前　言

一个学科竞赛活动能否成功，除了评奖、组织等工作以外，命题是很关键的。“希望杯”全国数学邀请赛自 1990 年以来成功地举办了 16 届，可说是久盛不衰，这中间，试题出得好，起了特别重要的作用。中学生们都愿意研究这些试题，因为在很多试题中蕴含着的内在趣味吸引着他们，因为解答这些试题所用到的数学知识大多没有超出他们在学校里学到的数学内容，还因为在研究如何破解这些试题的过程中，自己的思维和数学能力受到了挑战，他们在经历了重重困惑、碰壁和努力之后终于获得彻悟的结果，那是多么美好的感觉！他们感受到了数学内在的魅力，数学的美，这种科学思维的美让他们感动，这种美引发的愉悦可能会引导青年人走向毕生的科学追求。

如果说“希望杯”全国数学邀请赛的全部试题都有丰富的内涵，显然是言过其实，但是其中确有那么一部分题目委实很精彩，它们有比较丰富的背景知识和比较广阔的思维空间，如果能从不同的视角和不同的层面去分析和研究它们，那么从中吸收到的知识和思维的营养必定远远超过这些题目本身。正是出于这样的认识，我们特意编辑出版了《历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解》(初一、初二、高一、高二各一册)，作者中有“希望杯”命题委员会的成员，他们中有资深的数学工作者、大学教授、杰出的中学数学教师，他们都有很好的数学功底，每年都为“希望杯”全国数学邀请赛编拟许多漂亮的题目；还有多年来对“希望杯”邀请赛历届试题深有研究的中学数学教师，他们曾经培养出金银牌选手，并对“希望杯”试题发表过颇有见地的文章。这些作者在“希望杯”命题委员会的指导下，从 2000 多道“希望杯”全国数学邀请赛试题中精

选出了一部分，对这些题目作了尽可能详尽的分析，力求充分展示题目的内涵，于是成就了这套书。我们期望中学生读了此书，数学水平能有显著提高，中学教师读了此书，能从中得到诸多启示，从而提高自己的教学水平。这个期望能否达到，最有权威的评判当然是本书的读者们。我们真诚地希望读者对本书的不当之处提出批评和意见，我们力求再版时努力做进一步的修改。

周国镇

2005年11月22日

注：**周国镇**　数学教育专家，《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；"希望杯"全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任。

目　录

第 1 讲　集　合

集合是高中数学的一个基本概念，是进一步学习函数的基础. 学习集合，就要熟练地掌握集合的有关概念、性质和运算法则，并会用集合的语言和方法表示数量关系，解决数学问题.

一、基础知识

1. 集合的概念

(1)在高中数学中集合是一个不定义的基本概念，课本中给出的是描述性定义：

某些指定的对象合在一起就成为一个集合，简称为集. 集合常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，元素常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

(2)集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 集合中的元素有三个特征：确定性，互异性，无序性.

(3)元素与集合的从属关系有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种，分别记为 $a\in A$ 和 $a\notin A$.

(4)表示集合有三种方法：列举，描述，图示(用一条封闭曲线表示).

(5)常用数集的记法：

$\mathbf{N}$(自然数集)，$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$(正自然数集)，$\mathbf{Z}$(整数集)，$\mathbf{Q}$(有理数集)，$\mathbf{R}$(实数集).

(6)集合的分类

有限集：含有有限个元素的集合.(不含任何元素的集合叫空

集,记为$\varnothing$.)

无限集:含有无限个元素的集合.

集合与集合的关系有:包含、不包含和相等.分别记作 $A\subseteq B$,$A\not\subseteq B$和 $A=B$.

2. 集合之间的关系

(1)规定:空集是任何集合的子集.即$\varnothing\subseteq A$;

(2)若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则 $A=B$;

(3)若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;

(4)$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$;$A\cup B\supseteq A$,$A\cup B\supseteq B$.

(5)$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;

(6)$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

3. 集合的运算

有四种:

(1)交集:$A\cap B=\{x|x\in A$,且 $x\in B\}$;

(2)并集:$A\cup B=\{x|x\in A$,或 $x\in B\}$;

(3)补集:$\complement_U A=\{x|x\in U,x\notin A\}$;

(4)差集:$A\backslash B=\{x|x\in A,x\notin B\}$(一般只在竞赛试题中出现)

集合的运算性质(U 表示全集)

①等幂律:$A\cap A=A$,$A\cup A=A$;

②同一律:$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cup\varnothing=A$;$A\cap U=A$,$A\cup U=U$;

③交换律:$A\cap B=B\cap A$,$A\cup B=B\cup A$;

④互补律:$A\cup(\complement_U A)=U$,$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$;

⑤反演律:$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$.

4. 集合中的计数问题

(1)含有 n 个元素的集合的子集数为 2^n 个;真子集数为 2^n-1 个;非空真子集数为 2^n-2 个.

(2)若 card(A)表示有限集合 A 的元素个数,则

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B);$$

$$\mathrm{card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(A \cap B) - \mathrm{card}(B \cap C) - \mathrm{card}(C \cap A) + \mathrm{card}(A \cap B \cap C)$$

注意:以上公式仅当集合 A,B,C 是有限集时成立.

二、例题

例 1　已知集合 M 满足 $\{2,5\}\subseteq M\subset\{1,2,3,4,5\}$,则不同的 M 的个数是________.

第 11 届(2000 年)试题

解　符合条件的集合有 $\{2,5\}$;$\{2,5,1\}$,$\{2,5,3\}$,$\{2,5,4\}$;$\{2,5,1,3\}$,$\{2,5,1,4\}$,$\{2,5,4,3\}$,所以不同的 M 的个数是7 个.

评析　以上用穷举法列出了符合条件的所有集合.

变换思考问题的角度,我们可把问题等价转化为:

设 $\{2,5\}\subseteq P\cup\{2,5\}\subset\{1,2,3,4,5\}$,$P\cap\{2,5\}=\varnothing$,则 $\varnothing\subseteq P\subset\{1,3,4\}$,且不同的集合 P 与不同的集合 M 构成一一对应,它们的个数均与 $\{1,3,4\}$ 的真子集个数相同,为 $2^3-1=7$ 个.

思考　上面的结论可推广为

若集合 M 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq M\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+m}\}$,则不同的 M 的个数是 2^m 个.

若集合 M 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq M\subset\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+m}\}$,则不同的 M 的个数是 2^m-1 个.

若集合 M 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset M\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+m}\}$,则不同的 M 的个数是 2^m-1 个.

若集合 M 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset M\subset\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+m}\}$,则不同的 M 的个数是 2^m-2 个.

当 $n=0$ 时,$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 可看做空集 $\varnothing$,上面四项分别对应:含有 m 个元素的集合,它有子集 2^m 个;真子集 2^m-1 个;非空子集

2^m-1个；非空真子集2^m-2个.

例2　集合$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，A是S的一个子集，当$x\in A$时，若有$x-1\notin A$，且$x+1\notin A$，则称x为A的一个“孤立元素”，那么S无“孤立元素”的4元子集的个数是________.

第14届(2003年)试题

解　4个元素为连续自然数的子集有3个：$\{1,2,3,4\}$，$\{2,3,4,5\}$，$\{3,4,5,6\}$；不都连续的子集也有3个：$\{1,2,4,5\}$，$\{1,2,5,6\}$，$\{2,3,5,6\}$，所以S无“孤立元素”的4元子集的个数是6个.

评析　这是一个新定义问题，题中定义了“孤立元素”x：$x\in A$，$x-1\notin A$，且$x+1\notin A$，属于即时性学习的试题. 从反面思考，如果集合A中不含有“孤立元素”，则对任意$x\notin A$，必有$x-1\in A$，或$x+1\in A$，即A中任一元素，至少有另一个与它是连续相连的.

因此，6个单元素子集$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$中的元素都是“孤立元素”.

思考　可以进一步写出所有的S无“孤立元素”的子集：

二个元素的子集有5个：$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$，$\{4,5\}$，$\{5,6\}$；

三个元素的子集有4个：$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，$\{3,4,5\}$，$\{4,5,6\}$；

五个元素的子集有4个：$\{1,2,3,4,5\}$，$\{2,3,4,5,6\}$，$\{1,2,4,5,6\}$，$\{1,2,3,5,6\}$；

六个元素的子集有1个：$\{1,2,3,4,5,6\}$.

因此S无“孤立元素”的子集共有：$5+4+6+4+1=20$个.

进一步可知S有“孤立元素”的子集数：$2^6-20=44$个.

值得继续研究的是推广问题：集合$\{1,2,3,4,5,\cdots,n\}$无“孤立元素”的子集的个数有多少个？

我们可列出前面几个：

n	1	2	3	4	5	6	…
无“孤立元素”的子集个数a_n	0	1	3	6	11	20	…

对 k 个元素的子集个数 b_n 和 b_{n+1} 的关系，当 $k \leqslant 6$ 时，可以比较容易求出.

二个元素的子集多 1 个：$\{n,n+1\}$，$b_{n+1}=b_n+1$；

三个元素的子集多 1 个：$\{n-1,n,n+1\}$，$b_{n+1}=b_n+1$；

四个元素的子集多 $n-2$ 个：$\{1,2,n,n+1\}$，$\{2,3,n,n+1\}$，…，$\{n-2,n-1,n,n+1\}$，$b_{n+1}=b_n+n-2$；

五个元素的子集多 $2n-7$ 个：

$\{1,2,3,n,n+1\}$，$\{2,3,4,n,n+1\}$，…，$\{n-3,n-2,n-1,n,n+1\}$，共 $n-3$ 个；

$\{1,2,n-1,n,n+1\}$，$\{2,3,n-1,n,n+1\}$，…，$\{n-4,n-3,n-1,n,n+1\}$，共 $n-4$ 个；

六个元素的子集多 $\frac{1}{2}(n^2-2n-3)$ 个：

$\{1,2,3,n-1,n,n+1\}$，$\{2,3,4,n-1,n,n+1\}$，…，$\{n-5,n-4,n-3,n-1,n,n+1\}$，共 $n-5$ 个；

$\{1,2,3,4,n,n+1\}$，$\{1,2,4,5,n,n+1\}$，…，$\{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n+1\}$，共 C_{n-1}^2 个；

$$C_{n-1}^2+(n-5)=\frac{1}{2}(n^2-2n-3)$$

但 k 较大时，至今还没有找到这样的一个递推公式能给出后续答案.

例 3 如果在关于 x 的三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 中，至少有一个二次方程有实数解，则实数 a 的取值范围是________.

第 9 届(1998 年)山西、江西、天津赛区试题

解 三个方程至少有一个方程有实根的反面情况仅有一种：三个方程均没有实根. 先求出反面情况时 a 的取值范围，则所得范围的补集就是正面情况的答案.

设三个方程均无实根，则有

$$\begin{cases}\Delta_1 = 16a^2 - 4(-4a+3) < 0 \\ \Delta_2 = (a-1)^2 - 4a^2 < 0 \\ \Delta_3 = 4a^2 - 4(-2a) < 0\end{cases},$$

$$\text{解得}\begin{cases}-\dfrac{3}{2} < a < \dfrac{1}{2} \\ a < -1 \text{ 或 } a > \dfrac{1}{3} \\ -2 < a < 0\end{cases}\text{,即} -\dfrac{3}{2} < a < -1.$$

所以当 $a \geqslant -1$ 或 $a \leqslant -\frac{3}{2}$ 时,三个方程至少有一个方程有实根.

评析 “至少”、“至多”型问题常可从反面思考,有可能使情况变得简单一些.本题还用到了“判别式法”、“补集法”(全集 U),也可以从正面直接求解,即分别求出三个方程有实根时($\Delta \geqslant 0$)a 的取值范围,再将三个范围并起来,即求集合的并集.

解 由三个二次方程的判别式大于或等于零,得到

$$16a^2 - 4(3-4a) \geqslant 0, (a-1)^2 - 4a^2 \geqslant 0, 4a^2 + 8a \geqslant 0$$

求出解集后求它们的并集,得 $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [-1, +\infty)$.

两种解法,都要求对不等式解集的交、并、补概念和运算理解透彻.

思考 在数学解题中经常使用反面思考的方法,这包括反证法.牛顿曾经说过:“反证法是数学家最精良的武器之一.”一般来讲,反证法常用来证明的题型有:命题的结论以“否定形式”、“至少”或“至多”、“惟一”、“无限”形式出现的命题;或者否定结论更明显、更具体、更简单的命题;或者直接证明难以下手的命题,改变其思维方向,从结论入手进行反面思考,问题可能解决得十分干脆.

例 4 函数 $y=f(2^x)$ 的定义域是$(-1,1)$,设函数 $y=f(\log_x 2)$ 的定义域为 A,则 $A \cap \mathbf{Z}=$________.(其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合)

第 3 届(1992 年)试题

解 因为 $-1<x<1$,所以 $\frac{1}{2}<2^x<2$,

由$\frac{1}{2}<\log_x 2<2$，$\frac{1}{2}<\frac{\lg 2}{\lg x}<2$，

解得$\sqrt{2}<x<4$，又因$x\in\mathbf{Z}$，所以，$x=2,3$，$A\cap\mathbf{Z}=\{2,3\}$.

