 所以  $q_1 = 1$  或  $q_2 = 1$ .

即说明一个数是另一个数的倍数, 不妨记  $a = kb$  ( $k$  为非零整数),

有  $\begin{cases} a + b = kb + b = 60 \\ (a, b) + [a, b] = b + a = b + kb = 60 \end{cases}$ , 即  $(k+1)b = 60$ ,  $b$  确定, 则  $k$  确定, 则  $kb$  即  $a$  确定.

60的约数有2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60这11个,  $b$  可以等于2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30这10个数, 除了60, 因为如果  $b = 60$ , 则  $(k+1) = 1$ , 而  $k$  为非零整数.

对应的  $a, b$  有10组可能的值, 即这样的自然数有10组.

进一步, 列出有  $(a, b)$  为 (58, 2), (57, 3), (56, 4), (55, 5), (54, 6), (50, 10), (48, 12), (45, 15), (40, 20), (30, 30).

**[难度等级]** ☆ ☆

12. 3个连续的自然数的最小公倍数是9828, 那么这3个自然数的和等于多少?

**[分析与解]** 若三个连续的自然数中存在两个偶数, 那么它们的最小公倍数为三个数乘积的一半;

若三个连续的自然数中只存在一个偶数, 那么它们的最小公倍数为三个数的乘积.

则当  $a, a+1, a+2$  中有2个偶数时,  $a(a+1)(a+2) = 9828 \times 2$ ,

当  $a, a+1, a+2$  中有1个偶数时,  $a(a+1)(a+2) = 9828$ .

对9828分解质因数:  $9828 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 13$ , 我们注意, 13是其最大的质因数, 验证不存在3个连续的自然数的积为9828.

则这三个自然数的积只能是  $9828 \times 2$ , 此时这三个数中存在两个偶数, 有  $9828 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 13$ .

$13 \times 2 = 26$ , 有26, 27, 28三个数的积为  $9828 \times 2$ , 所以这三个连续的自然数数为26, 27, 28, 其中有两个偶数, 满足题意.

所以, 这三个数的和为  $26 + 27 + 28 = 81$ .

### [难度等级] ☆☆☆

13. 甲、乙两数的最小公倍数是90, 乙、丙两数的最小公倍数是105, 甲、丙两数的最小公倍数是126, 那么甲数是多少?

**[分析与解]** 对90分解质因数:  $90=2 \times 3 \times 3 \times 5$ .

因为  $5 \nmid 126$ , 所以  $5 \nmid$  甲, 即甲中不含因数5, 于是乙必含因数5.

因为  $2 \nmid 105$ , 所以  $2 \nmid$  乙, 即乙中不含因数2, 于是甲必含  $2 \times 2$ .

因为  $9 \nmid 105$ , 所以  $9 \nmid$  乙, 即乙最多含有一个因数3.

**第一种情况:** 当乙只含一个因数3时,  $\text{乙}=3 \times 5=15$ , 由  $[\text{甲}, \text{乙}]=90=2 \times 3^2 \times 5$ , 则  $\text{甲}=2 \times 3^2=18$ ;

**第二种情况:** 当乙不含因数3时,  $\text{乙}=5$ , 由  $[\text{甲}, \text{乙}]=90=2 \times 3^2 \times 5$ , 则  $\text{甲}=2 \times 3^2=18$ .

综上所述, 甲为18.

### [难度等级] ☆☆☆

14.  $a > b > c$  是三个整数.  $a, b, c$  的最大公约数是15;  $a, b$  的最大公约数是75;  $a, b$  的最小公倍数是450;  $b, c$  的最小公倍数是1050. 那么  $c$  是多少?

**[分析与解]** 由  $(a, b)=75=3 \times 5^2$ ,  $[a, b]=450=3^2 \times 2 \times 5^2=75 \times 3 \times 2$ , 又  $a > b$ , 所以  $\begin{cases} a=450 \\ b=75 \end{cases}$  或

$$\begin{cases} a=225 \\ b=150 \end{cases}.$$

$$[b, c]=1050=2 \times 3 \times 5^2 \times 7.$$

当  $\begin{cases} a=450 \\ b=75 \end{cases}$  时有  $\begin{cases} (450, 75, c)=(75, c)=15 \\ [b, c]=[75, c]=1050 \end{cases}$ , 因为两个数的最大公约数与最小公倍数的乘积等于这两个数的乘积, 所以  $(75, c) \times [75, c]=75 \times c=15 \times 1050$ , 得  $c=210$ , 但是  $c > b$ , 不满足;

当  $\begin{cases} a=225 \\ b=150 \end{cases}$  时有  $\begin{cases} (225, 150, c)=(75, c)=15 \\ [b, c]=[150, c]=1050 \end{cases}$ , 则  $c=105$ ,  $c < b$ , 满足, 即  $\begin{cases} a=225 \\ b=150 \\ c=105 \end{cases}$  为满足条件的唯一解.

那么  $c$  是105.

### [难度等级] ☆☆☆

15. 有4个不同的自然数, 它们的和是1111, 它们的最大公约数最大能是多少?

**[分析与解]** 设这4个不同的自然数为  $A, B, C, D$ , 有  $A+B+C+D=1111$ .

将1111分解质因数:  $1111=11 \times 101$ , 显然  $A, B, C, D$  的最大公约数最大可能为101, 记此时  $A=101a, B=101b, C=101c, D=101d$ , 有  $a+b+c+d=11$ , 当  $a+b+c+d=1+2+3+5$  时满足, 即这4个数的公约数可以取到101.

综上所述, 这4个不同的自然数, 它们的最大公约数最大能是101.

## 15. 仁华思维导引解析 15讲: 余数问题

## 【内容概述】

各种与余数有关的整数问题, 其中包括求方幂的末位数字, 计算具有规律的多位数除以小整数的余数, 以及用逐步试算法找出满足多个余数条件的最小数等.

## 【典型问题】

## 【难度等级】



1. 号码分别为101, 126, 173, 193的4个运动员进行乒乓球比赛, 规定每两人比赛的盘数是他们号码的和被3除所得的余数. 那么打球盘数最多的运动员打了多少盘?

**【分析与解】** 因为两个数和的余数同余与余数的和.

有101, 126, 173, 193除以3的余数依次为2, 0, 2, 1.

则101号运动员与126, 173, 193号运动员依次进行了2, 1, 0盘比赛, 共3盘比赛;

126号运动员与101, 173, 193号运动员依次进行了2, 2, 1盘比赛, 共5盘比赛;

173号运动员与101, 126, 193号运动员依次进行了1, 2, 0盘比赛, 共3盘比赛;

193号运动员与101, 126, 173号运动员依次进行了0, 1, 0盘比赛, 共1盘比赛.

所以, 打球盘数最多的运动员是126号, 打了5盘.

## 【难度等级】



2. 自然数  $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{67\text{个}2} - 1$  的个位数字是多少?

**【分析与解】** 我们先计算出  $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{67\text{个}2}$  的个位数字, 再减去1即为所求. (特别的如果是0, 那么减去1后的个位数字因为借位为9)

将一个数除以10, 所得的余数即是这个数的个位数字. 而积的余数, 同余余数的积.

有2除以10的余数为2,  $2 \times 2$ 除以10的余数为4,  $2 \times 2 \times 2$ 除以10的余数为8,  $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 除以10的余数为6;

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 除以10的余数为2,  $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{6\text{个}2}$ 除以10的余数为4,  $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{7\text{个}2}$ 除以10的余数为8,

$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{8\text{个}2, \dots \dots}$ 除以10的余数为6;

也就是说, n个2相乘所得的积除以10的余数每4个数一循环.

因为  $67 \div 4 = 16 \cdots 3$ , 所以  $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{67 \uparrow 2}$  除以 10 的余数同余与  $2 \times 2 \times 2$ , 即余数为 8, 所以

$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{67 \uparrow 2} - 1$  除以 10 的余数为 7.

即  $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{67 \uparrow 2} - 1$  的个位数字为 7.

评注:  $n$  个相同的任意整数相乘所得积除以 10 的余数每 4 个数一循环.

**[难度等级]** ★ ★

3. 算式  $7+7 \times 7+\cdots+\underbrace{7 \times 7 \times \cdots \times 7}_{1990 \uparrow 7}$  计算结果的末两位数字是多少?

**[分析与解]** 我们只用算出  $7+7 \times 7+\cdots+\underbrace{7 \times 7 \times \cdots \times 7}_{1990 \uparrow 7}$  的和除以 100 的余数, 即为其末两位数字.

7 除以 100 的余数为 7,  $7 \times 7$  除以 100 的余数为 49,  $7 \times 7 \times 7$  除以 100 的余数为 43,  $7 \times 7 \times 7 \times 7$  除以 100 的余数等于  $43 \times 7$  除以 100 的余数为 1;

而  $\underbrace{7 \times 7 \times \cdots \times 7}_{5 \uparrow 7}$  除以 100 的余数等于  $\underbrace{7 \times 7 \times \cdots \times 7}_{4 \uparrow 7} \times 7$  的余数, 即为 7,  $\cdots$

这样我们就得到一个规律  $\underbrace{7 \times 7 \times \cdots \times 7}_{n \uparrow 7}$  除以 100 所得的余数, 4 个数一循环, 依次为 7, 49, 43, 1.

$1990 \div 4 = 497 \cdots 2$ , 所以  $7+7 \times 7+\cdots+\underbrace{7 \times 7 \times \cdots \times 7}_{1990 \uparrow 7}$  的和除以 100 的余数同余与:  
 $497 \times (7+49+43+1) + 7 + 49 = 49756$ , 除以 100 余 56.

所以算式  $7+7 \times 7+\cdots+\underbrace{7 \times 7 \times \cdots \times 7}_{1990 \uparrow 7}$  计算结果的末两位数字是 56.

**[难度等级]** ★

4.  $\underbrace{1990 \cdots 1990}_{20 \uparrow 1990}$  除以 9 的余数是多少?

**[分析与解]** 能被 9 整除的数的特征是其数字和能被 9 整除, 如果这个数的数字和除以 9 余 a, 那么再减去 a 而得到的新数一定能被 9 整除, 那么这个新数加上 a 后再除以 9, 所得的余数一定为 a, 即一个数除以 9 的余数等于其数字和除以 9 的余数.

$\underbrace{1990 \cdots 1990}_{20 \uparrow 1990}$  的数字和为  $20 \times (1+9+9+0) = 380$ , 380 的数字和又是  $3+8=11$ , 11 除以 9 的余数为 2, 所以

$\underbrace{1990 \cdots 1990}_{20 \uparrow 1990}$  除以 9 的余数是 2.

**[难度等级]** ☆☆☆

5. 将1, 2, 3, ..., 30从左往右依次排列成一个51位数, 这个数被11除的余数是多少?

**[分析与解]** 1, 2, 3, ..., 30这30个数从左往右依次排列成一个51位数为:

123456...910...17...192021...25...2930

记个位为第1位, 十位为第2位, 那么:

它的奇数位数字和为:  $0+9+8+7+6+\cdots+1+9+8+7+6+\cdots+1+9+7+5+3+1=115$ ;

它的偶数位数字和为:  $3+2+2+2+\cdots+2+1+1+1+\cdots+1+8+6+4+2=53$ ;

它的奇数位数字和与偶数位数字和的差为  $115-53=62$ , 而62除以11的余数为7.

所以将原来的那个51位数增大4所得到的数123456...910...17...192021...25...2934就是11倍数, 则将123456...910...17...192021...25...2934减去4所得数除以11的余数为7.

即这个51位数除以11的余数是7.

**[难度等级]** ☆☆

6. 一个1994位的整数, 各个数位上的数字都是3. 它除以13, 商的第200位(从左往右数)数字是多少? 商的个位数字是多少? 余数是多少?

**[分析与解]** 这个数即为  $\underbrace{333\cdots3}_{1994\text{个}3}$ , 而整除13的数的特征是将其后三位与前面的数隔开而得到两个新数, 将这两个新数做差, 这个差为13的倍数.

显然有  $\underbrace{333333}_{6\text{个}3}$  能够被13整除, 而  $1994 \div 6 = 332 \cdots 2$ ,

即  $\underbrace{333\cdots3}_{1994\text{个}3} = \underbrace{333\cdots333}_{332\text{个}6\text{个}3} \underbrace{33}_{2\text{个}3} = \underbrace{333\cdots33300}_{332\text{个}6\text{个}3} + 33$ , 而  $\underbrace{333\cdots33300}_{332\text{个}6\text{个}3}$  是13的倍数, 所以  $\underbrace{333\cdots3}_{1994\text{个}3}$  除以13的余数即为33除以13的余数7.

有  $\underbrace{333333}_{6\text{个}3} \div 13 = 25641$ , 而  $\underbrace{333\cdots33}_{6\text{个}3} \div 13 = 25641025641$ , 所以  $\underbrace{333\cdots33}_{6\text{个}3}$  除以13所得的商每6个数一循环, 从左往右依次为2、5、6、4、1、8.

$200 \div 6 = 33 \cdots 2$ , 所以  $\underbrace{333\cdots3}_{1994\text{个}3}$  除以13所得商的第200位为5.



$\overbrace{333\dots 3}^{200\text{个}3}$  除以13的个位即为33除以13的个位, 为2.

即商的第200位(从左往右数)数字是5, 商的个位数字是2, 余数是7.

**[难度等级]** ☆☆☆

7. 已知:  $a = \underbrace{199119911991\dots 1991}_{1991\text{个}1991}$ . 问:  $a$ 除以13的余数是几?