评析 求复合函数的定义域，一般可根据对应法则所作用的对象的取值范围来确定，通常要转化为求不等式(组)的解，如含有参数，则还要分类讨论. 其结果要用集合或区间表示.

思考 一般地，如果复合函数$f[g(x)]$的定义域为D，记$M=\{u\mid u=g(x),x\in D\}$，$f[\varphi(x)]$的定义域为$A$，则$A=\{x\mid\varphi(x)\in M\}$.

例5 f是$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$上的一一映射，函数$y=f(x)$严格递增，方程$x=f(x)$的解集为P，方程$x=f[f(x)]$的解集为Q，则(　　)

(A)$P\subsetneqq Q$.　　(B)$P=Q$.

(C)$Q\subsetneqq P$.　　(D)$P\not\subseteq Q$且$Q\not\subseteq P$.

第1届(1990年)试题

解 任取$x_0\in P$，$x_0=f(x_0)$，有$x_0=f[f(x_0)]$，所以$x_0\in Q$. 这表明$P\subseteq Q$；另一方面，任取$y_0\in Q$，则$y_0=f[f(y_0)]$. 下面用反证法证明$y_0=f(y_0)$.

假设$y_0\neq f(y_0)$，当$y_0>f(y_0)$时，由于函数$y=f(x)$是严格递增的，则有$f(y_0)>f[f(y_0)]=y_0$，但这与所设$y_0>f(y_0)$矛盾！

可见$y_0<f(y_0)$，由严格递增还可知：$f(y_0)<f[f(y_0)]=y_0$，又与所设$y_0<f(y_0)$矛盾. 可见只有$y_0=f(y_0)$，这表明$y_0\in P$，即又有$Q\subseteq P$.

由$P\subseteq Q$，且$Q\subseteq P$，知$P=Q$. 选(B).

评析 要判断集合P与集合Q之间的关系，必须根据集合的定义进行证明. 本题求解的关键是由$y_0=f[f(y_0)]$猜测出$y_0=f(y_0)$，然后用反证法、分类讨论等数学思想方法进行求解.

注 反证法是从反面的角度思考问题的间接证明方法，即：肯定题设而否定结论，从而导出矛盾推理而得. 法国数学家阿达玛(Hadamard)对反证法的实质作过概括：“若肯定定理的假设而否

定其结论,就会导致矛盾”.具体地讲,反证法就是从否定命题的结论入手,并把对命题结论的否定作为推理的已知条件,进行正确的逻辑推理,使之得到与已知条件、已知公理、定理、法则或者已经证明为正确的命题等相矛盾,矛盾的原因是假设不成立,所以肯定了命题的结论,从而使命题获得了证明.

反证法的依据是:逻辑思维规律中的“矛盾律”和“排中律”.在同一思维过程中,两个互相矛盾的判断不能同时都为真,至少有一个是假的,这就是逻辑思维中的“矛盾律”;两个互相矛盾的判断不能同时都假,简单地说“A 或者非 A”,这就是逻辑思维中的“排中律”.反证法在其证明过程中,得到矛盾的判断,根据“矛盾律”,这些矛盾的判断不能同时为真,必有一假,而已知条件、已知公理、定理、法则或者已经证明为正确的命题都是真的,所以“否定的结论”必为假.

再根据“排中律”,结论与“否定的结论”这一对立的互相否定的判断不能同时为假,必有一真,于是我们得到原结论必为真.所以反证法是以逻辑思维的基本规律和理论为依据的.

反证法的证题模式可以简要地概括为“否定→推理→否定”.即从否定结论开始,经过正确无误的推理导致逻辑矛盾,达到新的否定,可以认为反证法的基本思想就是“否定之否定”.应用反证法证明的主要三步是:否定结论→推导出矛盾→结论成立.实施的具体步骤是:

第一步,反设:作出与求证结论相反的假设;

第二步,归谬:将反设作为条件,并由此通过一系列的正确推理导出矛盾;

第三步,结论:说明反设不成立,从而肯定原命题成立.

在应用反证法证题时,一定要用到“反设”进行推理,否则就不是反证法.用反证法证题时,如果欲证明的命题只有一种情况,那么只要将这种情况驳倒了就可以,这种反证法又叫“归谬法”;如果结论的反面情况有多种,那么必须将所有的反面情况一一驳倒,才能推断原结论成立,这种证法又叫“穷举法”.

思考 注意到本题是一个选择题，因此也可利用求解选择题的特殊化技巧，排除错误的选择支.

解 取特殊函数，令 $f(x)=2x$，则 $f[f(x)]=4x$，方程 $x=f(x)$ 的解集 $P=\{0\}$，方程 $x=f[f(x)]$ 的解集 $Q=\{0\}$，于是 $P=Q$，排除(A)、(C)、(D). 选(B).

本题的结果太奇妙了！自然会启发我们思考如下一些问题：

(1)题设条件"f 是$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$上的一一映射，函数 $y=f(x)$ 严格递增"是否可减弱？当函数 $y=f(x)$ 不是严格递增时，结论还成立吗？

答案是否定的. 请看：

反例 当 $f(x)=x^2-2$ 时，$f(x)=x$ 即 $x^2-2=x$，解集 $P=\{-1,2\}$；$f[f(x)]=x$ 即 $(x^2-2)^2-2=x$，求解这一方程可用增元法，转化为方程组来解.

设 $y=x^2-2$，则 $\begin{cases}y=x^2-2\\x=y^2-2\end{cases}$，

可求得 $Q=\left\{-1,2,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$，因此 $P\neq Q$.

(2)拓广："方程 $x=f[f(x)]$ 的解集为 Q"改为一般形式"方程 $x=f\{f\cdots[f(x)]\}$ (n 个 f) 的解集为 Q"，结论不变.

(3)延伸：将条件"方程 $x=f(x)$ 的解集为 P，方程 $x=f[f(x)]$ 的解集为 Q"改为"不等式 $x\geqslant f(x)$ 的解集为 P，不等式 $x\geqslant f[f(x)]$ 的解集为 Q"，结论不变，仍成立 $P=Q$. 只要将上述证明过程修改即可.

证明 任取 $x_0\in P$，$x_0\geqslant f(x_0)$，有 $x_0\geqslant f(x_0)\geqslant f[f(x_0)]$，所以 $x_0\in Q$. 这表明 $P\subseteq Q$；另一方面，任取 $y_0\in Q$，则 $y_0\geqslant f[f(y_0)]$. 下面用反证法证明 $y_0\geqslant f(y_0)$.

假设 $y_0<f(y_0)$，由于函数 $y=f(x)$ 是严格递增的，则有 $y_0<f(y_0)<f[f(y_0)]$，但这与题设 $y_0\geqslant f[f(y_0)]$ 矛盾！可见 $y_0\geqslant f(y_0)$，这表明 $y_0\in P$，即又有 $Q\subseteq P$.

由 $P\subseteq Q$,且 $Q\subseteq P$,知 $P=Q$.

还可将它拓广到 n 个 f 的情形,留给读者自行解决.

(4)本题及(2)、(3)中的结论可作为小定理在解题中应用,如:

①解方程:$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}=x$;

②解不等式:$(x^3-6)^3-6>x$

③当 $f(x)$ 是增函数时,方程组 $\begin{cases}f(x)=g(x)\\f^{-1}(x)=g(x)\end{cases}$ 与 $g(x)=x$ 同解.

这些结果真是太奇妙了!

例 6 设 $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2, x\in[-2,+\infty)$,则方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 的解集是________.

第 4 届(1993 年)试题

解 由于 $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2$ 在区间 $x\in[-2,+\infty)$ 上是增函数,根据上题的结果,方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 即 $f[f(x)]=x$ 与 $f(x)=x$ 同解. $f(x)=x$ 即 $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2=x$,得 $x_1=-2, x_2=2$,所以欲求方程的解集为 $\{-2,2\}$.

评析 本题给出的方程,也可以用增元法转化为方程组直接求解.

记 $y=f(x)$,由于 $x\in[-2,+\infty)$,所以 $y\in[-2,+\infty)$.方程 $f(x)=f^{-1}(x)$,即 $y=f^{-1}(x), x=f(y)$,于是原方程就转化为

$$\begin{cases}y=\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2-2\\x=\left(1+\dfrac{y}{2}\right)^2-2\end{cases}$$

两式相减,得 $y-x=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-\left(1+\frac{y}{2}\right)^2$,变形后可得 $(x-y)(8+x+y)=0$,因 $8+x+y\neq 0$,所以 $x=y$.于是方程 $f(x)=f^{-1}(x)$

同解于$\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2=x$,下略.

思考

(1)如果把题目改为:设 $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2, x\in[-2,+\infty)$,则不等式 $f(x)\geqslant f^{-1}(x)$的解集是________.

类似可得:不等式 $f(x)\geqslant f^{-1}(x)$ 与 $f(x)\geqslant x$ 的解集同为$[-2,2]$.

(2)方程$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ 的实数解最多有________个,若方程有实数解,则 a 的取值范围是________.

第 14 届(2003 年)试题

解 用增元法. 由$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$,得$\sqrt{a+x}=-x^2+a(x\geqslant 0)$. 令 $y=\sqrt{a+x}=-x^2+a(x\geqslant 0)$. 下略.

答案:实数解最多有 2 个,a 的取值范围是$[1,+\infty)\cup\{0\}$.

当然也可以数形结合,借助函数图像进行判别.

第 2 讲 函数及其图像

函数是高中数学的重点内容,是高中数学的基础,是联结其他数学分支内容的一条主线,应用十分广泛. 函数思想巧妙深奥,是解决数学问题的一种重要思想.

一、基础知识

1. 函数的定义

设 A,B 都是非空的数集,如果按某个确定的对应关系 f,使对

于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有惟一确定的数 $f(x)$ 与它对应，那么就称 $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A, y\in B$.

(1)函数的实质是两个非空数集之间的对应法则. 表示函数常用的方法有解析法、列表法、图像法等.

(2)函数的三要素：对应法则、定义域和值域.

对于函数 $y=f(x)$，自变量 x 的取值范围就是定义域，全体函数值所组成的集合就是值域，函数值的集合 C 满足 $C\subseteq B$.

求函数的定义域主要考虑：

分母不为零；

偶次根式的被开方数非负；

函数本身的规定；

问题的实际意义等.

抽象函数、复合函数的定义域的求法只须遵循使解析式 $y=f(x)$ 或 $y=f[g(x)]$ 有意义的原则，常转化为求不等式组解的问题. 需要注意的是，定义域须用集合或区间表示.

求函数的值域的常用方法有：配方法，单调函数法，判别式法，图像法，反函数法等.

(3)函数相等

“三要素”都相同的两个函数相等.

如果函数的定义域和对应法则确定了，那么函数的值域也就随之确定. 因此，定义域和对应法则都相同的两个函数相等.

2. 映射

设集合 A,B 非空，如果按照某对应法则 f，对于集合 A 中任何一个元素，在集合 B 中都有惟一确定的元素和它对应，那么这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射.

映射是函数概念的推广(集合 A,B 未必是数集)；函数是一类特殊的映射，函数是两个非空数集之间的映射. 判断集合 A 到 B 的

对应关系是否为映射，必须按照“存在且惟一”原则.

3. 函数图像的常用画法

(1)列表描点法；

(2)用函数性质法；

(3)利用已知曲线法(如作函数 $y=\sqrt{16+2x^2}$ 的图像可利用双曲线来画)；

(4)几何法(如利用三角函数线作正弦函数图像)；

(5)图像变换法(如平移变换，对称变换).

4. 反函数的定义

若式子 $y=f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数，设它的定义域为 A，值域为 C. 根据式子 $y=f(x)$ 解出 x，得到式子 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过式子 $x=\varphi(y)$，x 在 A 中都有惟一确定的值和它对应，那么式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数，这样的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的本义反函数，记作 $x=f^{-1}(y)(y\in C)$.

习惯上，我们用 x 表示自变量，用 y 表示函数. 为此，将 $x=f^{-1}(y)(y\in C)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)(x\in C, y\in A)$，这叫做函数 $y=f(x)$ 的矫形反函数，通常称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

(1)值得注意的是，并非所有函数都有反函数. 只有一一对应的函数才有反函数.

(2)互为反函数的定义域与值域的关系.

反函数的定义域与值域正好是原函数的值域与定义域.

(3)求反函数的基本步骤.

如果函数 $y=f(x)$ 存在反函数，求反函数可分三步：

第一步将 $y=f(x)$ 看成方程，解出 $x=f^{-1}(y)$；

第二步将 x,y 互换，得到 $y=f^{-1}(x)$；

第三步指出反函数的定义域(通过求原函数的值域获得).

(4)互为反函数的图像间的关系.

函数 $y=f(x)$的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

值得注意的是：函数 $y=f(x)$和函数 $x=f^{-1}(y)$表示相同的 x,y 间的关系，因此在同一坐标系中它们的图像相同；函数 $y=f(x)$的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像未必相交，即使相交，交点也未必在直线 $y=x$ 上；但增函数和它的反函数的图像如果相交，那么交点必在直线 $y=x$ 上.

二、例题

例 1　式子$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数，函数 $f(x)=x-[x]$可以表示成某个一次函数的形式，这个形式是 $f(x)=$________.

第 2 届(1991 年)试题

解　在区间$[0,1)$上，$f(x)=x$；

在区间$[1,2)$上，$f(x)=x-1$；

在区间$[2,3)$上，$f(x)=x-2$；

……

在区间$[-1,0)$上，$f(x)=x+1=x-(-1)$；

在区间$[-2,-1)$上，$f(x)=x+2=x-(-2)$；

……

$$f(x)=x-k,k\in\mathbf{Z},x\in[k,k+1)$$

评析　本题遵循从特殊到一般的基本规律，通过一些特殊情形的探索，利用归纳法求出结果.

思考　归纳是从特殊事例导出一般原理的一种思维方法. 归纳推理分完全归纳推理与不完全归纳推理. 完全归纳推理是在考察了一类事物的全部对象后归纳得出结论来. 不完全归纳推理只根据一类事物中的部分对象具有的共同性质，推断该类事物全体

都具有的性质，这种推理方法，在数学推理论证中是不允许的. 但本题是填空题，通过特殊情形总结出规律就行了.

例 2　$[t]$表示：不大于 t 的最大整数，则方程$[2x+1]=4x$ 的根是________.

第 10 届(1999 年)试题

解　由$[2x+1]=4x$，知

$$\begin{cases}4x\leqslant 2x+1<4x+1\\ 4x\text{ 是整数}\end{cases},\begin{cases}0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 4x\text{ 是整数}\end{cases},\text{所以 } x=\frac{1}{2},\frac{1}{4}.$$

评析　正确理解取整函数的定义，尤其不要忘记 $4x$ 是整数这一隐含条件，这是本题获解的关键.

思考　如果将方程改为不等式，怎么解？留给读者思考.

(1)不等式$[2x+1]\leqslant 4x$ 的解为________.

(2)不等式$[2x+1]\geqslant 4x$ 的解为________.

例 3　函数 $f(x)$的值域为$\left(\frac{1}{4},4\right]$，则 $g(x)=f(x)-2\sqrt{f(x)}$ 的值域为________.

第 7 届(1996 年)试题

解　因为 $\frac{1}{4}<f(x)\leqslant 4$，$g(x)=f(x)-2\sqrt{f(x)}=(\sqrt{f(x)}-1)^2-1$，所以

$$g_{\max}=(\sqrt{4}-1)^2-1=0,g_{\min}=(\sqrt{1}-1)^2-1=-1.$$

所以欲求值域为$[-1,0]$.

评析　把$\sqrt{f(x)}$看成一个整体处理，应用换元法，将这一陌生题转化为我们熟悉的二次函数的区间最值问题，这是本题获解的关键.

把陌生题转化为熟悉题，这就是化归的思想. 可以在变换题目的条件、结论或它们的联系方式上着手. 构造适当的辅助元素，则

是转化成功的常用途径.

思考 整体思维是整体原理在数学中的反映.在数学解题中,有时要将问题看做一个整体,通过研究问题的整体形式、整体结构或作种种整体处理后,才能达到顺利而又简捷地解决问题的目的.整体思维是体现数学辩证思维特性的一种数学观念,在强调一个整体的同时,还要强调整体与局部的关系,整体与局部的相对性,这样有助于思维广阔性的培养.

在数学学习中,要逐步养成全面地考虑问题的习惯,从整体上把握问题的实质.如:求 $\sin10°\cdot\sin30°\cdot\sin50°\cdot\sin70°$的值.若将整个乘积看成一个整体,可得如下解法:

设 $a=\sin10°\cdot\sin30°\cdot\sin50°\cdot\sin70°$,$b=\cos10°\cdot\cos30°\cdot\cos50°\cdot\cos70°$,两式相乘,然后运用倍角公式后可解得 $a=\frac{1}{16}$.

当然也可直接把 a 转化成:$\cos80°\cdot\cos60°\cdot\cos40°\cdot\cos20°$,通过解剖此式的整体结构,可将分子、分母都乘以 $8\sin20°$,多次运用倍角公式来解,会显得更为简捷!

例 4 函数 $y=\begin{cases}x+1, x\geqslant-1\\ \frac{1}{x+1}, x<-1\end{cases}$的反函数是________.

第 13 届(2002 年)试题

解 由 $y=x+1, x\geqslant-1$,得 $x=y-1, y\geqslant0$,由 $y=\frac{1}{x+1}, x<-1$,得 $x=\frac{1}{y}-1, y<0$.

故所求函数 $y=\begin{cases}x+1, x\geqslant-1\\ \frac{1}{x+1}, x<-1\end{cases}$的反函数是 $y=\begin{cases}x-1, x\geqslant0\\ \frac{1}{x}-1, x<0\end{cases}$.

评析 本题是求分段函数的反函数,实际上先把原问题分解为两个小问题:分别求函数 $y=x+1, x\geqslant-1$ 和 $y=\frac{1}{x+1}, x<-1$

的反函数，这样各个击破，分段求出反函数后再合到一起，得到原函数的反函数.

有些数学问题，由于结论比较抽象，难以直接下手，这时不妨考虑能否将问题分解为几个比较简单的小问题，以便各个击破，解出原题.

思考　一般地，记 $A'=\{y\mid y=g(x),x\in A\}$，$B'=\{y\mid y=h(x),x\in B\}$，则如果分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x),x\in A\\ h(x),x\in B\end{cases}$ 的反函数存在，必为 $f^{-1}(x)=\begin{cases}g^{-1}(x),x\in A'\\ h^{-1}(x),x\in B'\end{cases}$.

例 5　函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的定义域、值域都是 **R**，并且它们都有反函数，则函数 $y=f^{-1}(g^{-1}(f(x)))$ 的反函数是(　　)

(A) $y=f(g(f^{-1}(x)))$.　　(B) $y=f^{-1}(g(f(x)))$.

(C) $y=f^{-1}(g^{-1}(f(x)))$.　　(D) $y=f(g^{-1}(f^{-1}(x)))$.

第 3 届(1992 年)试题

解　已知函数 $y=f^{-1}(g^{-1}(f(x)))$ 可得 $g^{-1}(f(x))=f(y)$，进而得到 $f(x)=g(f(y))$，由此得到 $x=f^{-1}(g(f(y)))$，把两个字母 x,y 互换，得 $y=f^{-1}(g(f(x)))$，故选(B).

评析　此题的背景是相似函数，即：若存在一个函数 $f(x)$ 和它的反函数 $f^{-1}(x)$，使得

$$\varphi(x)=f^{-1}(g(f(x)))$$

则称函数 $\varphi(x)$ 通过 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相似，简称 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 相似，记为 $f^{-1}gf\sim g$，$f(x)$ 称为桥函数.

如果 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 相似，即 $\varphi(x)=f^{-1}(g(f(x)))$，记 $g_n(x)=\underbrace{gg\cdots g}_{n个g}(x)$，则

$$\begin{aligned}\varphi_2(x)&=\varphi[\varphi(x)]=f^{-1}(g(f(\varphi(x))))\\&=f^{-1}(g(f(f^{-1}(g(f(x))))))=f^{-1}(g_2(f(x)))\end{aligned}$$

用数学归纳法可以证明 $\varphi_n(x)=f^{-1}(g_n(f(x)))$. 这一结论把 $\varphi(x)$ 的 n 次迭代转化为 $g(x)$ 的 n 次迭代,在函数迭代中有广泛应用.举一例子:

设 $g(x)=ax+b, b\neq 0$,则 $g_2(x)=g[g(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+(1+a)b, \cdots$,

$g_n(x)=a^nx+(1+a+\cdots+a^{n-1})b$

取 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $G(x)=f^{-1}(g(f(x)))=\dfrac{x}{a+bx}$,则

$$G_n(x)=\underbrace{GG\cdots G}_{n\text{个}G}(x)=f^{-1}g_nf(x)=f^{-1}g_n\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{g_n\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{x}{a^n+(1+a+\cdots+a^{n-1})bx}$$

确实非常方便!

思考 反函数是高中数学的一个重要概念,也是一个难点.要准确把握它,必须搞清楚:什么样的函数有反函数存在?

答案:只有一一对应的函数,才有反函数存在.由于单调函数一定是一一对应的函数,所以它一定有反函数,如

函数 $y=\begin{cases} x^2(x\leqslant 0) \\ -2x(x>0) \end{cases}$ 的反函数为________.

第 7 届(1996 年)试题

答案:$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}, x<0 \\ -\sqrt{x}, x\geqslant 0 \end{cases}$

但反之不然.如函数 $g(x)=\begin{cases} 3x(0\leqslant x\leqslant 1) \\ 1-2x(x<-1) \end{cases}$ 的反函数为

$g^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{3}, 0\leqslant x\leqslant 3 \\ \dfrac{1-x}{2}, x>3 \end{cases}$,但 $g(x)$ 并不是单调函数.

例 6　函数 $y=f(x-a)$ 与函数 $y=f(a-x)$ 的图像间的关系是(　　)

(A)关于 y 轴对称.　　(B)关于 x 轴对称.

(C)关于直线 $x=2a$ 对称.　　(D)关于直线 $x=a$ 对称.

第 4 届(1993 年)试题

解　设 (x_0,y_0) 是函数 $y=f(x-a)$ 图像上的任意一点,则 (x_0,y_0) 关于直线 $x=a$ 的对称点为 $(2a-x_0,y_0)$. 因为 $y_0=f(x_0-a)=f[a-(2a-x_0)]$,所以点 $(2a-x_0,y_0)$ 在函数 $y=f(a-x)$ 的图像上.

反之,函数 $y=f(a-x)$ 图像上任意一点 (x',y') 关于直线 $x=a$ 的对称点 $(2a-x',y')$ 也在函数 $y=f(x-a)$ 的图像上,因此,函数 $y=f(x-a)$ 与 $y=f(a-x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称. 选(D).

评析　令 $x'=x-a$,则题给两个函数分别化为 $y=f(x')$ 与 $y=f(-x')$,易知它们的图像关于 $x'=0$ 对称. 相对应的原来两个函数的图像关于直线 $x=a$ 对称.

从图像变换的角度看,这里的代换 $x'=x-a$ 只是将坐标轴作平移,并不影响图像的对称性.

思考　类似地可得如下一般性结论:

函数 $y=f(qx-a)$ 与函数 $y=f(b-qx)(q\neq 0)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2q}$ 对称.

下面问题是它的特殊情形:

定义域是全体实数的函数 $f(x)$,对于常数 a 都有 $f(x)=f(a-x)$,那么这个函数的图像的对称轴是直线(　　)

(A) $x=a$.　　(B) $x=\dfrac{a}{2}$.　　(C) $x=2a$.　　(D) $x=-\dfrac{a}{2}$.

第 5 届(1994 年)试题,答案:(B)

例 7　定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 有反函数,则函数 $y=f(x+a)+b$ 的图像与 $y=f^{-1}(x+a)+b$ 的图像间的关系是(　　)

(A)关于直线 $y=x+a+b$ 对称.

(B)关于直线 $x=y+a+b$ 对称.

(C)关于直线 $y=x+a-b$ 对称.

(D)关于直线 $x=y+a-b$ 对称.

第 4 届(1993 年)试题

解 令 $x'=x+a, y'=y-b$,题给两函数 $y=f(x+a)+b$ 与 $y=f^{-1}(x+a)+b$ 分别化为 $y'=f(x')$ 与 $y'=f^{-1}(x')$,根据反函数的性质,这两个函数的图像关于 $y'=x'$ 对称,即关于 $x+a=y-b$ 对称,故选(A).

评析 这里用了坐标平移的方法,将问题转化为互为反函数的两个函数图像之间的关系,充分利用了图像间的对称关系是坐标平移的不变性这一结论.作为选择题,也可以选择特殊函数来解.如:取 $f(x)=x$,题给两函数均变为 $y=x+a+b$,只能关于直线 $y=x+a+b$ 对称,选(A).

思考 互为反函数的两个函数图像关于直线 $y=x$ 对称,它们的交点一定在直线 $y=x$ 上吗?

答:不一定.

如函数 $y=-x$ 的反函数是 $y=-x$,两函数图像重合,除点(0,0)在直线 $y=x$ 上,其他公共点都不在直线 $y=x$ 上.又如函数 $y=-\sqrt[5]{\frac{1}{x}}$,其反函数为 $y=-\frac{1}{x^5}$,它们的图像有两个交点(−1,1),(1,−1),均不在直线 $y=x$ 上.

下面试题是例 7 的特例:

函数 $y=f(x+1)$ 与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像(　　)

(A)关于直线 $y=x$ 对称.　　(B)关于直线 $y=x+1$ 对称.