**[分析与解]** 因为1991能被13整除, 而  $1991 \div 3 = 663\dots 2$ .

$$\text{有 } a = \underbrace{199119911991\dots 1991}_{1991\text{个}1991}$$

$$= \underbrace{199119911991 \times 1 \underbrace{00\dots 0}_{7964-12\text{个}0}}_{7964-12\text{个}0} + \underbrace{199119911991 \times 1 \underbrace{00\dots 0}_{7964-24\text{个}0}}_{7964-24\text{个}0} + \underbrace{199119911991 \times 1 \underbrace{00\dots 0}_{7964-36\text{个}0}}_{7964-36\text{个}0} +$$

$$+ 199119911991 \times 1 \underbrace{00\dots 0}_{7964-48\text{个}0} + \dots + 199119911991 \times \underbrace{100\dots 0}_{100\text{个}0} + 19911991.$$

所以 $a$ 除以13的余数等于1991除以13的余数.

**[难度等级]** ☆

8. 有一个数, 除以3余数是2, 除以4余数是1. 问这个数除以12余数是几?

**[分析与解]** 我们将这个数加上7, 则这个数能被3整除, 同时也能被4整除, 显然能被12整除, 所以原来这个数除以12的余数为  $12 - 7 = 5$ .

**[难度等级]** ☆☆

9. 某个自然数被247除余63, 被248除也余63. 那么这个自然数被26除余数是多少?

**[分析与解]** 我们将这个数减去63, 则得到的新数能被247整除, 也能被248整除, 而相邻的两个整数互质, 所以得到的新数能被  $247 \times 248$  整除, 显然能被26整除.

于是将新数加上63除以26的余数等于63除以26的余数为11.

所以这个自然数被26除余数是11.

**[难度等级]** ☆☆

10. 一个自然数除以19余9, 除以23余7. 那么这个自然数最小是多少?

**[分析与解]** 这个自然数可以表达为  $19m+9$ , 也可以表达为  $23n+7$ , 则有  $19m+9=23n+7$ , 即  $23n-19m=2$ . 将未知数系数与常数对19取模, 有  $4n \equiv 2 \pmod{19}$ .

$n$ 最小取10时, 才有  $4n \equiv 2 \pmod{19}$ . 所以原来的那个自然数最小为  $23 \times 10 + 7 = 237$ .

## [难度等级] ☆ ☆

11. 如图 15-1, 在一个圆圈上有几十个孔(不到100个). 小明像玩跳棋那样从A孔出发沿着逆时针方向, 每隔几个孔跳一步, 希望一圈以后能跳回到A孔. 他先试着每隔2孔跳一步, 结果只能跳到B孔. 他又试着每隔4孔跳一步, 也只能跳到B孔. 最后他每隔6孔跳一步, 正好回到A孔. 问这个圆圈上共有多少个孔?

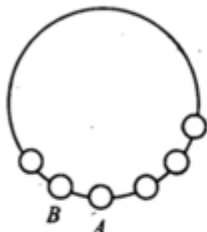


图 15-1

**[分析与解]** 设这个圆圈有 $n$ 个圆孔, 那么有 $n$ 除以3余1,  $n$ 除以5余1,  $n$ 能被7整除.

则将 $n-1$ 是3、5的倍数, 即是15的倍数, 所以 $n=15t+1$ , 又因为 $n$ 是7的倍数, 即 $15t+1=7A$ , 将系数与常数对7取模, 有 $t-1 \equiv 0 \pmod{7}$ , 所以 $t$ 取6或6与7的倍数和.

对应孔数为 $15 \times 6 + 1 = 91$ 或91与105的倍数和, 满足题意的孔数只有91.

即这个圆圈上共有91个孔.

## [难度等级] ☆ ☆ ☆

12. 某住宅区有12家住户, 他们的门牌号分别是1, 2, 3, ..., 12. 他们的电话号码依次是12个连续的六位自然数, 并且每家的电话号码都能被这家的门牌号码整除. 已知这些电话的首位数字都小于6, 并且门牌号码是9的这一家的电话号码也能被13整除, 问这一家的电话号码是什么数?

**[分析与解]** 设这12个连续的自然数为 $n+1, n+2, n+3, \dots, n+12$ , 那么有它们依次能被1, 2, 3, ..., 12整除, 显然有 $n$ 能同时被1, 2, 3, ..., 12整除. 即 $n$ 为1, 2, 3, ..., 12的公倍数.

$[1, 2, 3, \dots, 12] = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 27720$ , 所以 $n$ 是27720的倍数, 设为 $27720k$ . 则有第9家的门牌号码为 $27720k+9$ 为13的倍数, 即 $27720k+9=13A$ , 将系数与常数对13取模有:  $4k+9 \equiv 0 \pmod{13}$ , 所以 $k$ 可以取1或1与13的倍数和.

有要求 $n+1, n+2, n+3, \dots, n+12$ , 为六位数, 且首位数字都小于6, 所以 $k$ 只能取14, 有 $n=27720 \times 14 = 388080$ .

那么门牌号码是9的这一家的电话号码是 $388080+9=388089$ .

[难度等级]



13. 有5000多根牙签, 可按6种规格分成小包. 如果10根一包, 那么最后还剩9根. 如果9根一包, 那么最后还剩8根. 第三、四、五、六种的规格是, 分别以8, 7, 6, 5根为一包, 那么最后也分别剩7, 6, 5, 4根. 原来一共有牙签多少根?

**[分析与解]** 设这包牙签有 $n$ 根, 那么加上1根后为 $n+1$ 根, 此时有 $n+1$ 根牙签即可以分成10根一包, 又可以分成9根一包, 还可以分成8、7、6、5根一包.

所以,  $n+1$ 是10、9、8、7、6、5的倍数, 即它们的公倍数.

$[10, 9, 8, 7, 6, 5] = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$ , 即 $n+1$ 是2520的倍数, 在满足题意下只能是 $2520 \times 2 = 5040$ , 所以 $n = 5039$ .

即原来一共有牙签5039根.

[难度等级]



14. 有一个自然数, 用它分别去除63, 90, 130都有余数, 3个余数的和是25. 这3个余数中最大的一个是多少?

**[分析与解]** 设这个除数为 $M$ , 设它除63, 90, 130所得的余数依次为 $a, b, c$ , 商依次为 $A, B, C$ .

$$63 \div M = A \cdots a$$

$$90 \div M = B \cdots b$$

$$130 \div M = C \cdots c$$

$$a+b+c=25, \text{ 则 } (63+90+130)-(a+b+c)=(A+B+C) \times M, \text{ 即 } 283-25=258=(A+B+C) \times M.$$

所以 $M$ 是258的约数.  $258 = 2 \times 3 \times 43$ , 显然当除数 $M$ 为2、3、6时, 3个余数的和最大为 $3 \times (2-1) = 3$ ,  $3 \times (3-1) = 6$ ,  $3 \times (6-1) = 15$ , 所以均不满足.

而当除数 $M$ 为 $43 \times 2$ ,  $43 \times 3$ ,  $43 \times 2 \times 3$ 时, 63除以它们的余数均是63, 所以也不满足.

那么除数 $M$ 只能是43, 它除63, 90, 130的余数依次为20, 4, 1, 余数的和为25, 满足.

显然这3个余数中最大的为20.

[难度等级]



15. 一个数去除551, 745, 1133, 1327这4个数, 余数都相同. 问这个数最大可能是多少?

**[分析与解]** 这个数 $A$ 除551, 745, 1133, 1327, 所得的余数相同, 所以有551, 745, 1133, 1327两两做差而得到的数一定是除数 $A$ 的倍数.

$$1327-1133=194, 1133-745=388, 745-551=194, 1327-745=582, 1327-551=776, 1133-551=582.$$

这些数都是 $A$ 的倍数, 所以 $A$ 是它们的公约数, 而它们的最大公约数 $(194, 388, 194, 582, 776, 582) = 194$ .

所以, 这个数最大可能为194.

# 16. 仁华思维导引解析 16讲：直线形面积

## 【内容概述】

各种具有一定综合性的直线形面积问题，重点是需要利用同底或同高的两三角形的面积相除的商等于对应高或对应底相除的商这一性质的问题，其中包括四边形和梯形被两条对角线分割而成的4个小三角形之间的面积关系。

## 【典型问题】

### 【难度等级】★

1. 图16-1中三角形ABC的面积是180平方厘米，D是BC的中点，AD的长是AE长的3倍，EF的长是BF长的3倍。那么三角形AEF的面积是多少平方厘米？

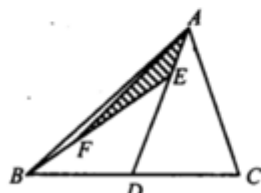


图 16-1

【分析与解】 $\triangle ABD$ ， $\triangle ABC$ 等高，所以面积的比为底的比，有 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$ ，所以 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}$

$\times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 180 = 90$ (平方厘米)。

同理有 $S_{\triangle ABE} = \frac{AE}{AD} \times S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \times 90 = 30$ (平方厘米)， $S_{\triangle AFE} = \frac{FE}{BE} \times S_{\triangle ABE} = \frac{3}{4} \times 30 = 22.5$ (平方厘米)。

即三角形AEF的面积是22.5平方厘米。

### 【难度等级】★★★

2. 如图16-2，把四边形ABCD的各边都延长2倍，得到一个新四边形EFGH。如果ABCD的面积是5平方厘米，则EFGH的面积是多少平方厘米？

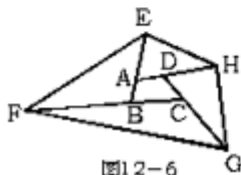
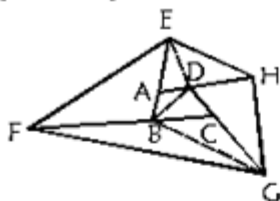


图12-6

**[分析与解]** 方法一：如下图，连接BD，ED，BG，

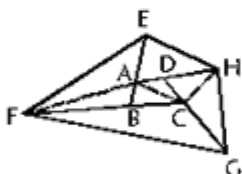


有  $\triangle EAD$ 、 $\triangle ADB$  同高，所以面积比为底的比，有  $S_{\triangle EAD} = \frac{EA}{AB} S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ABD}$ 。同理  $S_{\triangle EAH} =$

$$\frac{AH}{AD} S_{\triangle EAD} = 3S_{\triangle EAD} = 6S_{\triangle ABD}.$$

类似的，还可得  $S_{\triangle FCG} = 6S_{\triangle BCD}$ ，有  $S_{\triangle EAH} + S_{\triangle FCG} = 6(S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}) = 6S_{ABCD} = 30$  (平方厘米)。

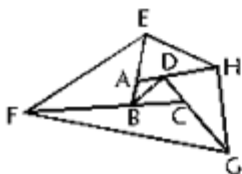
连接AC，AF，HC，还可得  $S_{\triangle EFB} = 6S_{\triangle ABC}$ ， $S_{\triangle DHG} = 6S_{\triangle ACD}$ ，有  $S_{\triangle EFB} + S_{\triangle DHG} = 6(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}) = 6S_{ABCD} = 30$  (平方厘米)。



有四边形EFGH的面积为  $\triangle EAH$ ， $\triangle FCG$ ， $\triangle EFB$ ， $\triangle DHG$ ，ABCD的面积和，即为  $30 + 30 + 5 = 65$  (平方厘米)。

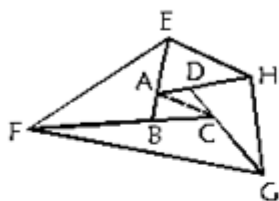
方法二：连接BD，有  $\triangle EAH$ 、 $\triangle ABD$  中  $\angle EAD + \angle BAD = 180^\circ$ ，又夹成两角的边EA、AH，AB、AD的乘

积比， $\frac{EA \times AH}{AB \times AD} = 2 \times 3 = 6$ ，所以  $S_{\triangle EAH} = 6S_{\triangle ABD}$ 。



类似的, 还可得  $S_{\triangle FCG} = 6S_{\triangle BCD}$ , 有  $S_{\triangle EAH} + S_{\triangle FCG} = 6(S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}) = 6S_{ABCD} = 30$  (平方厘米).

连接AC, 还可得  $S_{\triangle EFB} = 6S_{\triangle ABC}$ ,  $S_{\triangle DHG} = 6S_{\triangle ACD}$ , 有  $S_{\triangle EFB} + S_{\triangle DHG} = 6(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}) = 6S_{ABCD} = 30$  (平方厘米).



有四边形EFGH的面积为  $\triangle EAH$ ,  $\triangle FCG$ ,  $\triangle EFB$ ,  $\triangle DHG$ , ABCD的面积和, 即为  $30 + 30 + 5 = 65$  (平方厘米).

**【难度等级】** ☆ ☆

3. 图16-3中的四边形土地的总面积是52公顷, 两条对角线把它分成了4个小三角形, 其中2个小三角形的面积分别是6公顷和7公顷. 那么最大的一个三角形的面积是多少公顷?

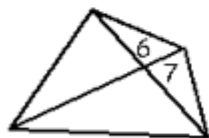
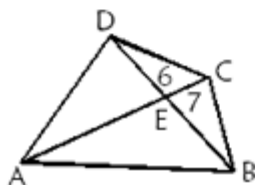


图16-3

**【分析与解】** 方法一: 如下图所示, 为了方便叙述, 将某些点标上字母.



因为 $\triangle ADE$ 、 $\triangle DEC$ 高相同, 所以面积比为底的比, 有 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{AE}{EC}$ , 所以 $S_{\triangle ADE} = \frac{AE}{EC} \times 6$ .