(C)关于直线 $y=x-1$ 对称.　　(D)关于直线 $y=-x$ 对称.

第 8 届(1997 年)试题,答案:(B)

例 8 定义域为 **R** 的函数 $f(x)$, $g(x)$ 都有反函数,并且函数

$f(x+1)$和 $g^{-1}(x-2)$的图像关于直线 $y=x$ 对称，若 $g(5)=1999$，那么 $f(6)=$(　　)

(A)1999.　　(B)2000.　　(C)2001.　　(D)2002.

第 11 届(2000 年)试题

解　因为 $g(5)=1999$，所以 $g^{-1}(1999)=5$，即 $g^{-1}(2001-2)=5$，所以$(2001,5)$是方程 $y=g^{-1}(x-2)$的解.

由 $f(x+1)$和 $g^{-1}(x-2)$的图像关于直线 $y=x$ 对称，可知 $f(x+1)$和 $g^{-1}(x-2)$互为反函数. 故点$(2001,5)$关于直线 $y=x$的对称点$(5,2001)$在 $f(x+1)$的图像上. 即$(5,2001)$是方程 $y=f(x+1)$的解，所以 $2001=f(5+1)$，即 $f(6)=2001$. 故应选(C).

评析　此题固然可由数形结合求解，但这里用函数与方程的思想求解更为准确迅速.

所谓函数思想，是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题. 方程思想，是指从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为数学模型(方程、不等式、或方程与不等式的混合组)，然后通过解方程(组)或不等式(组)来使问题获解. 笛卡儿的方程思想是：实际问题→数学问题→代数问题→方程问题. 函数和多元方程没有什么本质的区别，如函数 $y=f(x)$，就可以看作关于 x,y 的二元方程 $f(x)-y=0$.

有时，还可用函数与方程的互相转化以达到解决问题的目的.

可以说，函数的研究离不开方程. 列方程、解方程和研究方程的特性，都是应用方程思想时需要重点考虑的.

思考　若把对称直线 $y=x$ 改为 $y=\pm x+b$，可以证明：

函数$y=f(x)$关于直线 $y=\pm x+b$ 的对称曲线方程为$\pm x+b=f[\pm(y-b)]$.

这只要从直线方程 $y=\pm x+b$ 中解出 x,y，然后替换函数 $y=f(x)$中的 x,y，得到的就是对称曲线方程.

例 9 要使关于 x 的方程 $\sqrt{2x+3}=\sqrt{4x+a}$ 有实数解，实数 a 的取值范围是________.

第 12 届(2001 年)试题

解 $y=\sqrt{2x+3}$ 及 $y=\sqrt{4x+a}$ 的图像的顶点分别为 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$，$\left(-\frac{a}{4},0\right)$，且都是开口向右的半抛物线，且后者的张口总比前者大. 故知，当且仅当 $-\frac{a}{4}\geqslant-\frac{3}{2}$，即 $a\leqslant 6$ 时它们有公共点，即方程有实数解.

评析 上面的解法是数形结合，从函数图像的角度进行的. 从代数角度怎么处理?

方程 $\sqrt{2x+3}=\sqrt{4x+a}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3\geqslant 0\\2x+3=4x+a\end{cases}$ 有实数解 $\Leftrightarrow x=\frac{3-a}{2}\geqslant-\frac{3}{2}$，即 $a\leqslant 6$ 时原方程有实数解.

这里本来还有一个限制条件 $4x+a\geqslant 0$，已包括在 $2x+3\geqslant 0$，$2x+3=4x+a$ 中，省去使解题过程简捷明快.

思考 一般地，方程 $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\g(x)\geqslant 0\end{cases}$，不等式 $\sqrt{f(x)}\geqslant\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant g(x)\\g(x)\geqslant 0\end{cases}$，不等式 $f(x)\leqslant\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}f^2(x)\leqslant g(x)\\f(x)\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}g(x)\geqslant 0\\f(x)\leqslant 0\end{cases}$.

不要小看这一步，如果去掉的是含有参数的限制条件，如本题 $4x+a\geqslant 0$，就容易找到解题的突破口，使问题简捷地获得解决.

例 10 函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都满足 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$，并且方程 $f(x)=0$ 有三个实根，这三个实根的和是______.

第 1 届(1990 年)试题

解　因为对任何 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$,所以函数 $f(x)$的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$对称.

又因为方程 $f(x)=0$ 有 3 个实根,这表明 $f(x)$的图像与 x 轴有 3 个不同交点.根据对称性知,其中一个交点恰是 $x=\frac{1}{2}$.另外两个交点关于 $x=\frac{1}{2}$对称,因此另外两根之和是 $2\times\frac{1}{2}=1$.

综上,这三个实根的和是 1.5.

评析　注意到三个实根的和是 $1.5=3\times\frac{1}{2}$,我们很容易猜测推广问题:

函数 $f(x)$对一切实数 x 都满足 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$,并且方程 $f(x)=0$ 有$n(n\in\mathbf{N}^*)$个实根,这 n 个实根的和是$\frac{n}{2}$.

思考　本题还可以推广为更一般的结果

(1)若 $f(ax+b)=f(d-ax)$,$a\neq 0$,方程 $f(x)=0$ 有 $n\,(n\in\mathbf{N}^*)$个实根,这 n 个实根的和是$\frac{n(b+d)}{2}$.

证明　设 x_0 是 $f(x)=0$ 的一个根,则 $f(x_0)=0$,令 $ax+b=x_0$,则 $d-ax=b+d-x_0$,即 $f(b+d-x_0)=0$,两根之和$(b+d-x_0)+x_0=b+d$.平均值为$\frac{b+d}{2}$,所以这 n 个实根的和是$\frac{n(b+d)}{2}$.

类比(1),我们还可以得到

(2)若 $f(bx)=f\left(\frac{d}{x}\right)$,$b,d>0$,方程 $f(x)=0$ 有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$个正实根,则这 n 个实根的积是$(\sqrt{bd})^n$.

第3讲 函数的性质

一、基础知识

1. 单调性

对于给定区间上的函数 $f(x)$:如果对于属于这个区间的任意两个自变量值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$(或都有 $f(x_1)>f(x_2)$),那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数(或为减函数).

函数的单调性是对定义域内某个区间而言的.有些函数在整个定义域内具有单调性,例如一次函数.有些函数的单调区间不惟一,例如函数 $y=x^2+1$,$(0,+\infty)$,$(-\infty,0)$ 分别是它的增区间和减区间.有些函数根本没有单调区间,或者它的定义域根本就不是区间,例如函数 $y=5x,x\in\{1,3,5\}$.

2. 奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为这一定义域内的奇函数;如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为这一定义域内的偶函数.

奇偶函数的定义域关于原点对称.

在平面直角坐标系内,奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个非零常数 T,使得当 x 取定义域内的每一个值时,都有 $f(x+T)=f(x)$,那么函数 $f(x)$ 叫做周期

函数. 非零常数 T 叫做这个函数的周期. 对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它所有的周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

周期函数的定义域至少一端是无界的，若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 $nT(n\in \mathbf{N}, n\geqslant 1)$ 均为 $f(x)$ 的周期；若函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T'，则 $f(ax+b)(a\neq 0)$ 的最小正周期为 $\frac{T'}{|a|}$.

奇偶函数之和的最小正周期(若存在)，是这两个函数最小正周期的最小公倍数.

二、例题

例 1　方程 $x^5+x+1=0$ 和 $x+\sqrt[5]{x}+1=0$ 的实根分别为 α 和 β，则 $\alpha+\beta$ 等于(　　)

(A) -1.　　(B) $-\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 1.

第 13 届(2002 年)试题

解　设 $f(x)=x^5+x+1$，则函数 $f(x)$ 是在 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数. 由题设，得 $\alpha^5+\alpha+1=0$，$\beta+\sqrt[5]{\beta}+1=0$，变形即 $(-\beta-1)^5+(-\beta-1)+1=0$，所以 $f(\alpha)=f(-\beta-1)=0$，$\alpha=-\beta-1$，$\alpha+\beta=-1$. 故选(A).

评析　解决这一类问题的常用方法是数形结合法和单调函数法，它们各有优点，但都需要构造性思维能力，都要构造函数，但函数的作用不同，本题用的是单调函数法.

思考　答案 -1 与题给方程中的常数 1 互为相反数，这启发我们猜测：是否有一般性的规律存在？

引申　若方程 $f(x)+ag(x)=b(b\neq 0)$ 只有惟一实数解，且 α，β 分别是方程 $f(x)+ag(x)=b$，$f^{-1}(x)+ag(x)=b$ 的根，则 $\alpha+$

$ag(\beta)=\beta+ag(\alpha)=b$.

证明 $f^{-1}(\beta)+ag(\beta)=b$ 即 $f[b-ag(\beta)]=\beta$,由于方程 $f(x)+ag(x)=b(b\neq0)$ 只有惟一实数解,与 $f(\alpha)+ag(\alpha)=b$ 比较,即可得 $\beta=b-ag(\alpha)$,$\alpha=b-ag(\beta)$,即 $\alpha+ag(\beta)=\beta+ag(\alpha)=b$.

当 $g(x)=x$ 时,$\alpha+ag(\beta)=\beta+ag(\alpha)=b$ 即 $\alpha+a\beta=\beta+a\alpha=b$,可得 $a=1$,$\alpha+\beta=b$.

真相大白!有了上述结论,下面问题的结论是一望而知的:

设 α,β 分别是方程 $\log_2x+x+2=0$ 和 $2^x+x+2=0$ 的根,则 $\alpha+\beta=$________.

第 9 届(1998 年)试题

答案:-2

例 2 将函数 $f(x)=\log_2(x^2+x+1)(x\in\mathbf{R})$ 表示成一个偶函数及一个奇函数的和,这个偶函数是________.

第 14 届(2003 年)培训题

解 令偶函数为 $h(x)$,奇函数为 $g(x)$,且 $f(x)=h(x)+g(x)$,则

$$f(-x)=h(-x)+g(-x)=h(x)-g(x)$$

所以 $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=\dfrac{1}{2}[\log_2(x^2+x+1)+\log_2(x^2-x+1)]=\dfrac{1}{2}\log_2(x^4+x^2+1)$.

评析 根据已知条件,假设题目已经做好了,设出需要求的函数(或数值),这是常用的一种数学方法,可以广义地看做待定系数法的推广.

思考 解好题后有意外收获:对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的任一函数 $f(x)$,都可以表示成一个偶函数及一个奇函数的和,其中偶函数为 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,奇函数为 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

但是否任意函数都能表示成一个偶函数及一个奇函数的和?

答案是否定的.因为偶函数及奇函数都要求定义域对称于原点,所以可推知:只有定义域对称于原点的函数,才能表示成一个偶函数及一个奇函数的和(表达式与上相同).

例 3　不等式 $12^x+5^x\leqslant 13^x$ 的解集为____________.

第 13 届(2002 年)试题

解　令 $f(x)=\left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x$,则函数 $f(x)$ 是在 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数,题设不等式可化为

$$f(x)=\left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x\leqslant 1=\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=f(2)\Leftrightarrow x\geqslant 2$$

所以不等式 $12^x+5^x\leqslant 13^x$ 的解集为 $\{x\mid x\geqslant 2\}$.

评析　本是一个不等式问题,但是通过构造函数 $f(x)$,却将问题转化成较为简单的利用单调减函数比较函数值大小的问题,最终达到解决问题的目的.

题中用到单调函数的如下性质:

如果函数 $f(x)$ 是区间 D 上的减函数,则对任意的 $x_1,x_2\in D$,有 $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$;如果函数 $f(x)$ 是区间 D 上的增函数,则对任意的 $x_1,x_2\in D$,有 $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

这一简单性质在解题中有着重要的作用.

思考　分析清楚上面的问题的细节后,可以较轻松地完成如下两个问题:

(1)方程 $\log_5(3^x+4^x)=\log_4(5^x-3^x)$ 的解集为________.

第 12 届(2001 年)试题

解　令 $y=\log_5(3^x+4^x)=\log_4(5^x-3^x)$,则 $5^y=3^x+4^x$,$4^y=5^x-3^x$,两式相加,得

$$5^y+4^y=5^x+4^x$$

因为 $f(x)=5^x+4^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,上式 $f(y)=f(x)\Leftrightarrow y=x$,所以 $5^x=3^x+4^x$.

即 $g(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1=g(2)$，由于 $g(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ 是减函数，所以原方程只有惟一解 $x=2$.

(2)方程 $3^x+4^x+5^x=6^x$ 的解是________.

第 3 届(1992 年)试题，答案：$x=3$

例 4 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，它的图像经过点 $A(0,-2)$，$B(3,2)$，则不等式 $|f(x+1)|\geqslant 2$ 的解集为(　　)

(A) $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.　　(B) $[2,+\infty)$.

(C) $(-\infty,-1]$.　　(D) $[3,+\infty)$.