同理有 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BCE}} = \frac{AE}{EC}$ , 所以 $S_{\triangle ABE} = \frac{AE}{EC} \times 7$ .

所以有 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABE$ 的面积比为6:7. 又有它们的面积和为 $52 - (6+7) = 39$ (公顷).

所以 $S_{\triangle ADE} = \frac{6}{6+7} \times 39 = 18$ (公顷),  $S_{\triangle ABE} = \frac{7}{6+7} \times 39 = 21$ (公顷).

显然, 最大的三角形的面积为21公顷.

方法二: 直接运用例2评注中的重要原则, 在 $\triangle ABE$ ,  $\triangle CDE$ 中有 $\angle AEB = \angle CED$ , 所以 $\triangle ABE$ ,  $\triangle CDE$ 的面积比为 $(AE \times EB) : (CE \times DE)$ .

同理有 $\triangle ADE$ ,  $\triangle BCE$ 的面积比为 $(AE \times DE) : (BE \times EC)$ .

所以有 $S_{\triangle ABE} \times S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ADE} \times S_{\triangle BCE}$ , 也就是说在所有凸四边形中, 连接顶点得到2条对角线, 有图形分成上、下、左、右4个部分, 有: 上、下部分的面积之积等于左右部分的面积之积.

即 $S_{\triangle ABE} \times 6 = S_{\triangle ADE} \times 7$ , 所以有 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADE$ 的面积比为7:6,  $S_{\triangle ABE} = \frac{7}{6+7} \times 39 = 21$ (公顷),

$S_{\triangle ADE} = \frac{6}{6+7} \times 39 = 18$ (公顷).

显然, 最大的三角形的面积为21公顷.

**[难度等级]** ☆ ☆

4. 如图16-4, 已知:  $AE = \frac{1}{5}AC$ ,  $CD = \frac{1}{4}BC$ ,  $BF = \frac{1}{6}AB$ , 那么  $\frac{\text{三角形DEF的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}$  等于多少?

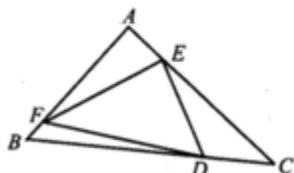
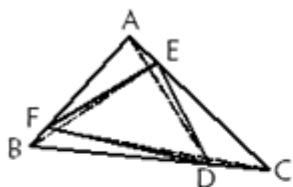


图 16-4

**[分析与解]** 如下图, 连接AD, BE, CF.



有 $\triangle ABE$ ,  $\triangle ABC$ 的高相等, 面积比为底的比, 所有有 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE}{AC}$ , 所以 $S_{\triangle ABE} = \frac{AE}{AC} \times S_{\triangle ABC} =$

$$\frac{1}{5} S_{\triangle ABC}.$$

同理有 $S_{\triangle AEF} = \frac{AF}{AB} S_{\triangle ABE} = \frac{5}{6} S_{\triangle ABE}$ , 即 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$ .

类似的还可以得到 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC}$ ,  $S_{\triangle BDF} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8} S_{\triangle ABC}$ .

所以有 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AEF} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle BDF}) = \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) \times S_{\triangle ABC} = \frac{61}{120} S_{\triangle ABC}$ .

即  $\frac{\text{三角形DEF的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}$  为  $\frac{61}{120}$ .

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆ ☆

5. 如图16-5, 长方形ABCD的面积是2平方厘米,  $EC = 2DE$ , F是DG的中点. 阴影部分的面积是多少平方厘米?

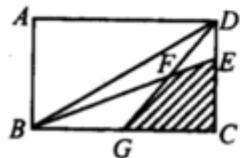
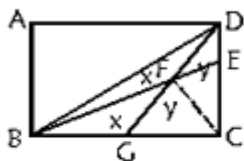


图 16-5



**[分析与解]** 如下图, 连接FC,  $\triangle DBF$ 、 $\triangle BFG$ 的面积相等, 设为 $x$ 平方厘米;  $\triangle FGC$ 、 $\triangle DFC$ 的面积相

等, 设为 $y$ 平方厘米, 那么 $\triangle DEF$ 的面积为 $\frac{1}{3}y$ 平方厘米.



$$S_{\triangle BCD} = 2x + 2y = 1, \quad S_{\triangle BDE} = x + \frac{1}{3}y = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{所以有} \begin{cases} x + y = 0.5 & \text{①} \\ 3x + y = 1 & \text{②} \end{cases}.$$

比较②、①式, ②式左边比①式左边多 $2x$ , ②式右边比①式右边大 $0.5$ , 有 $2x = 0.5$ , 即 $x = 0.25$ ,  $y = 0.2$

5.

$$\text{而阴影部分面积为 } y + \frac{2}{3}y = \frac{5}{3} \times 0.25 = \frac{5}{12} \text{ (平方厘米).}$$

**[难度等级]**



6. 如图16-6, 已知D是BC中点, E是CD的中点, F为AC的中点. 三角形ABC由①~⑥这6部分组成, 其中②比⑤多6平方厘米. 那么三角形ABC的面积是多少平方厘米?

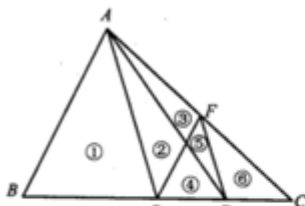


图 16-6

**[分析与解]** 因为E又是DC中点, F为AC中点, 有 $AD = 2FE$ 且FE平行与AD, 则四边形ADEF为梯形.

在梯形ADEF中有 $③ = ④$ ,  $② \times ⑤ = ③ \times ④$ ,  $② : ⑤ = AD^2 : FE^2 = 4$ .

又已知 $② - ⑤ = 6$ , 所以 $⑤ = 6 \div (4 - 1) = 2$ ,  $② = ⑤ \times 4 = 8$ , 所以 $② \times ⑤ = ③ \times ④ = 16$ , 而 $③ = ④$ , 所以 $③ = ④ = 4$ , 梯形ADEF的面积为②、③、④、⑤四块图形的面积和, 为 $8 + 4 + 4 + 2 = 18$ .

有 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ADC$ 的面积比为CE平方与CD平方的比, 即为 $1 : 4$ . 所以 $\triangle ADC$ 面积为梯形ADEF面积的

$$\frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}, \text{ 即为 } 18 \times \frac{4}{3} = 24.$$

因为D是BC中点, 所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的面积相等, 而 $\triangle ABC$ 的面积为 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ADC$ 的面积和, 即为 $24 + 24 = 48$ (平方厘米).

三角形ABC的面积为48平方厘米.

**[难度等级]** ☆☆☆

7. 图16-7是一个各条边分别为5厘米、12厘米、13厘米的直角三角形。如图16-8, 将它的短直角边对折到斜边上去与斜边相重合, 那么图16-8中的阴影部分(即未被盖住的部分)的面积是多少平方厘米?

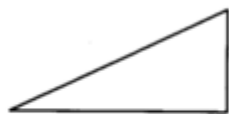
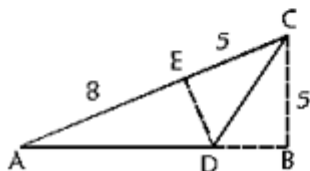


图 16-7



图 16-8

**[分析与解]** 如下图, 为了方便说明, 将某些点标上字母.



有  $\angle ABC$  为直角, 而  $\angle CED = \angle ABC$ , 所以  $\angle CED$  也为直角, 而  $CE = CB = 5$ .

$\triangle ADE$  与  $\triangle CED$  同高, 所以面积比为底的比, 及  $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CED}} = \frac{AE}{EC} = \frac{13-5}{5} = \frac{8}{5}$ , 设  $\triangle ADE$  的面积为“8”, 则  $\triangle CED$  的面积为“5”.

$\triangle CED$  是由  $\triangle CDB$  折叠而成, 所以有  $\triangle CED$ 、 $\triangle CDB$  面积相等, 而  $\triangle ABC$  是由  $\triangle ADE$ 、 $\triangle CED$ 、 $\triangle CDB$

组成, 所以  $S_{\triangle ABC} = \text{“8”} + \text{“5”} + \text{“5”} = \text{“18”}$  对应为  $\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$ , 所以“1”份对应为  $\frac{5}{3}$ , 那么  $\triangle A$

DE 的面积为  $8 \times \frac{5}{3} = 13\frac{1}{3}$  (平方厘米).

即阴影部分的面积为  $13\frac{1}{3}$  平方厘米.

**[难度等级]** ☆☆☆

8. 如图16-9, 在一个梯形内有两个三角形的面积分别为10与12, 已知梯形的上底长是下底长的 $\frac{2}{3}$ . 那么余下阴影部分的面积是多少?

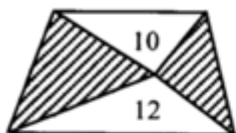


图 16-9

**[分析与解]** 不妨设上底长2, 那么下底长3, 则上面部分的三角形的高为 $10 \div 2 \times 2 = 10$ , 下面部分的三角形的高为 $12 \div 3 \times 2 = 8$ , 则梯形的高为 $10 + 8 = 18$ .

所以梯形的面积为 $\frac{1}{2} \times (2+3) \times 18 = 45$ , 所以余下阴影部分的面积为 $45 - 10 - 12 = 23$ .

**[难度等级]** ☆☆☆

9. 图16-10中ABCD是梯形, 三角形ADE面积是1.8, 三角形ABF的面积是9, 三角形BCF的面积是27. 那么阴影部分面积是多少?

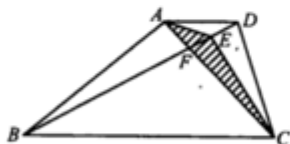


图 16-10

**[分析与解]** 设 $\triangle ADF$ 的面积为“上”,  $\triangle BCF$ 的面积为“下”,  $\triangle ABF$ 的面积为“左”,  $\triangle DCF$ 的面积为“右”.

左=右=9; 上 $\times$ 下=左 $\times$ 右=9 $\times$ 9=81, 而下=27, 所以上=81 $\div$ 27=3.

$\triangle ADE$ 的面积为1.8, 那么 $\triangle AFE$ 的面积为1.2, 则 $EF:DF = S_{\triangle AEF}:S_{\triangle AFD} = 1.2:3 = 0.4$ .

$\triangle CEF$ 与 $\triangle CDF$ 的面积比也为 $EF$ 与 $DF$ 的比, 所以有 $S_{\triangle ACE} = 0.4 \times S_{\triangle ACD} = 0.4 \times (3+9) = 4.8$ .

即阴影部分面积为4.8.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

10. 如图16-11, 梯形ABCD的上底AD长为3厘米, 下底BC长为9厘米, 而三角形ABO的面积为12平方厘米. 则梯形ABCD的面积为多少平方厘米?

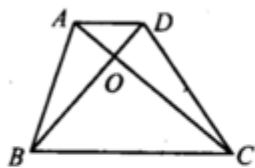


图 16-11

**[分析与解]**  $\triangle ADO$ 与 $\triangle BCO$ 的面积比为AD平方与BC平方的比, 即为9: 81= $\frac{1}{9}$ .

而 $\triangle DCO$ 与 $\triangle ABO$ 的面积相等为12, 又 $S_{\triangle ABO} \times S_{\triangle DCO} = S_{\triangle ADO} \times S_{\triangle BCO} = 12 \times 12 = 144$ ,

因为 $144 \div 9 = 4 \times 4$ , 所以 $S_{\triangle ADO} = 4$ , 则 $S_{\triangle BCO} = 4 \times 9 = 36$ ,

而梯形ABCD的面积为 $\triangle ADO$ 、 $\triangle BCO$ 、 $\triangle ABO$ 、 $\triangle CDO$ 的面积和, 即为 $4 + 36 + 12 + 12 = 64$ (平方厘米).  
即梯形ABCD的面积为64平方厘米.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

11. 如图16-12, BD, CF将长方形ABCD分成4块, 红色三角形面积是4平方厘米, 黄色三角形面积是6平方厘米. 问: 绿色四边形面积是多少平方厘米?

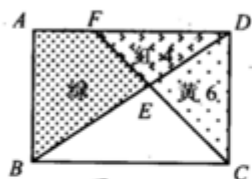


图 16-12

**[分析与解]** 连接BF, 四边形BCDF为梯形, 则 $\triangle BFE$ 的面积与黄色 $\triangle CDE$ 的面积相等为6.  $\triangle FED \times \triangle BCE = S_{\triangle BFE} \times \triangle CDE = 6 \times 6 = 36$ , 所以 $\triangle BCE = 36 \div 4 = 9$ .

$$S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle CDE} = 6 + 9 = 15.$$

又因为BD是长方形ABCD的对角线, 所以 $\triangle ABD$ 的面积等于 $\triangle BCD$ 面积, 所以

$$S_{\text{绿色四边形ABEF}} = S_{\triangle ABD} - S_{\text{红色EFD}} = 15 - 4 = 11 \text{ (平方厘米)}.$$

绿色四边形面积为11平方厘米.

**[难度等级]** ☆ ☆

12. 如图 16-13, 平行四边形 ABCD 周长为 75 厘米. 以 BC 为底时高是 14 厘米; 以 CD 为底时高是 16 厘米. 求平行四边形 ABCD 的面积.