第 13 届(2002 年)试题

解 函数 $f(x)$ 的图像经过点 $A(0,-2)$，$B(3,2)$，即

$f(0)=-2$，$f(3)=2$，不等式 $|f(x+1)|\geqslant 2$ 即不等式 $f(x+1)\geqslant 2$ 或 $f(x+1)\leqslant -2$，也就是 $f(x+1)\geqslant f(3)$ 或 $f(x+1)\leqslant f(0)$，

又因函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $x+1\geqslant 3$ 或 $x+1\leqslant 0$. 即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -1$，选(A).

评析 这是关于抽象函数的一道不等式问题，除上面利用函数单调性化归的方法，若直接求解有困难，也可借助函数图像快速求解.

作为选择题，利用取特殊函数法，不妨设 $f(x)$ 的图像是经过点 A,B 的直线，根据图 3-1，利用图像平移及翻折知识，可快速得出函数 $|f(x+1)|$ 的图像，如图 3-1 所示，易得答案为(A).

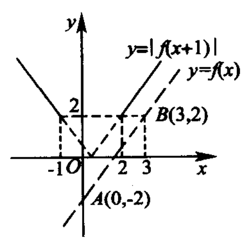


图 3-1

思考 抽象函数问题的求解，基本思路是：化函数不等式为普通不等式，关键是根据函数单调性去掉所给不等式中的函数符号.

而这里用的数形结合的思想，其实质是将抽象的数学语言与

直观的图像结合起来，关键是代数问题与图形之间的相互转化，它可以使代数问题几何化，几何问题代数化. 在运用数形结合思想分析和解决问题时，要注意三点：

(1)要彻底弄清楚概念和运算的几何意义以及曲线的代数特征，对题目中的条件和结论既要分析其几何意义又要分析其代数意义；

(2)恰当设参，合理用参，建立关系，由数思形，以形想数，做好数形转化；

(3)正确确定参数的取值范围.

例 5 函数 $f(x)$是定义域为$[-1,1]$的奇函数，且为增函数，$f(1-a)+f(1-a^2)<0$，则实数 a 的取值范围是________.

第 5 届(1994 年)试题

解 因为 $f(x)$是奇函数，所以由 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$ 得

$f(1-a)<-f(1-a^2)=f(a^2-1)$，又由于 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$，且为增函数，从而有

$$\begin{cases}-1\leqslant 1-a\leqslant 1\\ -1\leqslant 1-a^2\leqslant 1\\ 1-a<a^2-1\end{cases}$$

解之得 $1<a\leqslant\sqrt{2}$.

评析 这是抽象函数的综合性问题，求解的基本策略是：利用外层函数的单调性将它转化成普通的代数不等式来解. 但在将抽象函数符号 f 去掉时，一定要注意 f 下的自变量 $1-a$ 和 $1-a^2$ 是否属于同一单调区间.

思考 脱去外层函数是此类问题获得解决的关键. 利用函数单调性化归的过程，可以形象地比喻为：给函数“更衣”.

例 6 奇函数 $y=f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2x-x^2$，设函数 $y=f(x)(x\in[a,b])$的值域为$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right](a\neq b)$，求 a,b 的值.

第 4 届(1993 年)试题

解 因为 $y=f(x)$ 是奇函数，所以当 $x<0$ 时，$y=x^2+2x$. 故

$$f(x)=\begin{cases}2x-x^2, x\geqslant 0\\2x+x^2, x<0\end{cases}$$

因为 $[a,b]$ 与 $\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$ 同时存在，$a\neq b$，所以 $a<b$，$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$，故 a,b 同号.

当 $x>0$ 时，$f(x)=2x-x^2>0$，得 $0<x<2$；当 $x<0$ 时，$f(x)=2x+x^2<0$，得 $-2<x<0$.

函数 $f(x)$ 满足题设条件的区间 $[a,b]$ 必然在 $(-2,0)$ 或 $(0,2)$ 中. 此时 $f(x)$ 图像如图 3-2 的左图或右图所示：

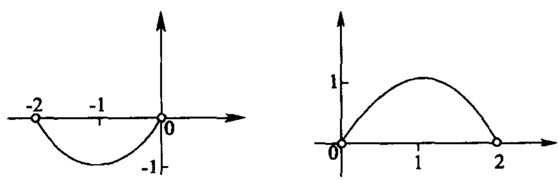


图 3-2

下面分类进行讨论：

(Ⅰ)当 $[a,b]\subseteq(-2,0)$ 时，

(1)当 $-2<a<b\leqslant-1$ 时，

$$\begin{cases}2a+a^2=\frac{1}{a}\\2b+b^2=\frac{1}{b}\end{cases} \text{即} \begin{cases}(a+1)(a^2+a-1)=0\\(b+1)(b^2+b-1)=0\end{cases},$$

解得 $a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b=-1$；

(2)当 $-1<a<b<0$ 时，方程组

$$\begin{cases}2a+a^2=\frac{1}{b}\\2b+b^2=\frac{1}{a}\end{cases}$$

无解.

(3)当 $-2<a<-1<b<0$ 时,由方程组 $\begin{cases}2a+a^2=\dfrac{1}{a}\\ \dfrac{1}{b}=-1\end{cases}$,得 $b=-1$,与 $b>-1$ 矛盾.

(Ⅱ)当 $[a,b]\subseteq(0,2)$ 时,

(1)当 $0<a<b<1$ 时,方程组

$$\begin{cases}2a-a^2=\dfrac{1}{b}\\ 2b-b^2=\dfrac{1}{a}\end{cases}$$

无解.

(2)当 $1\leqslant b<a<2$ 时,

$\begin{cases}2a-a^2=\dfrac{1}{a}\\ 2b-b^2=\dfrac{1}{b}\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(a-1)(a^2-a-1)=0\\ (b-1)(b^2-b-1)=0\end{cases}$,解得 $a=1,b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$;

(3)当 $0<a<1<b<2$ 时,由方程组 $\begin{cases}2a-a^2=\dfrac{1}{b}\\ 1=\dfrac{1}{a}\end{cases}$,得 $a=1$,与 $a<1$ 矛盾.

综上,$\begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$,$\begin{cases}a=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ b=-1\end{cases}$.

评析　本题首先使隐含条件显性化,求出满足题设条件的区间 $[a,b]$ 必然在 $(-2,0)$ 或 $(0,2)$ 中,是本题获解的关键.

然后根据 $[a,b]$ 在 $(-2,0)$ 或 $(0,2)$ 中分两种情况进行讨论. 每种情况结合函数的图像、对称轴与闭区间 $[a,b]$ 的关系又分三种,

即对称轴在闭区间左边、右边、中间.

函数的定义域为$[a,b]$,值域为$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$,隐含着函数的最大值为$\frac{1}{a}$、最小值为$\frac{1}{b}$,而最值只能在区间$[a,b]$的端点或顶点处取到.

本题的解答,关键是分析符合条件的函数的图像,也可以看成是“数形结合法”的运用.本题具有较强的典型性,它的解题思想,对于闭区间上二次函数最值问题具有普遍的指导意义.

思考 在解答某些数学问题时,会遇到多种情况,需要对各种情况加以分类,并逐类求解,然后综合得解,这就是分类讨论法.分类讨论是一种逻辑方法,是一种重要的数学思想,同时也是一种重要的解题策略,它体现了化整为零、积零为整的思想与归类整理的方法.

引起分类讨论的原因主要是以下几个方面:

①概念型.问题所涉及到的数学概念是分类进行定义的.如$|a|$的定义分$a>0$、$a=0$、$a<0$三种情况.

②性质型.问题中涉及到的数学定理、公式和运算性质、法则有范围或者条件限制,或者是分类给出的.如等比数列的前n项和的公式,分$q=1$和$q\neq1$两种情况.

③含参型.解含有参数的题目时,必须根据参数的不同取值范围进行讨论.如解不等式$ax<2$时分$a>0$、$a=0$和$a<0$三种情况讨论.

④不确定型.某些不确定的数量、不确定图形的形状或位置、不确定的结论等,都要通过分类讨论,保证其完整性,使之具有确定性.

解答分类讨论问题基本步骤是:先确定讨论对象以及所讨论对象的全体的范围;再确定分类标准,正确进行分类,要求标准统一、不重不漏、分类互斥(没有重复);最后对所分类逐步进

行讨论，分级进行，获取阶段性结果；进行归纳小结，综合得出结论.

例 7　在自然数集 N 上定义的函数

$$f(n)=\begin{cases}n-3, n\geqslant 1000\\ f[f(n+7)], n<1000\end{cases}$$

则 $f(90)$ 的值为(　　)

(A)997.　　(B)998.　　(C)999.　　(D)1000.

第 2 届(1991 年)试题

解　根据递推关系式 $f(n)=\begin{cases}n-3, n\geqslant 1000\\ f[f(n+7)], n<1000\end{cases}$，容易求出

$f(1000)=997, f(999)=f[f(1006)]=f(1003)=1000,$

$f(998)=f[f(1005)]=f(1002)=999,$

$f(997)=f[f(1004)]=f(1001)=998,$

$f(996)=f[f(1003)]=f(1000)=997,$

$f(995)=f[f(1002)]=f(999)=1000,$

$f(994)=f[f(1001)]=f(998)=999,$

…

可见 $f(n)$ 以 4 为周期.

$f(90)=f(4\times 228+90)=f(1002)=999$. 故选(C).

评析　还可以从递推关系式 $f(n)=\begin{cases}n-3, n\geqslant 1000\\ f[f(n+7)], n<1000\end{cases}$ 中得到一般的结果.

设 $k\in\mathbf{N}, k<250$，则

$$f(4k)=997, f(4k+1)=998, f(4k+2)=999, f(4k+3)=1000.$$

$$f(n)=n-3, n\geqslant 1000.$$

思考　将递推关系式改为 $f(n)=\begin{cases}n-3, n\geqslant 1000\\ f(n+7), n<1000\end{cases}$ 或 $f(n)=\begin{cases}n-3, n\geqslant 1000\\ f\{f[f(n+7)]\}, n<1000\end{cases}$，结果如何？留给读者作进一步研究.

例 8 定义域为 **R** 的函数 $y=f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}^+$，对任何 $x\in\mathbf{R}$，都有

$\lg[f(x+1)]+\lg[f(x-1)]=\sqrt{2}\lg[f(x)]$，则 $f(x-2)\cdot f(x+2)=$________.

第 4 届（1993 年）试题

解 $\lg[f(x+1)]+\lg[f(x-1)]=\sqrt{2}\lg[f(x)]$，就是 $f(x+1)f(x-1)=f^{\sqrt{2}}(x)$.

$$\begin{aligned}&f(x-2)\cdot f(x+2)\\&=\frac{\{f[(x-1)+1]f[(x-1)-1]\}\cdot\{f[(x+1)+1]f[(x+1)-1]\}}{f^2(x)}\\&=\frac{f^{\sqrt{2}}(x-1)f^{\sqrt{2}}(x+1)}{f^2(x)}=\frac{[f(x+1)f(x-1)]^{\sqrt{2}}}{f^2(x)}\\&=\frac{[f^{\sqrt{2}}(x)]^{\sqrt{2}}}{f^2(x)}=1.\end{aligned}$$

评析 此题的背景 $f(x)$ 是周期函数，由 $f(x-2)\cdot f(x+2)=1$，得 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x-2)}=\dfrac{1}{f[(x-4)+2]}=f(x-6)$，所以 $f(x-6)=f(x+2)$.

即 $f(x)$ 是周期函数，8 是它的一个周期.

数列是特殊的函数，在一定的条件下，函数与数列可以相互转化.

如果我们令 $a_n=\lg f(x+n)$，则 $\lg[f(x+1)]+\lg[f(x-1)]=\sqrt{2}\lg[f(x)]$，即

$a_{n+1}+a_{n-1}=\sqrt{2}a_n$，于是问题就化归为二阶线性递推数列的周期性问题.我们将在数列一讲中作出说明，这里不再重复.

思考 等价转化是把未知解的问题，转化为在已有知识范围内可解的问题的一种重要的思想方法.通过不断的转化，把不熟悉、不规范、复杂的数学问题转化为熟悉、规范甚至模式化、简单的问题.

在应用等价转化的思想方法去解决数学问题时，没有一个统一的模式. 它可以在数与数、形与形、数与形之间进行转换；它可以在宏观上进行等价转化，如在分析和解决实际问题的过程中，将普通语言翻译转化为数学语言；也可在符号系统内部实施转换，即所说的恒等变形. 用消去法、换元法、数形结合法求取值范围问题等等，都体现了等价转化思想，在函数、方程和不等式之间更是经常要进行等价转化.

在实施等价转化时，要遵循熟悉化、简单化、直观化、标准化的原则，即把我们遇到的问题，通过转化变成我们比较熟悉的问题来处理；或者将较为繁琐、复杂的问题，变成比较简单的问题，比如从超越式到代数式、从无理式到有理式、从分式到整式……；或者将比较难以解决、比较抽象的问题，转化为比较直观的问题，以便准确把握问题的求解过程，比如数形结合法；或者从非标准型向标准型进行转化.