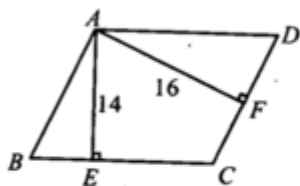


图 16-13

**[分析与解]** 因为平行四边形面积等于底与对应高的积, 所以有  $14 \times BC = 16 \times CD$ , 即  $BC : CD = 8 : 7$ , 而  $2(BC + CD) = 75$ , 所以  $BC = 20$ , 以 BC 为底, 对应高为 14,  $20 \times 14 = 280$ , 所以平行四边形 ABCD 的面积为 280 平方厘米.

**[难度等级]** ☆ ☆

13. 如图 16-14, 一个正方形被分成 4 个小长方形, 它们的面积分别是  $\frac{1}{10}$  平方米、 $\frac{1}{5}$  平方米、 $\frac{3}{10}$  平方米

和  $\frac{2}{5}$  平方米. 已知图中的阴影部分是正方形, 那么它的面积是多少平方米?

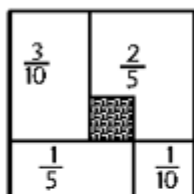
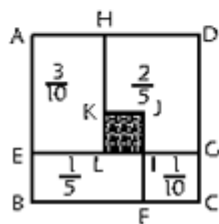


图 16-4

**[分析与解]** 为了方便叙述, 将某些点标上字母, 如下图:



大正方形的面积为  $\frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1$ , 所以大正方形的边长应为1.

上面两个长方形的面积之比为  $\frac{3}{10} : \frac{2}{5} = 3 : 4$ , 所以  $LG = \frac{4}{7}$ .

下面两个长方形的面积之比为  $\frac{1}{5} : \frac{1}{10} = 2 : 1$ , 所以  $IG = \frac{1}{3}$ .

那么  $LI = \frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$ , 那么阴影小正方形的面积为  $\frac{5}{21} \times \frac{5}{21} = \frac{25}{441}$ .

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆ ☆

14. 图16-15中外侧的四边形是一边长为10厘米的正方形, 求阴影部分的面积.

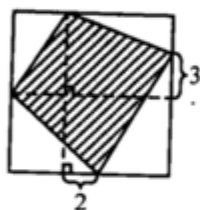
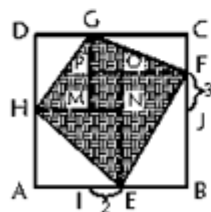


图 16-15

**[分析与解]** 如下图所示, 所以阴影部分在图中为四边形EFGH. 设阴影部分面积为“阴”平方厘米, 正方形内的其他部分面积设为“空”平方厘米.



$\triangle DGH$ 、 $\triangle HMG$ 的面积相等,  $\triangle GCF$ 与 $\triangle GPF$ ;  $\triangle FBE$ 与 $\triangle EOF$ ,  $\triangle HAE$ 与 $\triangle HNE$ 这三对三角形的面积也相等.

阴-空 =  $2 \times 3 = 6$ , 阴+空 =  $10 \times 10 = 100$ .

阴 =  $(6 + 100) \div 2 = 53$ .

即阴影部分的面积为53平方厘米.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆ ☆

15. 如图 16-16, 长方形被其内的一些直线划分成了若干块, 已知边上有 3 块面积分别是 13, 35, 49. 那么图中阴影部分的面积是多少?

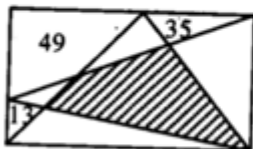
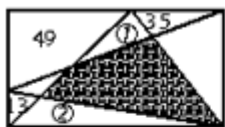


图 16-16

**[分析与解]** 如下图所示, 为了方便叙述, 将部分区域标上序号, 设阴影部分面积为“阴”:



$$(49 + \textcircled{1} + 35) + (13 + \textcircled{2}) = \frac{1}{2} \text{ 矩形的面积,}$$

$$\textcircled{1} + \text{阴} + \textcircled{2} = \frac{1}{2} \text{ 矩形的面积.}$$

比较上面两个式子可得阴影部分的面积为 97.

## 17. 仁华思维导引解析 17 讲：圆与扇形

## 【内容概述】

与圆和扇形的周长、面积相关的几何问题，将所求的对象进行适当的移动，分割或拼补以简化计算是常用的方法。

## 【典型问题】


【难度等级】☆☆

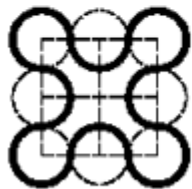
1. 如图 17-1，有 8 个半径为 1 厘米的小圆，用它们的圆周的一部分连成一个花瓣图形，图中的黑点是这些圆的圆心。如果圆周率  $\pi$  取 3.1416，那么花瓣图形的面积是多少平方厘米？



图 17-1

【分析与解】如下图，添上部分辅助线，有花瓣的面积为 4 个边长为 2 的小正方形面积加上 4 个  的面积

减去 4 个  的面积，即加上  $4 \times \frac{3}{4} - 4 \times \frac{1}{2} = 1$  个半径为 1 的圆的面积。



所以花瓣组成的图形的面积为  $4 \times 2 \times 2 + 1 \times 1 \times \pi \approx 16 + 3.1416 = 19.1416$  (平方厘米)。



【难度等级】☆☆☆

2. 如图17-2, 一套绞盘和一组滑轮形成一个提升机构, 其中盘A直径为10厘米, 盘B直径为40厘米, 盘C直径为20厘米. 问: A顺时针方向转动一周时, 重物上升多少厘米?( $\pi$ 取3.14.)

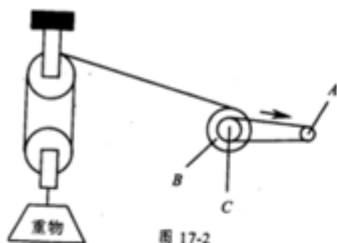


图 17-2

【分析与解】A顺时针转一周时, C顺时针转  $\frac{1}{2}$  周, 同轴的B也顺时针转  $\frac{1}{2}$  周, 从而绳索被拉动的距离等

于B的半个圆周长即  $\pi \times 20 \approx 62.8$ , 这时重物应该上升  $\frac{1}{2} \times 62.8 = 31.4$ .  
即31.4厘米.

【难度等级】☆☆☆

3. 图17-3为一卷紧绕成的牛皮纸, 纸卷直径为20厘米, 中间有一直径为6厘米的卷轴. 已知纸的厚度为0.4毫米, 问: 这卷纸展开后大约有多长?

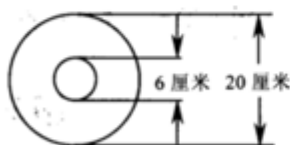


图 17-3

【分析与解】将这卷纸展开后, 它的侧面可以近似的看成一个长方形, 它的长度就等于面积除以宽. 这里的宽就是纸的厚度, 而面积就是一个圆环的面积. 因此

$$\text{纸的长度} \approx \frac{\text{纸卷侧面积}}{\text{纸的厚度}} \approx \frac{3.14 \times 10^2 - 3.14 \times 3^2}{0.04} = \frac{3.14 \times (100 - 9)}{0.04} = 7143.5 (\text{厘米}).$$

所以, 这卷纸展开后大约71.4米.

**[难度等级]** ☆ ☆

4. 如图 17-4, 大小两圆的相交部分(即阴影区域)的面积是大圆面积的  $\frac{4}{15}$ , 是小圆面积的  $\frac{3}{5}$ . 如果量得小圆的半径是 5 厘米, 那么大圆半径是多少厘米?

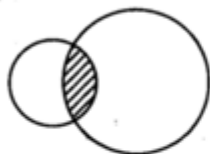


图 17-4

**[分析与解]** 小圆的面积为  $\pi \times 5^2 = 25\pi$ , 则大小圆相交部分面积为  $25\pi \times \frac{3}{5} = 15\pi$ , 那么大圆的面积

为  $15\pi \div \frac{4}{15} = \frac{225}{4}\pi$ , 而  $\frac{225}{4} = \frac{15}{2} \times \frac{15}{2}$ , 所以大圆半径为 7.5 厘米.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

5. 如图 17-5, 在  $18 \times 8$  的方格纸上, 画有 1, 9, 9, 8 四个数字. 那么, 图中的阴影面积占整个方格纸面积的几分之几?

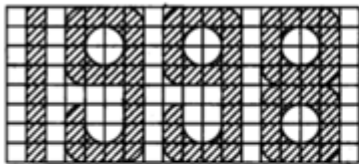






图 17-5

**[分析与解]** 我们数出阴影部分中完整的小正方形有  $8+15+15+16=54$  个, 其中  部分有  $6+6+8=20$  个,  部分有  $6+6+8=20$  个, 而 1 个  和 1 个  正好组成一个完整的小正方形, 所以阴影部分共包含  $54+20=74$  个完整小正方形, 而整个方格纸包含  $8 \times 18=144$  个完整小正方形.

所以图中阴影面积占整个方格纸面积的  $\frac{74}{144}$ , 即  $\frac{37}{72}$ .

【难度等级】☆☆

6. 如图 17-6, 用一块面积为 36 平方厘米的圆形铝板下料, 从中裁出了 7 个同样大小的圆铝板. 问: 所余下的边角料的总面积是多少平方厘米?

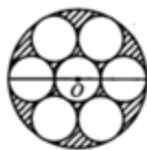


图 17-6

【分析与解】 有小圆直径的 3 倍为大圆的直径, 所以小圆的面积是大圆的  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ , 现在剪去 7 个小

圆, 它们的面积和为  $7 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ , 所以剩下的角料的面积为大圆面积的  $1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$ .

即所余下的边角料的总面积是  $36 \times \frac{2}{9} = 8$  平方厘米.

【难度等级】☆☆☆

7. 如图 17-7, 已知大正方形的面积是 22 平方厘米, 那么小正方形的面积是多少平方厘米?

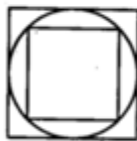
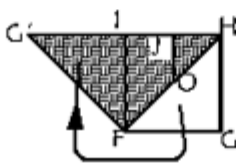
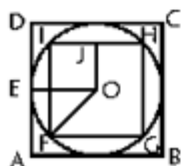


图 17-7

【分析与解】 如下左图所示, 设  $DC = x$ , 则  $x^2 = 22$ , 而小正方形  $FGHI$  的边长为  $HI$ , 我们虽然知道大正方

形内圆的半径  $EO$  为  $\frac{1}{2}x$ , 则直径  $FH$  为  $x$ , 却不易求出小正方形边长  $FG$ .



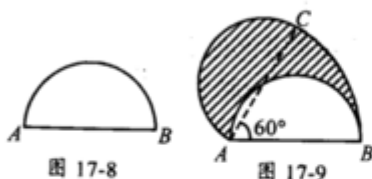
但是, 我们将小正方形内的等腰直角三角形  $FGH$  割补至  $\triangle FIG'$ , 则得到的大三角形  $FHG'$  是以  $FH$  为直

角边的等腰直角三角形, 所以其面积为  $\frac{1}{2} \times 2^2$ , 即为  $\frac{1}{2} \times 22 = 11$ .

所以小正方形的面积是 11 平方厘米.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

8. 图 17-8 是一个直径是 3 厘米的半圆,  $AB$  是直径. 让  $A$  点不动, 把整个半圆逆时针转  $60^\circ$ , 此时  $B$  点移动到  $C$  点, 如图 17-9 所示. 那么图中阴影部分的面积是多少平方厘米? ( $\pi$  取 3.14.)



**[分析与解]** 有图中阴影部分面积等于以  $AC$  为直径的半圆, 以  $AC$  为半径的  $60^\circ$  扇形的面积和减去以  $AB$  为直径的半圆面积, 而两个半圆的直径相等, 所以面积相等.

那么阴影部分的面积等于以  $AC$  为半径的  $60^\circ$  扇形的面积, 即  $\frac{60}{360} \times 3^2 \times \pi \approx 1.5 \times 3.14 = 4.71$  (平方厘米).

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

9. 如图 17-10, 四分之一大圆的半径为 7, 求阴影部分的面积, 其中圆周率  $\pi$  取近似值  $\frac{22}{7}$ .



图 17-10

**[分析与解]** 原题图中的左边部分可以割补至如下图位置, 这样只用先求出四分之一大圆的面积, 再减去其内的等腰直角三角形面积即为所求.

因为四分之一大圆的半径为7, 所以其面积为  $\frac{1}{4} \times 7^2 \times \pi \approx \frac{1}{4} \times 7^2 \times \frac{22}{7} = 38.5$ .



四分之一大圆内的等腰直角三角形ABC的面积为  $\frac{1}{2} \times 7 \times 7 = 24.5$ , 所以阴影部分的面积为  $38.5 - 24.5 = 14$ .

**[难度等级]** ☆ ☆

10. 如图 17-11, 等腰直角三角形的一腰的长是8厘米, 以它的两腰为直径分别画了两个半圆, 那么阴影部分的面积共有多少平方厘米? ( $\pi$  取 3.14.)



图 17-11

**[分析与解]** 如下图, 我们将原题中阴影部分分成①、②、③、④4个部分, 并且这4个部分的面积相等.



有②、③部分的面积和为二分之一圆的面积与其内等腰直角三角形的面积差.

二分之一圆的面积为  $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \pi \approx 8 \times 3.14 = 25.12$ . 其内等腰直角的底为8, 高为4, 所以其面积为  $\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ , 所以②、③部分的面积和为  $25.12 - 16 = 9.12$  (平方厘米).