第 4 讲　函数的最值

一、基础知识

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，

若存在 $x_0\in D$，使得对任意的 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的最小值，可简记为 $y_{\min}$ 或 $f_{\min}$；

若存在 $x_0\in D$，使得对任意的 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在 D 上的最大值，可简记为 $y_{\max}$ 或 $f_{\max}$.

求函数最值，常用的方法有：配方法、换元法、判别式法、反函数法、单调函数法、基本不等式法、图像法、求导法等.

二、例题

例 1 对于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，规定：当 $f(x)\leqslant g(x)$ 时，$f(x)※g(x)=f(x)$；当 $f(x)>g(x)$ 时，$f(x)※g(x)=g(x)$. 已知 $f(x)=3-x$，$g(x)=\sqrt{2x+5}$，则 $f(x)※g(x)$ 的最大值为________.

第 8 届(1997 年)试题

解 因为 $f(x)=3-x$，所以 $f(x)$ 是减函数，又因为 $g(x)=\sqrt{2x+5}$，所以 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{5}{2},+\infty\right)$ 上是增函数，令 $f(x)=g(x)$ 即 $3-x=\sqrt{2x+5}$，整理得 $x^2-8x+4=0$，解得 $x=4\pm2\sqrt{3}$.

经检验，$x=4-2\sqrt{3}$.

由题设条件得，$f(x)※g(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+5}, -\frac{5}{2}\leqslant x<4-2\sqrt{3}\\ 3-x, x\geqslant4-2\sqrt{3}\end{cases}$

当 $x=4-2\sqrt{3}$ 时，$f(x)※g(x)$ 有最大值 $2\sqrt{3}-1$.

评析 这是新定义题. 只要按照题中定义的规则进行操作就行了.

思考 这类新定义数学问题，是将对能力的考查在一个新的情境下进行，它们有的以高等数学知识为背景，有的以现代社会人们的生活实际和生产实际为背景，背景往往是考生不熟悉的东西，它要求：即时阅读，即时理解，即时运用. 所以必须从字里行间挖掘出数学因素，才能使问题得到完满解决.

例 2 对于任意实数 x，若不等式 $|x-3|+|x-4|>a(a>0)$ 恒成立，则实数 a 应满足(　　)

(A)$0<a<1$.　(B)$0<a\leqslant1$.　(C)$a>1$.　(D)$a\geqslant1$.

第 15 届(2004 年)试题

解　$f(x)=|x-3|+|x-4|$ 的几何意义是：数轴上点 $P(x)$ 到两点 $A(3)$，$B(4)$ 的距离之和，易知

$f(x)=|PA|+|PB|\geqslant|AB|=1$，

且 $x=3$ 时，$f(x)=1$，所以要使不等式 $|x-3|+|x-4|>a(a>0)$ 恒成立，必须 $0<a<1$. 故选(A).

评析　本题其实际是求函数 $f(x)$ 的最小值.

一般地，设 $f(x)$ 的最大值为 m，最小值为 n，则

(1)若 $f(x)\geqslant a$ 恒成立，则实数 a 应满足 $n\geqslant a$；若 $f(x)\leqslant a$ 恒成立，则实数 a 应满足 $m\leqslant a$；

(2)若 $f(x)>a$ 恒成立，则实数 a 应满足 $n>a$；若 $f(x)<a$ 恒成立，则实数 a 应满足 $m<a$.

思考　本题的参数 a 与函数 $f(x)$ 已分离，这启发我们，求参数与函数式混合的一类最值问题时，可采用参数分离法进行求解. 如：

第 15 届高二培训题第 23 题：若不等式 $\dfrac{mx^2-mx+2}{x^2+3x+4}>-1$ 对所有 $x>0$ 皆成立，则 m 的取值范围是________.

解　分离参数 m，得 $m(x^2-x)>-(x^2+3x+4)-2$，即

$$m(x^2-x)>-(x^2+3x+6) \qquad (*)$$

当 $x>1$ 时，$x^2-x>0$，由(*)式得，

$m>-\dfrac{x^2+3x+6}{x^2-x}=-1-\dfrac{4x+6}{x^2-x}$，

由于 $-1-\dfrac{4x+6}{x^2-x}<-1$，所以 $m\geqslant-1$.

当 $x=1$ 时，$m(x^2-x)=0$，由于 $-(x^2+3x+6)<0$，不等式(*)恒成立.

当 $0<x<1$ 时，$x^2-x<0$，由(*)式得，

$m<-\dfrac{x^2+3x+6}{x^2-x}=-1-\dfrac{4x+6}{x^2-x}$，

由于此时$-1-\frac{4x+6}{x^2-x}\geqslant 15+4\sqrt{15}$,所以$m<15+4\sqrt{15}$.

综上,$-1\leqslant m<15+4\sqrt{15}$.

例 3 设奇函数$y=f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(1)=2$且对任意x_1,x_2,都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,当$x>0$时,$f(x)$是增函数. 则函数$y=-f^2(x)$在区间$[-3,-2]$上的最大值是________.

第 4 届(1993 年)试题

解 令$x_1=x_2=0$,得$f(0)=2f(0)$,所以$f(0)=0$,$f(2)=f(1)+f(1)=4$. 已知当$x>0$时,$f(x)$是增函数,所以$f(x)>f(0)=0$. 任取$x<0$,得$f(x)=-f(-x)<0$.

易证$f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数,$y=-f^2(x)$在区间$[-3,-2]$上是增函数,所以函数$y=-f^2(x)$在区间$[-3,-2]$上的最大值是$-f^2(-2)=-f^2(2)=-16$.

评析 此题的背景是高斯函数方程. 可以利用赋值法先求出一些特殊点的函数值,这是解决此类抽象函数题的突破口.

思考 对任意实数x_1,x_2,都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,这一方程就是高斯函数方程,它的一个函数解是$f(x)=ax$. 知道了这一函数解,可以把它作为特殊函数代入计算,就能使这一填空题完美地获得解决. 下面的题也类似:

定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$,恒有$f(x)+f(y)=f(x+y)$. 若$f(16)=4$,那么$f(2003)=$________.

第 14 届(2003 年)备选题

解 取特殊函数$f(x)=ax$,则$f(16)=4=16a$,$a=\frac{1}{4}$,所以$f(2003)=\frac{2003}{4}$.

注 定义在$\mathbf{R}$上的单调函数$f(x)$,恒有$f(x)+f(y)=f(x+y)$,则$f(x)=cx$.

下面给出一个证明,用数学归纳法.

令 $x=y=0$，得 $2f(0)=f(0)$，于是 $f(0)=0$.

再令 $y=-x$，得 $f(-x)=-f(x)$.

因此满足 $f(x)+f(y)=f(x+y)$ 的函数必满足

$$f(x)+f(y)+\cdots+f(z)=f(\underbrace{x+y+\cdots+z}_{n个}).$$

在上式中令 $x=y=\cdots=z$，得 $f(nx)=nf(x)$.

以 $\frac{1}{n}x$ 替换 x，得 $f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(x)$.

再以 $mx(m\in\mathbf{N}^*)$替换 x，得 $f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(mx)=\frac{m}{n}f(x)$.

于是有 $f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x)$.

综合上面两式，得 $f(rx)=rf(x)$. 其中 r 为有理数，x 为任意实数.

特别地，当 $x=1$ 时，$f(r)=cr$，其中 $c=f(1)$.

设 λ 是任意无理数，则必存在有理数 r_1,r_2，使 $r_1<\lambda<r_2$. 根据假定，不妨设 $f(x)$是单调递增的，故

$$f(r_1)\leqslant f(\lambda)\leqslant f(r_2)\text{，即 } cr_1\leqslant f(\lambda)\leqslant cr_2.$$

因为可使 r_1,r_2 无限接近 λ，故 $f(\lambda)=c\lambda$.

综上，可知对任意实数 x，都有 $f(x)=cx$.

例 4　如图 4-1，正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，$DG=\frac{2a}{25}$，开始时 Q 与 B 重合，动点 P 与 Q 相距为 a，它们向上沿着正方形的边，经 C 等速运动到 P 与 G 重合. 以 x 记点 P 到点 B 的路程，试写出这个运动过程中，$\triangle PAQ$ 的面积与 x 的函数关系 $f(x)$，并求出 $f(x)$的最小值.

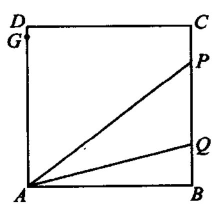


图 4-1

第 5 届(1994 年)试题

解 当 $a\leqslant x<2a$ 及 $3a\leqslant x<4a$ 时，$S_{\triangle PAQ}=a^2$；

当 $2a\leqslant x<3a$ 时，

$$S_{\triangle PAQ}=4a^2-S_{\triangle QAB}-S_{\triangle CPQ}-S_{\triangle PDA}=\frac{x^2-5ax+8a^2}{2};$$

当 $4a\leqslant x\leqslant\frac{102}{25}a$ 时，$S_{\triangle PAQ}=S_{\triangle DQA}-S_{\triangle DPQ}=\frac{x^2-11ax+30a^2}{2}$

所以 $f(x)=\begin{cases}a^2, & a\leqslant x<2a\\ \frac{x^2-5ax+8a^2}{2}, & 2a\leqslant x<3a\\ a^2, & 3a\leqslant x<4a\\ \frac{x^2-11ax+30a^2}{2}, & 4a\leqslant x\leqslant\frac{102}{25}a\end{cases}$ 当 $2a\leqslant x<3a$ 时，$f(x)$的最小值为 $0.875a^2$；当 $4a\leqslant x\leqslant\frac{102}{25}a$ 时，$f(x)$的最小值为 $0.8832a^2$.

故 $f(x)$的最小值为 $0.875a^2$.

评析 本题需分段建立描述问题中变化规律的函数.

与几何图形有关的函数问题，确定定义域时一定要考虑其几何意义.上述解法中还包含了对含参问题分类讨论的数学思想方法，即由对称轴与闭区间的位置关系而确定参数分两种情况进行讨论.

思考 分段函数求最大(小)值，必须先分段求出最大(小)值，再通过比较确定整个定义域上的最大(小)值.

例 5 从半径为 1 的圆铁片中去掉一个半径为 1、圆心角为 x 的扇形，将余下的部分卷成无盖圆锥.

(1)用 x 表示圆锥的体积 V；

(2)求 V 的最大值.

第 13 届(2002 年)试题

解 (1)设卷成的无盖圆锥体的底面半径为 r，高为 h，

则有 $2\pi-x=2\pi r, V=\frac{1}{3}\pi r^2h, r^2+h^2=1$

其中　$0<x<2\pi, 0<r<1, 0<h<1$

所以　$x=2\pi(1-r), r=1-\frac{x}{2\pi}, h=\sqrt{1-r^2}$

所以

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{1-r^2} \\ &= \frac{1}{3}\pi\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{1-\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^2} \\ &= \frac{(2\pi-x)^2}{24\pi^2}\sqrt{x(4\pi-x)} \end{aligned}$$

所以　$V=\frac{(2\pi-x)^2}{24\pi^2}\sqrt{x(4\pi-x)}, (0<x<2\pi)$

(2)由(1)知，

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{1-r^2} \quad (0<r<1) \\ &= \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{r^2 \cdot r^2 \cdot (2-2r^2)}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r^2+r^2+2-2r^2}{3}\right)^3} \\ &= \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi \end{aligned}$$

其中：当 $r^2=2-2r^2$，即 $r^2=\frac{2}{3}$ 时，

也即　$x=2\pi\left(\frac{1-\sqrt{6}}{3}\right)$ 时，V 取得最大值，

所以　V 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$.

评析　本题求 V 的最大值也可从 $V=\frac{(2\pi-x)^2}{24\pi^2}\sqrt{x(4\pi-x)}, (0<$

$x<2\pi$)中求,但不如现在从 $V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{1-r^2}(0<r<1)$ 中求简捷.

均值不等式应用时一定要注意等号成立的条件,当条件不满足时要凑配系数,或用“待定系数法”,由使用均值不等式的最佳条件列出方程组,求出欲凑配的待定系数,体现的是“函数与方程思想”.

思考 从本题的结果出发,我们可得到:

(1)$V=\frac{(2\pi-x)^2}{24\pi^2}\sqrt{x(4\pi-x)}$,$(0<x<2\pi)$的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$.

(2)令 $r=\cos x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $r^2\sqrt{1-r^2}=\cos^2 x\sin x$.

由此可得知函数 $y=\cos^2 x\sin x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

一题多变,触类旁通,是学习数学的一种好方法.

例 6 已知函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}-\sqrt{-x^2+5x-6}$,则函数 $f(x)$的最大值与最小值之差是________.

第 15 届(2004 年)试题

解 为使函数 $f(x)$有意义,必须

$\begin{cases}-x^2+3x-2\geqslant 0\\-x^2+5x-6\geqslant 0\end{cases}$,即$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,所以 $x=2$.