而①、②、③、④四部分的面积和为②、③部分的面积和的2倍, 即为  $9.12 \times 2 = 18.24$  (平方厘米). 所以, 原题中阴影部分的面积共有 18.24 平方厘米.

[难度等级]



11. 图 17-12 中的 4 个圆的圆心是正方形的 4 个顶点, 它们的公共点是该正方形的中心. 如果每个圆的半径都是 1 厘米, 那么阴影部分的总面积是多少平方厘米?

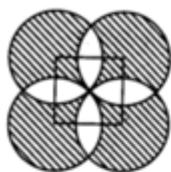


图 17-12

[分析与解] 方法一: 如下图所示

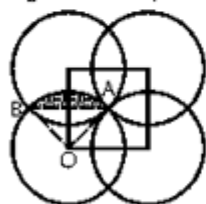


可以将每个圆内的阴影部分拼成一个正方形, 而这个正方形与图 17-12 中的正方形形状、大小相同. 每个正方形的面积为  $(1 \times 1 \div 2) \times 4 = 0.5 \times 4 = 2$  平方厘米, 所以阴影部分的总面积为  $2 \times 4 = 8$  平方厘米.

方法二: 我们可以将图中空白部分分成 8 个形状相同、面积相等的小图形 .

其在圆内的位置如下图, 有弓形 部分面积为  $\frac{1}{4}$  圆与等腰直角三角形 ABO 的面积差, 即为  $\frac{1}{4} \times 1^2$

$$\times \pi - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \approx \frac{1}{4} \times 3.14 - 0.5 = 0.285.$$



原题图中的整个图形的面积为四个圆的面积减去公共的 4 个 的面积, 即 8 个 的面积,

而阴影部分面积又是整个图形面积减去 4 个 的面积, 即 8 个 的面积.

那么, 原题图中阴影部分面积为 4 个圆面积减去 16 个 的面积.

所以, 原题图中阴影部分总面积为  $4 \times 1^2 \times \pi - 16 \times 0.285 \approx 4 \times 3.14 - 4.56 = 8$  (平方厘米).

【难度等级】☆☆☆

12. 如图 17-13, 三角形 ABC 是直角三角形, 阴影部分①比阴影部分②的面积小 28 平方厘米, AB 长 40 厘米. 求 BC 的长度. ( $\pi$  取 3.14.)

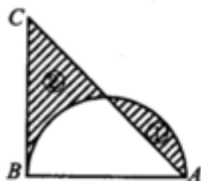
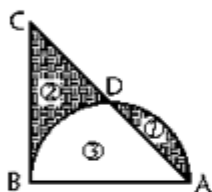


图 17-13

【分析与解】图中半圆的直径为 AB, 所以其面积为  $\frac{1}{2} \times 20^2 \times \pi \approx 200 \times 3.14 = 628$ .



有空白部分③与①的面积和为 628, 又  $② - ① = 28$ , 所以②、③部分的面积和  $628 + 28 = 656$ .

有直角三角形 ABC 的面积为  $\frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 40 \times BC = 656$ . 所以  $BC = 32.8$  (厘米).

【难度等级】☆☆☆

13. 图 17-14 中阴影部分的面积是多少平方厘米? ( $\pi$  取 3.14.)

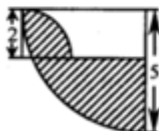
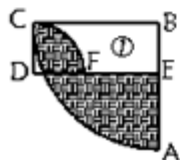


图 17-14

【分析与解】如下图, 为了方便说明标上字母, 并称曲线四边形 BCFE 的面积为 “①”.



将扇形ABC的面积称为“大扇形”，扇形CDF的面积称为“小扇形”，长方形BCDE的面积称为“长方形”。

阴影部分面积=大扇形-①，①=长方形-小扇形。

所以有 阴影部分面积=大扇形-(长方形-小扇形)=大扇形+小扇形-长方形。

$$\frac{1}{4} \times 5^2 \times \pi + \frac{1}{4} \times 2^2 \times \pi - 2 \times 5 \approx 29 \times 3.14 \div 4 - 10 = 12.765 (\text{平方厘米}).$$

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

14. 求图17-15中阴影部分的面积. ( $\pi$ 取3.14.)

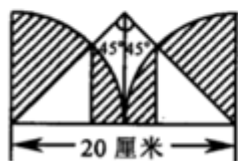
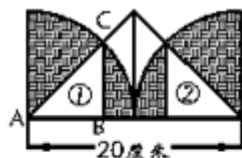
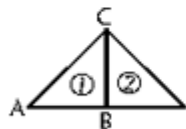


图 17-15

**[分析与解]** 我们只用将两个半径为10厘米的四分之一圆减去空白的①、②部分面积和即可，其中①、②面积相等。



易知①、②部分均是等腰直角三角形，但是①部分的直角边AB的长度未知，单独求①部分面积不易，于是我们将①、②部分平移至一起，如下图所示，则①、②部分变为一个以AC的直角边的等腰直角三角形，而AC为四分之一圆的半径，所以有AC=10。



两个四分之一圆的面积和为  $2 \times \frac{1}{4} \times 10^2 \times \pi \approx 50 \times 3.14 = 157$ ，而①、②部分的面积和为  $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$ ，所以阴影部分的面积为  $157 - 50 = 107$  (平方厘米)。



【难度等级】



15. 平面上有7个大小相同的圆，位置如图17-16所示。如果每个圆的面积都是10，那么阴影部分的面积是多少？

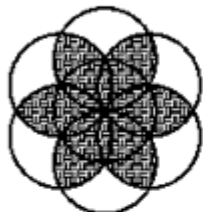
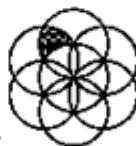


图17-16



【分析与解】题中阴影部分面积可以视为一个完整的圆与6个

阴影部分的面积和。



①



②

而图形①可以通过割补得到图形②，而图形②是一个圆心角为 $60^\circ$ 的扇形，即 $\frac{1}{6}$ 圆。

所以，原题图中阴影部分面积为1个完整圆与6个 $\frac{1}{6}$ 圆，即2个圆的面积。

即原题图中阴影部分面积为 $2 \times 10 = 20$ 。

## 18. 仁华思维导引解析 18讲: 数列与数表综合

## 【内容概述】

等比数列的概念与求和公式, 求具有规律性的数列中的项被小整数除的余数, 涉及分数与小数的, 或综合性较强的数列与数表问题.

## 【典型问题】

## 【难度等级】★

1. 有7根竹竿排成一行, 第一根竹竿长1米, 其余每根长都是前一根的一半, 问: 这7根竹竿的总长是几米?

【分析与解】我们先将7根竹竿的长度一一求出:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ .

它们的和为  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 1\frac{63}{64}$  (米).

这7根竹竿的总长是  $1\frac{63}{64}$  米.

## 【难度等级】★★

2. 甲、乙两厂生产同一种玩具, 甲厂生产的玩具数量每个月保持不变, 乙厂生产的玩具数量每个月增加一倍. 已知一月份甲、乙两厂生产玩具的总数是98件, 二月份甲、乙两厂生产玩具的总数是106件, 那么乙厂生产的玩具数量第一次超过甲厂生产的玩具数量在几月份?

【分析与解】由二月份生产的玩具总数比一月份生产的玩具总数多出的件数是一月份乙厂生产的玩具数.

即一月份乙厂生产了  $106 - 98 = 8$  件, 甲厂生产了  $98 - 8 = 90$  件.

乙厂生产的玩具数量每月增加一倍, 有  $8 \times 2^4 > 90$ ,  $8 \times 2^3 < 90$ , 所以在4月后, 即乙厂生产的玩具数量第一次超过甲厂生产的玩具数量在5月份.

## [难度等级] ☆ ☆

3. 在两位数10, 11, …, 98, 99中, 把每个被7除余2的数, 如16, 23, …等, 改成1.6, 2.3, …等, 而其余的数不变. 问: 经过这样的改变之后, 所有数的和是多少?

[分析与解] 在10~99之间, 被7除2的数有16, 23, …, 93, 共12个数. 这些均缩小到原来的 $\frac{1}{10}$ , 即缩

小了 $\frac{9}{10}$ .

所以经过这样的改变之后, 所有数的和是 $(10+11+12+\cdots+99)-\frac{9}{10}\times(16+23+\cdots+93)=\frac{(10+99)\times 90}{2}-$

$$\frac{9}{10}\times\frac{(16+93)\times 12}{2}=4905-588.6=4316.4.$$

即经过这样的改变之后, 所有数的和是4316.4.

## [难度等级] ☆ ☆

4. 在100以内与77互质的所有奇数之和是多少?

[分析与解]  $77=7\times 11$ , 则100以内不与7互质的奇数有7,  $7\times 3$ ,  $7\times 5$ ,  $7\times 7$ ,  $7\times 9$ ,  $7\times 11$ ,  $7\times 13$ ; 11,  $11\times 3$ ,  $11\times 5$ ,  $11\times 7$ (注意与 $7\times 11$ 重复),  $11\times 9$ , 共11个数.

这11个数的和为 $7\times(1+3+5+\cdots+13)+11\times(1+3+5+7+9)-77=7\times\frac{(1+13)\times 7}{2}+11\times\frac{(1+9)\times 5}{2}-77=541$ .

而100以内的奇数和为 $1+3+5+7+\cdots+99=\frac{(1+99)}{2}\times 50=2500$ .

所以, 在100以内与77互质的所有奇数之和为 $2500-541=1959$ .

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

5. 华罗庚金杯少年数学邀请赛, 第一届在1986年举行, 第二届在1988年举行, 第三届在1991年举行, 以后每两年举行一届. 第一届华杯赛所在年份的各位数字和是 $A_1=1+9+8+6=24$ . 前二届所在年份的各位数字

和是 $A_2=1+9+8+6+1+9+8+8=50$ . 问: 前50届华杯赛所在年份的各位数字和 $A_{50}$ 等于多少?

**[分析与解]** 由题中所给规律知, 前50届在20世纪内有7次赛事, 在21世纪内有43次赛事.

在20世纪内, 已知 $A_2=50$ , 其余5届年份各位数字的和是 $5 \times (1+9+9) + (1+3+5+7+9) = 95 + 25 = 120$ .

从而 $A_7 = A_2 + 120 = 170$ .

在21世纪内的前45届年份的数字之和是:

$2 \times 45 + (1+2+\cdots+8) \times 5 + (1+3+5+7+9) \times 9 = 495$ , 前43届年份的数字和是 $495 - 2 - 8 - 7 - 2 - 8 - 9 = 459$ .

于是 $A_{50} = 170 + 459 = 629$ .

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

6. 黑板上写有从1开始的若干个连续的奇数: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,  $\cdots$ . 擦去其中的一个奇数以后, 剩下的所有奇数之和为1998. 那么, 擦去的奇数是多少?

**[分析与解]**  $1+3+5+\cdots+89 = \frac{(1+89) \times 45}{2} = 2025 > 1998$ ,

$1+3+5+\cdots+87 = \frac{(1+87) \times 44}{2} = 1938 < 1998$ .

所以擦去的奇数是 $2025 - 1998 = 27$ .

[难度等级]



7. 某车间原有工人不少于63人, 在1月底以前的某一天调进了若干工人, 以后, 每天都新调入1人进车间工作. 现知该车间1月份每人每天生产一件产品, 共生产1994件. 试问: 1月几日开始调进工人? 共调进了多少工人?

**[分析与解]** 1月份共有31天, 所以这个车间的原有工人至少生产出了  $63 \times 31 = 1953$  件, 或增加31的倍数, 但因不超过1994件, 所以工厂的原有工人生产了1953或1984件.

所以, 后来调进的工人生产了  $1994 - 1953 = 41$  件, 或  $1994 - 1984 = 10$  件产品.

易知后来调进的工人生产的产品总数是若干个连续的自然数的和, 自然数的个数即是调入的天数  $n$ , 连续的自然数中最小的那个数即是第一次调入的工人数.

有  $41 = 1 \times 41$ , 所以奇约数只有1和41, 这样的数只有一种表达为若干个连续自然数和的形式,  $41 = 20 + 2$

1. 所以调入的次數  $n = 2$ , 第一次调入的人数  $x = 20$ , 共调进人数  $x + n - 1 = 20 + 2 - 1 = 21$  人;

$10 = 2 \times 5$ , 所以奇约数只有1和5, 这样的数只有一种表达为若干个连续自然数和的形式,  $10 = 1 + 2 + 3 +$

4. 所以调入的次數  $n = 4$ , 第一次调入的人数  $x = 1$ , 共调进人数  $x + n - 1 = 1 + 4 - 1 = 4$  人.

所以为: 调入2天, 1月30日开始调入, 共调进21人; 调入4天, 1月28日开始调入, 共调进4人.

[难度等级]



8. 100这个数最多能写成多少个不同的自然数之和?(严格的应为非零自然数)

**[分析与解]** 要求尽可能多的不同自然数之和为100, 则应使每个自然数都尽可能的小.

于是从1开始相加, 有  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

当  $n = 13$  时,  $1 + 2 + 3 + \cdots + 13 = 91$ ; 当  $n = 14$  时,  $1 + 2 + 3 + \cdots + 14 = 105$ .

所以有  $1 + 2 + 3 + \cdots + 11 + 12 + (13 + 9) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 11 + 12 + 22$ , 这13个数的和恰好为100.

即100这个数最多能写成13个不同的自然数之和.

[难度等级]



9. 70个数排成一行, 除了两头的两个数以外, 每个数的3倍都恰好等于它两边两个数的和. 这一行最左边的几个数是这样的: 0, 1, 3, 8, 21, ... 问最右边一个数被6除余几?

**[分析与解]** 观察这些数为0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, ...

这些数除以6的余数依次为0, 1, 3, 2, 3, 1, 0, 5, 3, 4, 3, 5, 0, 1, 3, ...

即每12个数一循环,  $70 \div 12 = 5 \cdots 10$ , 即为4.

所以最右边一个数被6除余4.

## [难度等级] ☆ ☆

10. 一串数排成一行, 它们的规律是这样的: 头两个数都是1, 从第三个数开始, 每一个数都是前两个数的和, 也就是: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... 问: 这串数的前100个数中有多少个偶数?

[分析与解] 注意观察不难发现每3个数中有1个偶数, 这个规律不难解释, 因为第一、二个数均是奇数, 而每个数都是前两个数的和, 所以第三个数为偶数, 则第四个数为奇数, ...

$100 \div 3 = 33 \cdots 1$ , 所以这串数的前100个数中有33个偶数.

## [难度等级] ☆ ☆ ☆

11. 有一串数如下: 1, 2, 4, 7, 11, 16, ... 它的规律是: 由1开始, 加1, 加2, 加3, ..., 依次逐个产生这串数, 直到第50个数为止. 那么在这50个数中, 被3除余1的数有多少个?

[分析与解] 这串数除以3的余数列, 与由1开始依次加1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, ... 所得数串除以3的余数列相同, 为

1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, ...

是以1, 2, 1三个数为周期的数串. 也就是说从第1个数开始, 每3个数中有2个数被3除余1.

有  $50 \div 3 = 16 \cdots 2$ , 所以有  $16 \times 2 + 1 = 33$  个数被3除余1.

## [难度等级] ☆ ☆

12. 已知一串有规律的数:  $1, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \frac{34}{55}$  那么, 在这串数中, 从左往右数, 第10个数是多少?

[分析与解] 每个分数的分子等于前一个分数的分母加分子, 每一个分数的分母等于分子加前一个分数的分母, 所以第6、7、8、9、10个分数依次为:

$$\frac{89}{144}, \frac{233}{377}, \frac{610}{987}, \frac{1597}{2584}, \frac{4181}{6765},$$

所以第10个分数是  $\frac{4181}{6765}$ .

# [难度等级] ☆ ☆

13. 观察下面的数表:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}; \\ \frac{2}{1}, \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}; \\ \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}; \\ \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

根据前五行数所表达的规律, 说明:  $\frac{1991}{1949}$  这个数位于由上而下的第几行? 在这一行中, 它位于由左向右的第几个?

**[分析与解]** 注意到, 第一行的每个数的分子、分母之和等于2, 第二行的每个数的分子、分母之和等于3,  $\dots$ , 第五行的每个数的分子、分母之和等于6.

由此可看到一个规律, 就是每行各数的分子、分母之和等于行数加1.

其次, 很明显可以看出, 每行第一个数的分母是1, 第二个数的分母是2,  $\dots$ , 即自左起第几个数, 其分母就是几.

因此,  $\frac{1991}{1949}$  所在的行数等于  $1991+1949-1=3939$ . 而在第3939行中,  $\frac{1991}{1949}$  位于从左至右第1949个数.

[难度等级]



14. 今要在一个圆周上标出一些数, 第一次先把圆周二等分, 在两个分点旁分别标上  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{3}$ , 如图18-1

所示. 第二次把两段半圆弧二等分, 在分点旁标上相邻两分点旁所标两数的和  $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ , 如图18-2所示.

第三次把4段圆弧二等分, 并在4个分点旁标上相邻两分点旁所标两数的和  $1\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$ ,  $1\frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$ , 如图18-3所示. 如此继续下去, 当第八次标完数以后, 圆周上所有已标数的总和是多少?

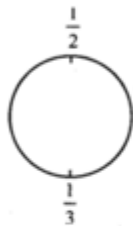


图 18-1

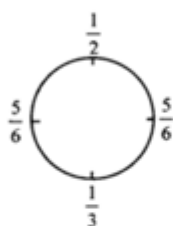


图 18-2

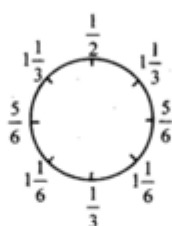


图 18-3

**[分析与解]** 因为增加的每个数都是原来相邻两个数之和, 所以每次增加数的总和恰好是原来所有数总和的2倍, 也就是说每次标完数后圆周上所有数的总和是前一步标完数后圆周上所有数的总和的3倍, 于是, 第八次标完数后圆周上所有数的总和是:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1822\frac{1}{2}.$$

[难度等级]



15. 设1, 3, 9, 27, 81, 243是6个给定的数, 从这6个数中每次或者取一个, 或者取几个不同的数求和(每个数只能取一次), 可以得到一个新数, 这样共得到63个新数. 如果把它们从小到大依次排列起来是1, 3, 4, 9, 10, 12, ..., 那么, 其中的第60个数是多少?

**[分析与解]** 最大的数(第63个数)是  $1+3+9+27+81+243=364$ , 第60个数(倒数第4个数)是  $364-1-3=360$ .



## 19. 仁华思维导引解析 19 讲: 数字谜综合之二

## 【内容概述】

涉及质数与合数等概念, 以及需要利用数的整除特征、分解质因数等数论手段解的数字谜问题.

## 【典型问题】

## 【难度等级】



1. 试将 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 分别填入下面的方框中, 每个数字只用一次:  
 $\square\square\square$  (这是一个三位数),  $\square\square\square$  (这是一个三位数),  $\square$  (这是一个一位数),  
 使得这三个数中任意两个都互质. 已知其中一个三位数已填好, 它是 714, 求其他两个数.

【分析与解】  $714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$ .

由此可以看出, 要使最下面方框中的数与 714 互质, 在剩下未填的数字 2, 3, 5, 6 中只能选 5, 也就是说, 第三个数只能是 5.

现在来讨论第二个数的三个方框中应该怎样填 2, 3, 6 这三个数字.

因为任意两个偶数都有公约数 2, 而 714 是偶数, 所以第二个的三位数不能是偶数, 因此个位数字只能是 3. 这样一来, 第二个三位数只能是 263 或 623. 但是 623 能被 7 整除, 所以 623 与 714 不互质.

最后来看 263 这个数. 通过检验可知: 714 的质因数 2, 3, 7 和 17 都不是 263 的因数, 所以 714 与 263 这两个数互质.

显然, 263 与 5 也互质.

因此, 其他两个数为 263 和 5.

## 【难度等级】



2. 如图 19-1, 4 个小三角形的顶点处有 6 个圆圈. 如果在这些圆圈中分别填上 6 个质数, 它们的和是 20, 而且每个小三角形 3 个顶点上的数之和相等. 问这 6 个质数的积是多少?

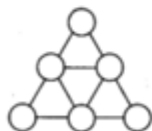


图 19-1

【分析与解】 设每个小三角形三个顶点上的数的和都是  $S$ . 4 个小三角形的和  $S$  相加时, 中间三角形每个顶点上的数被算了 3 次, 所以

$$4S = 2S + 20, \text{ 即 } S = 10.$$

这样, 每个小三角形顶点上出现的三个质数只能是 2, 3, 5, 从而六个质数是 2, 2, 3, 3, 5, 5, 它们的积是:

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 900.$$

### [难度等级] ☆☆☆

3. 在图19-2. 所示算式的每个方框内填入一个数字, 要求所填的数字都是质数, 并使竖式成立.

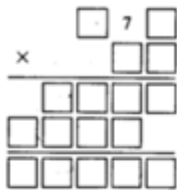


图 19-2

**[分析与解]** 记两个乘数为  $\overline{a7b}$  和  $cd$ , 其中  $a, b, c, d$  的值只能取自 2、3、5 或 7.

由已知条件,  $b$  与  $c$  相乘的个位数字仍为质数, 这只能是  $b$  与  $c$  中有一个是 5 另一个是 3、5 或 7, 如果  $b$  不是 5, 那么  $c$  必然是 5, 但  $73 \times 5 = 365$ 、 $77 \times 5 = 385$  的十位数字都不是质数. 因此  $b$  是 5,  $c$  是 3、5、7 中的一个, 同样道理,  $d$  也是 3、5、7 中的一个.

再由已知条件,  $\overline{a75}$  与  $c$  的乘积的各位数字全是质数, 所以乘积肯定大于 2000, 满足积大于 2000 且  $a, c$  取质数, 只有以下六种情况:

$775 \times 3 = 2325$ ,  $575 \times 5 = 2875$ ,  $775 \times 5 = 3875$ ,  $375 \times 7 = 2625$ ,  $575 \times 7 = 4025$ ,  $775 \times 7 = 5425$ .

其中只有第一组的结果各位数字是质数, 因此  $a=7$ ,  $c=3$  同理,  $d$  也是 3.

最终算式即为  $775 \times 33 = 25575$ .

### [难度等级] ☆☆

4. 把一个两位数的个位数字与其十位数字交换后得到一个新数, 它与原来的数加起来恰好是某个自然数的平方. 那么这个和数是多少?

**[分析与解]** 设原来的两位数为  $\overline{xy}$ , 则交换十位数字与个位数字后的两位数为  $\overline{yx}$ , 两个数的和为

$$\overline{xy} + \overline{yx} = 10x + y + x + 10y = 11(x + y)$$

是 11 的倍数, 因为它是完全平方数, 所以也是  $11 \times 11 = 121$  的倍数. 但是这个和小于  $100 + 100 = 200 < 121 \times 2$ , 所以这个和数只能是 121.

### 【难度等级】☆☆

5. 迎杯 $\times$ 春杯=好好好

在上面的乘法算式中,不同的汉字表示不同的数字,相同的汉字表示相同的数字.那么“迎+春+杯+好”之和等于多少?

**[分析与解]** 好好好=好 $\times$ 111=好 $\times$ 3 $\times$ 37.

那么37必定是“迎杯”或“春杯”的约数,不妨设为“迎杯”的约数,那么“迎杯”为37或74.

当“迎杯”为37时,“春杯”为“好” $\times$ 3,且“杯”为7,此时“春杯”为27,“好”为9,“迎+春+杯+好”之和为3+2+7+9=21;

当“迎杯”为74时,“春杯”为“好” $\times$ 3 $\div$ 2,且“杯”为4,此时“春杯”为24,“好”为16,显然不满足.

所以“迎+春+杯+好”之和为3+2+7+9=21.

### 【难度等级】☆☆☆

6. 数数 $\times$ 科学=学数学

在上面的算式中,每一汉字代表一个数字,不同的汉字代表不同的数字.那么“数学”所代表的两位数是多少?

**[分析与解]** “学数学”是“数数”的倍数,因而是“数”与11的倍数.

学数学=学 $\times$ 101+数 $\times$ 10是“数”的倍数,而101是质数,所以“学”一定是“数”的倍数.

又“学数学”是11的倍数,因而:“学”+“学”-“数”为11的倍数.

因为“学”是“数”的倍数,从上式推出“数”是11的约数,所以“数”=1,“学”=(11+1) $\div$ 2=6.

“数学”所代表的两位数是16.

### 【难度等级】☆☆

7. 将1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9这9个数字分别填入下式的各个方框中,可使此等式成立:

$$\square\square\times\square\square=\square\square\times\square\square\square=3634.$$

填好后得到三个两位数和一个三位数,这三个两位数中最大的一个是多少?

**[分析与解]**  $3634=2\times 23\times 79$ ,表达为两个两位数的乘积只能是 $(2\times 23)\times 79$ ,即 $46\times 79$ ;

表达为一个两位数与一个三位数的乘积,只能是 $23\times (2\times 79)=23\times 158$ .

满足题意,所以这三个两位数中最大的一个是79.

### [难度等级] ☆☆☆

8. 六年级的学生总人数是三位数, 其中男生占  $\frac{3}{5}$ , 男生人数也是三位数, 而组成以上两个三位数的6个数字, 恰好是1, 2, 3, 4, 5, 6. 那么六年级共有学生多少人?

[分析与解] 设六年级总人数为  $\overline{xyz}$ , 其中男生有  $\overline{abc}$  人.

有  $\overline{xyz} \times \frac{3}{5} = \overline{abc}$ , 即  $5\overline{abc} = 3\overline{xyz}$ , 其中  $\overline{xyz}$  为5的倍数, 所以  $z$  为5. 而  $\overline{abc}$  为3的倍数, 所以其数字和  $a+b+c$  应为3的倍数, 则在剩下的5个数中,  $a, b, c$  (不计顺序) 只能为1, 2, 6或1, 2, 3或4, 2, 6或4, 2, 3.

而  $c$  不能是偶数 (不然  $z$  应为0), 所以只能是1, 2, 6或1, 2, 3或4, 2, 3可能满足;

又因为  $\overline{xyz}$  最大为645, 对应  $\overline{abc}$  为387, 即  $c$  不超过3.

于是  $\overline{abc}$  有可能为261, 123, 321, 213, 231, 243这6种可能, 验证只有当  $\overline{abc} = 261$  时, 对应  $\overline{xyz}$  为  $261 \div 3 \times 5 = 435$ .

所以六年级共有学生435人.

### [难度等级] ☆☆☆

9. 图19-3是三位数与一位数相乘的算式, 在每个方格填入一个数字, 使算式成立. 那么共有多少种不同的填法?