函数 $f(x)$的定义域是$\{2\}$,而 $f(2)=0$,所以函数 $f(x)$的最大值与最小值之差是 0.

评析 无巧不成书.上面的解法实在是太巧了.函数定义域是函数概念的一部分,确定了定义域是单元素集合$\{2\}$,问题就迎刃而解了.

思考 函数定义域是解题时分类的重要标准.解有关函数的问题,不妨先考虑定义域,结合题型特征进行分析,常可发现奇异思路,简化解题过程,这是一种重要的解题策略.如:

函数 $f(x)=\frac{x+|x-4|}{\sqrt{9-x^2}}$ ( )

(A)是奇函数但不是偶函数.

(B)是偶函数但不是奇函数.

(C)既是奇函数又是偶函数.

(D)既不是奇函数又不是偶函数.

第 15 届(2004 年)试题

解　求得其定义域为 $(-3,3)$ 后，可化简函数 $f(x)=\frac{x+|x-4|}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{4}{\sqrt{9-x^2}}$，一望而知其为偶函数，选(B).

再举一例：解不等式 $\sqrt{x^2-25}+\sqrt{x^2+7x}>3$

利用常规解法，去根号势必很复杂. 不妨从定义域入手，寻找突破口.

易知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-25}+\sqrt{x^2+7x}$ 的定义域是 $(-\infty,-7]\cup[5,+\infty)$，而当 $x\in(-\infty,-7]$ 时，函数 $f(x)$ 是减函数，所以 $f(x)\geqslant f(-7)>3$；当 $x\in[5,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 是增函数，所以 $f(x)\geqslant f(5)>3$. 因此原不等式的解是 $(-\infty,-7]\cup[5,+\infty)$.

函数 $f(x)$ 的定义域如果是一般数集，如何求函数 $f(x)$ 的最大值与最小值？请看下面二例.

例 7　函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-3x+3}$ 达到最大值时，x 的值是________.

第 15 届(2004 年)试题

解　$f(x)=\sqrt{(x+1)^2+1}-\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，可看做动点 $P(x,0)$ 到两个定点 $A(-1,1)$，$B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的距离之差. 因为

$$|PA|-|PB|\leqslant|AB|$$

所以当直线 AB 与 x 轴相交时，$f(x)$ 有最大值，由直线 AB 的方程并令 $y=0$，即可得 $x=9+5\sqrt{3}$.

例 8 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+3x+3}+\sqrt{x^2-3x+3}$ 的最小值是________,其中 $x\in\mathbf{R}$.

第 3 届(1992 年)试题

解 将函数式作如下变形

$$f(x)=\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left[0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2}$$

等式右边可看作:动点 $P(x,0)$ 到两个定点 $A\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的距离之和. 由于 A、B 分别在 x 轴两边,所以 $f(x)=|PA|+|PB|\geqslant|AB|=2\sqrt{3}$,等号一定能取到,所以函数 $f(x)$ 的最小值是 $2\sqrt{3}$.

评析 初看例 7,例 8 是两道代数题,而实质却是几何题. 经简单变形,其几何意义便十分明显:分别表示动点 $P(x,0)$ 到两个定点 A,B 的距离之和(差). 事实上,命题人正是从这里出发,经过简单变形把题目变难的.

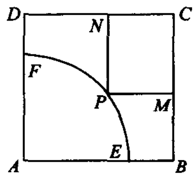
思考 这里的特点在于换一个角度思考问题,针对题目的特点,构造出距离模型,在这个模型上,问题变得直观,易于解决.

根据距离模型几何意义的多样性,取点时有一定的灵活性,一般求距离和的最值:两点取在 x 轴两边;求距离差的最值:两点取在 x 轴同侧. 这样会使问题易于解决.

例 9 如图 4-2,一块边长为 20 厘米的正方形铁片 $ABCD$ 已截去一个半径为 r 厘米($r\in(0,20]$)的扇形 AEF(四分之一个圆),用剩下的部分截成一个矩形 $PMCN$,怎样截可使此矩形的面积最大? 最大面积是多少?

第 15 届(2004 年)试题

解 如图 4-2,连接 AP,以 A 为原点,以射线 AB 为 x 轴正半轴,建立直角坐标系.



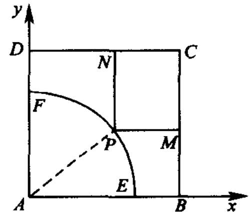


图 4-2

设$\angle PAE=\theta$,则 $C(20,20)$,$P(r\cos\theta,r\sin\theta)$,

$r\in(0,20]$,$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. $t=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$,

令矩形 $PMCN$ 的面积为 S 厘米^2,则

$$\begin{aligned}S&=(20-r\cos\theta)(20-r\sin\theta)\\&=400-20r(\cos\theta+\sin\theta)+r^2\cos\theta\sin\theta\\&=400-20rt+\frac{1}{2}r^2(t^2-1)\\&=\frac{1}{2}r^2\left[\left(t-\frac{20}{r}\right)^2-1\right]+200\end{aligned}$$

当 $r\in(40\sqrt{2}-40,20]$,即$\frac{20}{r}\in\left[1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$时,$S$ 取最大值,则 $t=\sqrt{2}$,$\theta=\frac{\pi}{4}$,$S_{\max}=\frac{1}{2}r^2[(\sqrt{2}-\frac{20}{r})^2-1]+200=\frac{1}{2}r^2-20\sqrt{2}r+400$.

当 $r=40\sqrt{2}-40$,即$\frac{20}{r}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$时,$S$ 取最大值,则 $t=1$ 或$\sqrt{2}$,$\theta=0,\frac{\pi}{4}$或$\frac{\pi}{2}$,

$$S_{\max}=\frac{1}{2}r^2\left[\left(1-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\right]+200=\frac{2\sqrt{2}-1}{8}r^2+200.$$

当 $r\in(0,40\sqrt{2}-40]$,即$\frac{20}{r}\in\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$时,$S$ 取最大值则 $t=1$,$\theta=0$ 或$\frac{\pi}{2}$,

$$S_{\max}=\frac{1}{2}r^2\left[\left(1-\frac{20}{r}\right)^2-1\right]+200=400-20r.$$

评析　这是一道实际应用问题,我们通过数学建模,将它转化为含参数 $t(t\in[1,\sqrt{2}])$ 的二次函数 $S=\frac{1}{2}r^2\left[\left(t-\frac{20}{r}\right)^2-1\right]+200$ 的最值问题. 函数 S 对 t 来说是二次的,在闭区间 $[1,\sqrt{2}]$ 上的最值只在端点 1,$\sqrt{2}$ 或对称轴 $t=\frac{20}{r}$ 处取到,对 $r\in(0,20]$ 分类讨论求解就十分顺利了.

思考　(1)求解应用题的一般方法

①审题:弄清题意,分清条件和结论,理顺数量关系;

②建模:将文字语言转化成数学语言,用数学知识建立相应的数学模型;

③求模:求解数学模型,得到数学结论;

④还原:将用数学方法得到的结论还原为实际问题的意义.

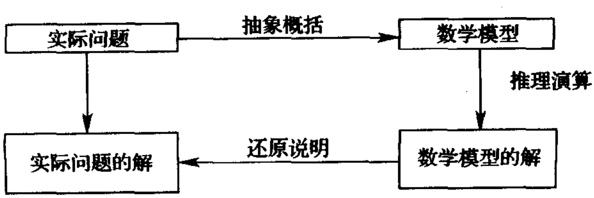
(2)几种重要的函数模型的应用

①应用二次函数模型解决最值问题;

②应用分式函数模型:$y=x+\frac{a}{x}(a>0)$,结合单调性或重要不等式解决有关最值问题.

③应用函数模型:$y=kx(k>0)$、$y=N(1+p)^x(N>0,p>0)$、$y=\log_a x$ 解决与直线上升、指数爆炸、对数增长有关的实际问题.

函数的应用问题通常都需要运用数学模型方法解决. 其步骤如下图:



数学模型(对实际问题做恰当的数学描述,就是建立恰当的数学模型)来源于实际,它是对实际问题的抽象概括,加以数学描述后的产物,最后它要回到实际中去检验,因此对实际问题做深刻理解是运用数学模型方法的前提.

第5讲 二次函数

一、基础知识

1. 二次函数的解析式(设 $a\neq0$)

(1)一般式 $f(x)=ax^2+bx+c$;

(2)顶点式 $f(x)=a\ (x-h)^2+k$;

(3)两根式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. 二次函数的区间最值

对二次函数 $f(x)=a\ (x-h)^2+k(a>0)$ 在区间 $[m,n]$ 上的最值问题有以下结论

若 $h\in[m,n]$,则 $y_{\min}=f(h)=k$, $y_{\max}=\max\{f(m),f(n)\}$;

若 $h\notin[m,n]$,则 $y_{\min}=\min\{f(m),f(n)\}$, $y_{\max}=\max\{f(m),f(n)\}$.

3. 一元二次方程根的分布问题一般是经过分析相应的二次函数的图像求解.通常考察:

(1)抛物线的开口方向;

(2)判别式的符号;

(3)区间端点值的符号;

(4)对称轴的位置.

设一元二次函数 $f(x)=0$,$(a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $a\neq0)$,

下面给出一元二次方程 $f(x)=0$ 根的分布的一些基本结论.

(1)有两个正根的充要条件

当 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 时，$x_1,x_2>0$ 的充要条件是 $x_1+x_2>0$，且 $x_1x_2>0$，根据韦达定理知，方程 $f(x)=0$ 有两个正根的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$$

(2)有两个负根的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}<0\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$$

(3)有一个正根，一个负根的充要条件是 $ac<0$.

(4)两根均大于 k(k 为常数)的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}>k\\ af(k)>0\end{cases}$$

(5)两根均小于 k(k 为常数)的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}<k\\ af(k)>0\end{cases}$$

(6)一根大于 k，另一根小于 k(k 为常数)的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\\ af(k)<0\end{cases}$$

(7)两根都在 (k,p)(k,p 为实常数)内的充要条件是

$$\begin{cases} af(k) > 0 \\ k < -\dfrac{b}{2a} < p \\ af(p) > 0 \end{cases}$$

(8)在区间(k,p)内有且只有一个实根(不含等根)的充要条件是 $f(k)f(p)<0$.

二、例题

例 1 已知 $f(x)=x^2-2001x$,若 $f(n)=f(m)$,$m\neq n$,则 $f(n+m)$等于(　　)

(A)2001.　　(B)-2001.　　(C)0.　　(D)1000.5.

第 13 届(2002 年)试题

解 $f(x)$为二次函数,其图像是抛物线,根据抛物线的性质,若 $f(n)=f(m)$,$m\neq n$,则 m,n 到抛物线对称轴的距离相等,故

$$m+n=-\frac{b}{a}=2001,f(m+n)=f(2001)=2001^2-2001\times2001=0,$$

选(C).

评析 本题也可以用纯代数的方法求解.

解 $f(n)=f(m)$即 $m^2-2001m=n^2-2001n$,即$(m-n)(m+n-2001)=0$,因为 $m\neq n$,所以 $m+n=2001$,$f(m+n)=f(2001)=2001^2-2001\times2001=0$,选(C).

思考 本题结论可以推广为更一般的

已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx(a\neq0)$,且 $f(n)=f(m)$,$m\neq n$,则 $f(n+m)=0$.

第 10 届(1999 年)试题

证明 $f(n)=f(m)$即 $am^2+bm=an^2+bn$,即$(m-n)\left(m+n+\dfrac{b}{a}\right)=0$,因为 $m\neq n$,所以 $m+n=-\dfrac{b}{a}$,$f(m+n)=$

$f\left(-\frac{b}{a}\right)=a\left(-\frac{b}{a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{a}\right)=0.$

例 2　函数 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}, x\in[n,n+1]$($n$ 是整数)的值域中恰有 10 个不同整数,则 n 的值为________.

第 8 届(1997 年)试题

解　当 $n\geqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 上是增函数,$f(n+1)-f(n)=2n+2$,若 $2n+2=10$,则 $n=4$,此时 $f(x)$ 的值域区间长度为 10,其中有 21,22,…,30 共 10 个整数;

当 $n\leqslant -2$ 时,$f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 上是减函数,$f(n)-f(n+1)=-2n-2$,若 $-2n-2=10$,则 $n=-6$,此时 $f(x)$ 的值域区间长度为 10,其中有 21,22,…,30 共 10 个整数;

当 $-2<n<0$ 时,显然不符合要求.

所以 $n=-6$,或 4.

评析　这里的分类讨论实际上是按所给函数的对称轴 $x=-\frac{1}{2}$ 及函数单调性进行的. 当然也可用其他方法,如用配方法:

将二次函数配方,得 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

由于 $x\in[n,n+1]$,所以 $x+\frac{1}{2}\in\left[n+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}\right]$.

要求 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ 的取值范围,必须讨论 $n+\frac{1}{2}$ 和 $n+\frac{3}{2}$ 的正负. 下略.

思考　如果将本题中"n 是整数"改为"n 是任一实数",结果如何?