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ \times \quad \square \\ \hline 1 \ 9 \ 9 \ 2 \end{array}$$

图19-3

[分析与解] 设  $1992 = \overline{abc} \times d$  ( $a, b, c, d$  可以相同), 有  $1992 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 83$ , 其中  $d$  可以取2, 3, 4, 6, 8这5种, 对应的算式填法有5种.

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

10. 在图19-4残缺的算式中, 只写出3个数字1, 其余的数字都不是1. 那么这个算式的乘积是多少?

$$\begin{array}{r}
 \square\square \\
 \times \quad \square\square \\
 \hline
 1\square\square \\
 \square\square 1 \\
 \hline
 \square\square 1\square
 \end{array}$$

图19-4

**[分析与解]** 如下图所示, 为了方便说明, 将某些数用字母标出.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} \boxed{A} & \boxed{B} \end{array} \quad \cdots \cdots \text{第1行} \\
 \times \quad \begin{array}{cc} \boxed{C} & \boxed{D} \end{array} \quad \cdots \cdots \text{第2行} \\
 \hline
 1 \quad \boxed{0} \quad \square \quad \cdots \cdots \text{第3行} \\
 \square \quad \square \quad 1 \quad \cdots \cdots \text{第4行} \\
 \hline
 \square \quad \square \quad 1 \quad \square \quad \cdots \cdots \text{第5行}
 \end{array}$$

第四行□□1对应为 $AB \times C$ , 其个位为1, 那么 $B \times C$ 的个位数字也是1, 而B、C又均不能为1, 所以只有3×7, 9×9对应为1, 那么B为9、7或3.

第三行10□对应为 $AB \times D$ , 可能为100、102、103、104、105、106、107、108、109.

103、107、109均为质数, 没有两位数的约数, 不满足;

100、105没有个位数字为3、7、9的约数, 不满足;

102=17×6、104=13×8、**106=53×2**、**108=27×4**, 但102、104对应的AB中A均为1, 不满足.

所以AB为53或27.

当AB为27时, 第四行为 $27 \times C$ , 且个位数字为1, 所以只能为 $27 \times 3 = 81$ , 但是不是三位数, 不满足.

当AB为53时, 第四行为 $53 \times C$ , 且个位数字为1, 所以只能为 $53 \times 7 = 371$ , 因此被乘数必须为53, 乘数为72, 积为3816.

【难度等级】



11. 图19-5是一个残缺的乘法竖式, 在每个方框中填入一个不是2的数字, 可使其成为正确的算式. 那么所得的乘积是多少?

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 22\square \\
 \hline
 \square \square \square \square \square
 \end{array}$$

图19-5

【分析与解】方法一: 由已知条件, 最后结果的首位数字不能是2, 因此只能是3. 这说明千位上作加法时有进位.

百位上相加时最多向千位进2, 所以要使千位数有进位, 其中的未知数字至少是 $10-2-2=6$ , 即三个三位数加数中的第二个至少是600. 因为它是第一个乘数与一个一位数字的乘积, 因此该乘数肯定大于60.

第二个乘数的百位数字与第一个乘数的乘积在220~229之间, 所以它只能是3(否则 $4 \times 60 > 229$ ). 而220~229之间个位数字不是2且是3的倍数的只有 $225=3 \times 75$ 和 $228=3 \times 76$ .

如果第一乘数是75, 又第二个乘数的百位数字是3, 那么它们的乘积小于 $75 \times 400 = 30000$ , 它的首位数字也就不可能是3, 不满足.

乘数是76, 另一个乘数就要大于 $30000 \div 76 > 394$ , 那么只有395、396、397、398、399这五种可能, 它们与76的乘积依次为30020、30096、30172、30248、30324. 由于各个数字都不能是2, 所以只有 $76 \times 396 = 30096$ 满足题目的要求.

算式中所得的乘积为30096.

方法二: 为了方便说明, 将某些位置标上字母, 如下图所示, 因为千位最多进1, 而最终的乘积万位又不能是2, 所以只能是3:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots \text{第1行} \\
 \times \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline C & D & E \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots \text{第2行} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots \text{第3行} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots \text{第4行} \\
 22\square \quad \dots\dots \text{第5行} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots \text{第6行}
 \end{array}$$

而第5行对应为 $22\square = AB \times C$ , 其中C不可能为1, 又不能为2, 那么最小为

3.

当C为3时,  $22\square = AB \times 3$ , 那么A只能为7, B只能为4、5或6,

(1) 当B为4时,  $74 \times 32 = 232$ , 第5行个位为2, 不满足题意;

(2) 当B为5时,  $AB \times CDE$ 对应为 $75 \times 3DE$ , 小于30000, 不满足;

(3) 当B为6时,  $AB \times CDE$ 对应为 $76 \times 3DE$ , D只能为9, 此时第4行对应为 $A \times D$ 即 $76 \times 9 = 684$ . 因为 $30000 \div 76 > 394$ , 所以39E只有395、396、397、398、399这五种可能, 它们与76的乘积依次为30020、30096、30172、30248、30324. 由于各个数字都不能是2, 所以只有 $76 \times 396 = 30096$ 满足题目的要求.

验证C取其他值时没有满足题意的解.

所以算式中所得的乘积为30096.

[难度等级]



12. 请补全图19-6这个残缺的除法竖式, 问这个除法算式的商数是多少?

$$\begin{array}{r}
 \square\square\square \\
 \square\square \overline{) \square\square\square 28} \\
 \underline{\square\square} \phantom{0} \\
 \square\square\square \\
 \underline{\square\square\square} \\
 0
 \end{array}$$

图19-6

[分析与解] 易知除号下第二行的首位为9. 除号下第一行开头两位为1、0, 商的十位为0.

$$\begin{array}{r}
 \boxed{A} \boxed{0} \boxed{B} \\
 \boxed{C} \boxed{D} \overline{) \boxed{1} \boxed{0} \square 28} \quad \text{第一行} \\
 \underline{\boxed{9} \square} \phantom{00} \quad \text{第二行} \\
 \square \boxed{2} \boxed{8} \quad \text{第三行} \\
 \underline{\square \boxed{2} \boxed{8}} \quad \text{第四行} \\
 0
 \end{array}$$

 第二行9□对应为 $CD \times A$ ,

(1) 9□不可能为90, 不然第一行前三位10□与第二行90的差不可能为一位数, 不满足第三行特征;

 (2) 9□对应为91时, 第三行的首位对应为 $10\square - 91$ , 最小为9, 所以只能为9, 那么有 $91 = CD \times A$ ,  $928 = CD \times B$ , 不可能;

 (3) 9□对应为92时, 第三行的首位对应为 $10\square - 92$ , 最小为8, 所以可能为8、9,

 ① 如果为9, 那么对应应有 $92 = CD \times A$ ,  $928 = CD \times B$ , 不可能;

 ② 如果为8, 那么对应应有 $92 = CD \times A$ ,  $828 = CD \times B$ , 不难得知 $A = 1$ ,  $B = 9$ ,  $CD = 92$ 时满足, 那么被除数为 $92 \times 109 = 10028$ .

验证没有其他的情况满足, 所以这个除法算式的商数为109.

$$\begin{array}{r}
 \boxed{1} \boxed{0} \boxed{9} \\
 \boxed{9} \boxed{2} \overline{) \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} 28} \\
 \underline{\boxed{9} \boxed{2}} \phantom{00} \\
 \boxed{8} \boxed{2} \boxed{8} \\
 \underline{\boxed{8} \boxed{2} \boxed{8}} \\
 0
 \end{array}$$

### [难度等级] ☆☆☆

13. 若用相同汉字表示相同数字, 不同汉字表示不同数字, 则在等式

$$\text{学习好勤动脑} \times 5 = \text{勤动脑学习好} \times 8$$

中, “学习好勤动脑”所表示的六位数最小是多少?

[分析与解] 设“学习好”为 $x$ , “勤动脑”为 $y$ , 则“学习好勤动脑”为 $1000x+y$ , “勤动脑学习好”为 $1000y+x$ ,

有 $(1000x+y) \times 5 = (1000y+x) \times 8$ , 化简有 $4992x = 7995y$ ,  $4992 = 128 \times 3 \times 13$ ,  $7995 = 3 \times 41 \times 5 \times 13$ , 即

$$28x = 205y, \text{ 有 } \begin{cases} x=205 \\ y=128 \end{cases}, \begin{cases} x=410 \\ y=256 \end{cases}, \begin{cases} x=615 \\ y=384 \end{cases}, \begin{cases} x=820 \\ y=512 \end{cases}.$$

所以, “学习好勤动脑”所表示的六位数可能为205128, 410256, 615384, 820512, 但是不能有重复数字, 所以只有410256, 615384满足, 其中最小的为410256.

### [难度等级] ☆☆☆

14. 互为反序的两个自然数的积是92565, 求这两个互为反序的自然数. (例如102和201, 35和53, 11和11, …, 称为互为反序的数, 但120和21不是互为反序的数.)

[分析与解] 首先可以确定这两个自然数均为三位数, 不然得到的乘积不可能为五位数.

设 $\overline{ABC} \times \overline{CBA} = 92565$ , 那么C、A中必定有一个为5, 一个为奇数. 不妨设C为5.

$\overline{AB5} \times \overline{5BA} = 92565$ , 那么A只能为1,  $\overline{1B5} \times \overline{5B1} = 92565$ . 又注意到 $92565 = 3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 11 \times 17$ .

验证只有 $\overline{1B5}$ 为165时满足, 所以这两个自然数为165、561.

### [难度等级] ☆☆☆

15. 开放的中国盼奥运 $\times \square = \text{盼盼盼盼盼盼盼盼}$

上面的横式中不同的汉字代表不同的数字,  $\square$ 代表某个一位数. 那么, “盼”字所代表的数字是多少?

[分析与解] 我们从“ $\square$ ”中所应填入的一位自然数开始分析, 设A=“开放的中国盼奥运”, B=“盼盼盼盼盼盼盼盼”.

于是 $B = A \times \square$ . 显然 $\square$ 内不会是1.

由于 $\square$ 是B的约数, 因此 $\square$ 不会是“盼”所代表的数字, 要不然A就等于111111111, 这说明 $\square$ 内不会是5, 而111111111不是7的倍数, 说明 $\square$ 内也不会是7.

如果 $\square$ 内填3, 则“盼”只能是1或2, 当“盼”是1时,  $B \div 3 = 37037037$ , 不符合要求; 当“盼”是2时,  $B \div 3 = 74074074$ , 也不符合要求; 说明 $\square$ 内不能填入3.

$\square$ 内也不会是偶数数字2、4、6和8. 因为 $\square$ 内是偶数数字时, “盼”也是偶数数字,  $\square$ 内显然不会是2, 如果 $\square$ 内是4, 根据被4整除的特征, “盼”只能是8, 这时A就成了一个九位数, 说明 $\square$ 内不能是4; 类似的, 可以说明 $\square$ 内不能是6和8.

综上所述,  $\square$ 的数字只能是9, 这时利用 $\underbrace{111\dots1}_{9\text{个}1} = 12345679 \times 9$ , 可以得到

$\underbrace{\text{盼盼盼}\dots\text{盼}}_{9\text{个盼}} = 12345679 \times 9 \times \text{盼}$ , 于是“盼”代表的数字必须同时满足下面两个条件:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ \textcircled{1} & \times & & & & & & & \text{盼}, \end{array} \quad \textcircled{2} \diamond = \text{“盼”},$$

经验证知 $\diamond = \text{盼} = 7$ , 即 $12345679 \times 9 = 77777777$ .



## 20. 仁华思维导引解析 20 讲：计数综合之一

## 【内容概述】

涉及整数知识、具有数字或数阵图形式的计数问题。这里需要综合运用加法原理和乘法原理，即恰当地分类与分步，并应注意对称性。

## 【典型问题】

## 【难度等级】☆☆

1. 恰好能被 6, 7, 8, 9 整除的五位数有多少个？

【分析与解】6、7、8、9 的最小公倍数是 504，五位数中，最小的是 10000，最大为 99999。

因为  $10000 \div 504 = 19 \cdots 424$ ， $99999 \div 504 = 198 \cdots 207$ 。

所以，五位数中，能被 504 整除的数有  $198 - 19 = 179$  个。

所以恰好能被 6, 7, 8, 9 整除的五位数有 179 个。

## 【难度等级】☆☆☆

2. 小明的两个衣服口袋中各有 13 张卡片，每张卡片上分别写着 1, 2, 3, ..., 13. 如果从这两个口袋中各拿出一张卡片来计算它们所写两数的乘积，可以得到许多不相等的乘积。那么，其中能被 6 整除的乘积共有多少个？

【分析与解】这些积中能被 6 整除的最大一个是  $13 \times 12 = 26 \times 6$ ，最小是 6。但在  $1 \times 6 \sim 26 \times 6$  之间的 6 的倍数并非都是两张卡片上的乘积，其中有  $25 \times 6$ ， $23 \times 6$ ， $21 \times 6$ ， $19 \times 6$ ， $17 \times 6$  这五个不是。

所以所求的积共有  $26 - 5 = 21$  个。

## 【难度等级】☆☆☆

3. 1, 2, 3, 4, 5, 6 这 6 个数中，选 3 个数使它们的和能被 3 整除。那么不同的选法有几种？

【分析与解】被 3 除余 1 的有 1, 4；被 3 除余 2 的有 2, 5；能被 3 整除的有 3, 6。

从这 6 个数中选出 3 个数，使它们的和能被 3 整除，则只能是从上面 3 类中各选一个，因为每类中的选择是相互独立的，所以共有  $2 \times 2 \times 2 = 8$  种不同的选法。

### [难度等级] ☆☆☆

4. 同时满足以下条件的分数共有多少个?

①大于  $\frac{1}{6}$ , 并且小于  $\frac{1}{5}$ ;

②分子和分母都是质数;

③分母是两位数.

[分析与解] 由①知分子是大于1, 小于20的质数.

如果分子是2, 那么这个分数应该在  $\frac{2}{10}$  与  $\frac{2}{12}$  之间, 在这之间的只有  $\frac{2}{11}$  符合要求.

如果分子是3, 那么这个分数应该在  $\frac{3}{15}$  与  $\frac{3}{18}$  之间, 15与18之间只有质数17, 所以分数是  $\frac{3}{17}$ .

同样的道理, 当分子是5, 7, 11, 13, 17, 19时可以得到下表.

分子	分数	分子	分数
2	$\frac{2}{11}$	11	$\frac{11}{59}, \frac{11}{61}$
3	$\frac{3}{17}$	13	$\frac{13}{67}, \frac{13}{71}, \frac{13}{73}$
5	$\frac{5}{29}$	17	$\frac{17}{89}, \frac{17}{97}$
7	$\frac{7}{37}, \frac{7}{41}$	19	$\frac{19}{97}$

于是, 同时满足题中条件的分数共13个.

### [难度等级] ☆☆☆

5. 一个六位数能被11整除, 它的各位数字是非零且互不相同的. 将这个六位数的6个数字重新排列, 最少还能排出多少个能被11整除的六位数?

[分析与解] 设这个六位数为  $\overline{abcdef}$ , 则有  $(a+c+e)$ 、 $(b+d+f)$  的差为0或11的倍数. 且  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$  均不为0, 任何一个数作为首位都是一个六位数.

先考虑a、c、e偶数位内，b、d、f奇数位内的组内交换，有  $P_3^3 \times P_3^3 = 36$  种顺序；

再考虑形如  $\overline{badcfe}$  这种奇数位与偶数位的组间调换，也有有  $P_3^3 \times P_3^3 = 36$  种顺序。

所以，用均不为0的a、b、c、d、e、f最少可以排出  $36+36=72$  个能被11整除的数(包含原来的  $\overline{abcdef}$ )。  
所以最少还能排出  $72-1=71$  个能被11整除的六位数。

**[难度等级]** ☆ ☆

6. 在大于等于1998，小于等于8991的整数中，个位数字与十位数字不同的数共有多少个？

**[分析与解]** 先考虑2000~8999之间这7000个数，个位数字与十位数字不同的数共有  $7 \times 10 \times P_{10}^2 = 6300$ 。

但是1998，8992~8998这些数的个位数字与十位数字也不同，且1998在1998~8991内，8992~8998这7个数不在1998~8991之内。

所以在1998~8991之内的个位数字与十位数字不同的有  $6300+1-7=6294$  个。

**[难度等级]** ☆ ☆ ☆

7. 个位、十位、百位上的3个数字之和等于12的三位数共有多少个？

**[分析与解]**  $12=0+6+6=0+5+7=0+4+8=0+3+9=1+5+6=1+4+7=1+3+8=1+2+9=2+5+5=2+4+6=2+3+7=2+2+8=3+4+5=3+3+6=4+4+4$ 。

其中三个数字均不相等且不含0的有7组，每组有  $P_3^3$  种排法，共  $7 \times P_3^3 = 42$  种排法；

其中三个数字有只有2个相等且不含0的有3组，每组有  $P_3^3 \div 2$  种排法，共有  $3 \times P_3^3 \div 2 = 9$  种排法；

其中三个数字均相等且不含0的只有1组，每组只有1种排法；

在含有0的数组中，三个数字均不相同的有3组，每组有  $2 \times P_2^2$  种排法，共有  $3 \times 2 \times P_2^2 = 12$  种排法；

在含有0的数组中，二个数字相等的只有1组，每组有  $2 \times P_2^2 \div 2$  种排法，共有2种排法。

所以，满足条件的三位数共有  $42+9+1+12+2=66$  个。

**[难度等级]** ☆☆☆

8. 一个非零自然数, 如果它顺着看和倒过来看都是一样的, 那么称这个数为“回文数”. 例如1331, 7, 202都是回文数, 而220则不是回文数. 问: 从一位到六位的回文数一共有多少个? 其中的第1996个数是多少?

**[分析与解]** 我们将回文数分为一位、二位、三位、…、六位来逐组计算.

所有的一位数均是“回文数”, 即有9个;

在二位数中, 必须为 $\overline{aa}$ 形式的, 即有9个(因为首位不能为0, 下同);

在三位数中, 必须为 $\overline{aba}$  (a、b可相同, 在本题中, 不同的字母代表的数可以相同)形式的, 即有 $9 \times 10 = 90$ 个;

在四位数中, 必须为 $\overline{abba}$ 形式的, 即有 $9 \times 10$ 个;

在五位数中, 必须为 $\overline{abcba}$ 形式的, 即有 $9 \times 10 \times 10 = 900$ 个;

在六位数中, 必须为 $\overline{abccba}$ 形式的, 即有 $9 \times 10 \times 10 = 900$ 个.

所以共有 $9+9+90+90+900+900=1998$ 个, 最大的为999999, 其次为998899, 再次为997799.

而第1996个数为倒数第3个数, 即为997799.

所以, 从一位到六位的回文数一共有1998个, 其中的第1996个数是997799.

**[难度等级]** ☆☆☆

9. 一种电子表在6时24分30秒时的显示为6: 24<sub>30</sub>, 那么从8时到9时这段时间里, 此表的5个数字都不相同的时刻一共有多少个?

**[分析与解]** 设A: BC<sub>DE</sub>是满足题意的时刻, 有A为8, B、D应从0, 1, 2, 3, 4, 5这6个数字中选择两

个不同的数字, 所以有 $P_6^2$ 种选法, 而C、E应从剩下的7个数字中选择两个不同的数字, 所以有 $P_7^2$ 种选法,

所以共有 $P_6^2 \times P_7^2 = 1260$ 种选法.

即从8时到9时这段时间里, 此表的5个数字都不相同的时刻一共有1260个.

[难度等级]



10. 有些五位数的各位数字均取自1, 2, 3, 4, 5, 并且任意相邻两位数字(大减小)的差都是1. 问这样的五位数共有多少个?

[分析与解] 如下表, 我们一一列出当首位数字是5, 4, 3时的情况.

首位数字	5	4	3
所有满足题意的数字列表	$5-4-\begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$ $3-4-\begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$ $2-3-\begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$	$5-4-\begin{cases} 5-4 \\ 3-\begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases} \end{cases}$ $4-4-\begin{cases} 5-4 \\ 3-\begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases} \end{cases}$ $3-3-\begin{cases} 4 \\ 2-\begin{cases} 4 \\ 2 \\ 1-2 \end{cases} \end{cases}$	$5-4-\begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$ $4-4-\begin{cases} 4-\begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases} \\ 3-\begin{cases} 3 \\ 2-\begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$ $3-3-\begin{cases} 4-\begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases} \\ 2-\begin{cases} 3 \\ 2-\begin{cases} 3 \\ 1-2-\begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$
满足题意的数字个数	6	9	12

因为对称的缘故, 当首位数字为1时的情形等同与首位数字为5时的情形, 首位数字为2时的情形等同于首位数字为4时的情形.

所以, 满足题意的五位数共有  $6+9+12+9+6=42$  个.

[难度等级]



11. 用数字1, 2组成一个八位数, 其中至少连续四位都是1的有多少个?

[分析与解] 当只有四个连续的1时, 可以为11112\*\*\*, 211112\*\*, \*211112\*, \*\*211112, \*\*\*21111, 因为\*号处可以任意填写1或2, 所以这些数依次有  $2^3, 2^2, 2^2, 2^2, 2^3$  个, 共28个;

当有五个连续的1时, 可以为111112\*\*, 2111112\*, \*2111112, \*\*211111, 依次有  $2^2, 2, 2, 2^2$  个, 共12个;

当有六个连续的1时, 可以为1111112\*, 21111112, \*2111111, 依次有2, 1, 2个, 共5个;

当有七个连续的1时, 可以为11111112, 21111111, 共2个;

当有八个连续的1时, 只能是11111111, 共1个.

所以满足条件的八位数有  $28+12+5+2+1=48$  个.

### [难度等级] ☆☆☆

12. 在1001, 1002, ..., 2000这1000个自然数中, 可以找到多少对相邻的自然数, 满足它们相加时不进位?

**[分析与解]** 设  $\overline{abcd}$ ,  $\overline{xyzw}$  为满足条件的两个连续自然数, 有  $\overline{xyzw} = \overline{abcd} + 1$ , 我们只用考察  $\overline{abcd}$  的取值情况即可.

我们先不考虑数字9的情况(因为d取9, 则w为0, 也有可能不进位),

则d只能取0, 1, 2, 3, 4; c只能取0, 1, 2, 3, 4; b只能取0, 1, 2, 3, 4; 对应的有  $5 \times 5 \times 5 = 125$  组数.

当d=9时, 有  $\overline{abc9}$  的下一个数为  $\overline{ab(c+1)0}$ , 要想在求和时不进位, 必须  $c+(c+1) \leq 9$ , 所以c此时只能取0, 1, 2, 3, 4; 而b也只能取0, 1, 2, 3, 4; 共有  $5 \times 5 = 25$  组数.

当  $\overline{cd} = 99$  时, 有  $\overline{ab99}$  的下一个数为  $\overline{a(b+1)00}$ , 要想在求和时不进位, 必须  $b+(b+1) \leq 9$ , 所以b此时只能取0, 1, 2, 3, 4; 共有5组数.

所以, 在1001, 1002, ..., 2000这1000个自然数中, 可以找到  $125+25+5=155$  对相邻的自然数, 满足它们相加时不进位.

### [难度等级] ☆☆☆

13. 把1995, 1996, 1997, 1998, 1999这5个数分别填入图20-1中的东、南、西、北、中5个方格内, 使横、竖3个数的和相等. 那么共有多少种不同填法?



图20-1

**[分析与解]** 显然只要有“东”+“西”=“南”+“北”即可, 剩下的一个数字即为“中”.

因为题中五个数的千位、百位、十位均相同, 所以只用考虑个位数字, 显然有  $5+9=6+8$ ,  $5+8=6+7$ ,  $6+9=7+8$ .

先考察  $5+9=6+8$ , 可以对应为“东”+“西”=“南”+“北”, 因为“东”、“西”可以调换, “南”、“北”可以对调, 有  $2 \times 2 = 4$  种填法, 而“东、西”, “南、北”可以整体对调, 于是有  $4 \times 2 = 8$  种填法.

$5+8=6+7$ ,  $6+9=7+8$  同理均有8种填法, 所以共有  $8 \times 3 = 24$  种不同的填法.

**[难度等级]**



14. 在图 20-2 的空格内各填入一个一位数, 使同一行内左面的数比右面的数大, 同一列内上面的数比下面的数小, 并且方格内的 6 个数字互不相同, 例如图 20-3 为一种填法. 那么共有多少种不同的填法?

		2
		3

图 20-2

6	4	2
7	5	3

图 20-3

**[分析与解]** 为了方便说明, 标上字母:

C	D	2
A	B	3

要注意到, A 最大, D 最小, B、C 的位置可以互换.

但是, D 只能取 4, 5, 6, 因为如果取 7, 就找不到 3 个比它大的一位数了.

当 D 取 4, 5, 6 时分别剩下 5, 4, 3 个一位大数. 有 B、C 可以互换位置.

所有不同的填法共  $C_3^3 \times 2 + C_4^3 \times 2 + C_5^3 \times 2 = 10 \times 2 + 4 \times 2 + 1 \times 2 = 30$  种.

**[难度等级]**



15. 从 1 至 9 这 9 个数字中挑出 6 个不同的数填在图 20-4 的 6 个圆圈内, 使任意相邻两个圆圈内数字之和都是质数. 那么共能找出多少种不同的挑法? (6 个数字相同、排列次序不同的都算同一种.)

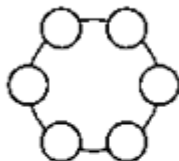


图 20-4

**[分析与解]** 显然任意两个相邻圆圈中的数一奇一偶, 因此, 应从 2、4、6、8 中选 3 个数填入 3 个不相邻的圆圈内.

第一种情况: 填入 2、4、6, 这时 3 与 9 不能同时填入 (否则总有一个与 6 相邻, 和 3+6 或 9+6 不是质数). 没有 3、9 的有 1 种; 有 3 或 9 的, 其他 3 个奇数 1、5、7 要去掉 1 个, 因而有  $2 \times 3 = 6$  种, 共  $1+6=7$  种.

第二种情况: 填入 2、4、8. 这时 7 不能填入 (因为 7+2, 7+8 都不是质数), 从其余 4 个奇数中选 3 个, 有 4 种选法, 都符合要求.

第三种情况: 填入 2、6、8. 这时 7 不能填入, 而 3 与 9 只能任选 1 个, 因而有 2 种选法.

第四种情况: 填入 4、6、8. 这时 3 与 9 只能任选 1 个, 1 与 7 也只能任选 1 个, 因而有  $2 \times 2 = 4$  种选法.

总共有  $7+4+2+4=17$  种选法.