我们只要用配方法的思想,修改上面的解法,类似地可得出 n 的取值范围.

解　当 $n\geqslant -\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 上是增函数,$f(n+1)-$

$f(n)=2n+2$，若 $10\leqslant 2n+2<11$，则 $4\leqslant n<\frac{9}{2}$，此时 $f(x)$ 的值域中共有 10 个整数；

当 $n\leqslant -\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 上是减函数，$f(n)-f(n+1)=-2n-2$，若 $10\leqslant -2n-2<11$，则 $-\frac{13}{2}<n\leqslant -6$，此时 $f(x)$ 的值域中共有 10 个整数；

当 $-\frac{3}{2}<n<-\frac{1}{2}$ 时，显然不符合要求.

所以 $-\frac{13}{2}<n\leqslant -6$ 或 $4\leqslant n<\frac{9}{2}$.

例 3 已知函数 $y=f(x)=-2x^2+8x+1$，$x\in\mathbf{R}$，对于 $t\in\mathbf{R}$，在区间 $[t,t+2]$ 上，将函数 $f(x)$ 的最大值表示为 t 的函数 $g(t)$，则 $g(t)=$________.

第 13 届(2002 年)试题

解 因为 $y=f(x)=1+8x-2x^2=9-2(x-2)^2$. 所以 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称.

当 $t+2<2$，即 $t<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[t,t+2]$ 上的最大值为 $f(t+2)=9-2t^2$；

当 $t\leqslant 2\leqslant t+2$，即 $0\leqslant t\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在区间 $[t,t+2]$ 上的最大值为 $f(2)=9$；

当 $t>2$ 时，$f(x)$ 在区间 $[t,t+2]$ 上的最大值为 $f(t)=1+8t-2t^2$；

$$所以\ g(t)=\begin{cases}-2t^2+9, & t\in(-\infty,0)\\ 9, & t\in[0,2]\\ -2t^2+8t+1, & t\in[2,+\infty)\end{cases}.$$

评析 这是一道非常典型的闭区间上含参数的二次函数最值问题，把二次函数的基础知识和逻辑划分的数学思想巧妙地结合

了起来,需要灵活思维并全面考虑问题才能获得圆满解决.

思考 本题是区间含参问题,它的解题思想对闭区间上含参数的二次函数最值问题(给定区间,函数含参;区间,函数均含参)具有普遍的参考价值.下面提供一道思考题,题目结构不同,但解题思路相同(过程略).

设 a 为实数,$x\in[0,1]$,求函数 $f(x)=(4-3a)x^2-2x+a$ 的最大值 M.

参考答案:$M(a)=\begin{cases}2(1-a), a\leqslant\frac{2}{3}\\ a, a>\frac{2}{3}\end{cases}$.

例 4 Let a and b the two real roots of the quadratic equation $x^2-(k-1)x+(k^2+3k+4)=0(x\in\mathbf{R})$ where k is some real number, the largest possible value of a^2+b^2 is ________.

第 13 届(2002 年)试题

译文 若 a,b 是二次方程 $x^2-(k-1)x+(k^2+3k+4)=0$ $(x\in\mathbf{R})$的两个实数根,那么 a^2+b^2 的最大值是________.

解 依题意有 $a+b=k-1, ab=k^2+3k+4$,

所以 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(k-1)^2-2(k^2+3k+4)=-k^2-8k+7=-(k+4)^2+9$,

又 $\Delta_x=(k-1)^2-4(k^2+3k+4)\geqslant0$,即 $-3k^2-14k-15\geqslant0$,解得 $-3\leqslant k\leqslant-\frac{5}{3}$.

所以 $k=-3$ 时,$a^2+b^2=-(-3+4)^2+9=8$.

评析 用英文描述的数学题,首先要读懂题意,将其正确地翻译成数学语言.再根据题意,完成解题过程.此题属于二次函数根有关的问题,一定要注意判别式对参数 k 的制约作用.

思考 著名的数学家,莫斯科大学教授 C. A. 雅洁卡娅曾在一次向数学奥林匹克参赛者发表“什么叫解题”的演讲时提出:“解题

就是把要解的题转化为已经解过的题”.数学的解题过程,就是从未知向已知、从复杂到简单的化归转换过程.

转化分等价转化与非等价转化.等价转化要求转化过程中前因后果是充分必要的,才能保证转化后的结果仍为原问题的结果.非等价转化其过程是充分或必要的,要对结论进行必要的修正(如无理方程化有理方程要求验根),它能给人带来思维的闪光点,找到解决问题的突破口.我们在应用时一定要注意转化的等价性与非等价性的不同要求,实施等价转化时确保其等价性,保证逻辑上的正确.

例5　方程 $mx^2-(m-1)x+m^2-m-2=0$ 的两个实根分别在区间(0,1)与(1,2)内,则 m 的取值范围是

第5届(1994年)试题

解　设 $f(x)=mx^2-(m-1)x+m^2-m-2$,由

$$\begin{cases}m>0\\f(0)>0\\f(1)<0\\f(2)>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}m<0\\f(0)<0\\f(1)>0\\f(2)<0\end{cases}\text{即}\begin{cases}m>0\\m^2-m-2>0\\m^2-m-1<0\\m^2+m>0\end{cases}\text{无解;或}\begin{cases}m<0\\m^2-m-2<0\\m^2-m-1>0\\m^2+m<0\end{cases},$$

解得　$-1<m<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

评析　这是一元二次方程式根的分布问题,常常根据所给问题的条件和欲求结论之间的内在联系,既分析其代数意义,又显示其几何直观图,使数量关系的精确刻划与二次函数的图像直观巧妙、和谐地结合在一起,充分利用这种结合,寻找解题思路,使问题化难为易、化繁为简,从而得到解决.但是用图像法得到的结论有时缺乏严谨性,原因是问题的条件是多变的,容易出错,要特别注意.

思考　设一元二次方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0$,($a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $a\neq0$)

两实根分别在区间(k,p)、(m,n)内(k,p,m,n均为实常数)的充要条件

$$\begin{cases} f(k)f(p)<0 \\ f(m)f(n)<0 \end{cases}$$

下面两个试题可类似求解：

(1)关于x的方程$x^2-(2m-8)x+m^2-16=0$的两个实根中，一个比$\frac{3}{2}$大，另一个比$\frac{3}{2}$小，则m的取值范围是________.

第7届(1996年)试题，答案：$-\frac{1}{2}<m<\frac{7}{2}$

(2)关于x的方程$kx^2+x+k+1=0$有两个实根，一个比2大，另一个比1小，则k的取值范围是________.

第9届(1998年)试题，答案：$-\frac{3}{5}<k<0$

第6讲　指数函数与对数函数

一、基础知识

1. 指数

(1)若$x^n=a$($n>1$且$n\in\mathbf{N}^*$)，则x叫作a的n次方根.$\sqrt[n]{a}$叫作根式，n叫作根指数，a叫作被开方数.

正数的偶次方根有两个且互为相反数，负数没有偶次方根.

正数的奇次方根为正数，负数的奇次方根为负数.

若根指数为奇数，则被开方数a可以为任意实数，a的n次方根为$\sqrt[n]{a}$.

若根指数为偶数，则被开方数 a 必须为非负实数，此时 a 的 n 次方根为 $\pm\sqrt[n]{a}$

(2)根式的运算性质

$$(\sqrt[n]{a})^n=a,\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a,\text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ |a|,\text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases};$$

(3)正数的分数指数幂的意义

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$$

分数指数幂的规定：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$$

0 的正分数指数幂等于 0；

0 的负分数指数幂无意义.

注意　分数指数幂严格规定了运算顺序，当 $a>0$ 时，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，不能随意交换 m、n 的次序，同时必须注意幂指数不能随意约分. 否则就会出错.

(4)幂的运算性质

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q});$$

$$(a^r)^s=a^{r\cdot s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q});$$

$$(ab)^r=a^r\cdot b^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q}).$$

2. 对数

(1)如果 $a(a>0,a\neq1)$ 的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，那么数 b 叫做以 a 为底 N 的对数. 记作 $\log_a N=b$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数.

通常将以 10 为底的对数叫做常用对数，为了简便，N 的常用对数 $\log_{10}N$，记作 $\lg N$.

负数和零没有对数.

科学技术中常常使用以无理数 $e=2.71828\cdots$ 为底的对数称为

自然对数$\log_e N$简记作$\ln N$.

(2)对数的运算性质

如果$a>0,a\neq1,M>0,N>0$,那么

①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$;

②$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$;

③$\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$.

(3)对数的换底公式及其重要推论

换底公式:$\log_a N=\dfrac{\log_m N}{\log_m a}$;

推论:$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$,$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

3. 指数函数

(1)函数$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$叫做指数函数.其中x是自变量,函数的定义域是$\mathbf{R}$.

(2)指数函数的图像特征与函数性质

①当$a>1$时,第一象限图像位于直线$y=1$的上方,表明当$a>1$且$x>0$时,$f(x)>1$;第二象限图像位于直线$y=0$与$y=1$之间,表明当$a>1$且$x<0$时,$1>f(x)>0$.如图6-1.

当$0<a<1$时,恰好相反.如图6-2.

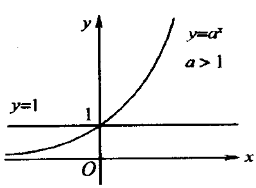


图 6-1

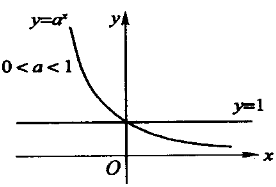


图 6-2

②当$a>1$时,图像呈上升趋势,表明当$a>1$时,$y=a^x$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,如图6-1.当$0<a<1$时,图像呈下降趋

势，$y=a^x$ 在$(-\infty,+\infty)$是减函数. 如图 6-2.

③当 $a>1$ 时，图像以 x 轴为渐近线，越来越靠近 x 轴. 即 $a>1$ 时，$x\to-\infty$，$y\to0$；同样，当 $1>a>0$ 时，$x\to+\infty$，$y\to0$.

4. 对数函数

(1)函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$叫做对数函数，其中 x 是自变量，函数定义域是$(0,+\infty)$.

对数函数是指数函数的反函数，因而对数函数的定义域是指数函数的值域$(0,+\infty)$，对数函数的值域是指数函数的定义域$(-\infty,+\infty)$.

(2)对数函数的图像特征和函数性质

图像特征	函数性质
①对数函数图像都在 y 轴右侧	①定义域为$(0,+\infty)$.
②对数函数图像都过点$(1,0)$	②1 的对数为 0.
③对数函数 $y=\log_a x(a>1)$图像在直线 $x=1$ 右边的部分位于 x 轴上方，左边的部分位于 x 轴的下方. 如图6-3. 对数函数 $y=\log_a x(0<a<1)$图像在直线 $x=1$ 右边的部分位于 x 轴下方，左边的部分位于 x 轴的上方. 如图 6-4.	③底数 $a>1,x>1$ 时，$y=\log_a x>0$； 底数 $a>1,0<x<1$ 时，$y=\log_a x<0$； 底数 $0<a<1,x>1$ 时，$y=\log_a x<0$； 底数 $0<a<1,0<x<1$ 时， $y=\log_a x>0$；
④自左向右，$y=\log_a x(a>1)$图像逐渐上升，如图 6-3；$y=\log_a x(0<a<1)$图像逐渐下降，如图 6-4.	④函数 $y=\log_a x(a>1)$是增函数； 函数 $y=\log_a x(0<a<1)$是减函数.
⑤函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$的图像与函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$图像关于直线$y=x$ 对称	⑤函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$与函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$互为反函数.

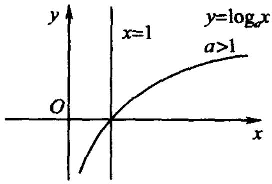


图 6-3

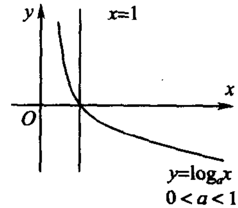


图 6-4

二、例题

例 1　函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$的单调递增区间是(　　)

(A)$(-1,0]$.　(B)$[0,1)$.　(C)$(-\infty,0]$.　(D)$[0,+\infty)$.

第 4 届(1993 年)试题

解　$y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{1-x^2}=\log_2(1-x^2)-1$,定义域是$(-1,1)$,函数$h(x)=1-x^2,x\in(-1,1)$的增区间就是原函数的增区间,该区间为$(-1,0]$,选(A).

评析　本题是判断复合函数的单调性,求解这类问题时,要特别注意中间变量(如本题中的$h(x)=1-x^2,x\in(-1,1)$)的取值范围.在数学竞赛中类似的问题很多,如:

有三个命题:

①函数$y=f(g(x))$,其中$u=g(x)$在区间D上是增函数,$y=f(u)$在区间D上是减函数,则函数$y=f(g(x))$在区间D上是减函数.

②函数$y=f(x)$有反函数$y=f^{-1}(x)$,若$y=f(x)$在区间D上是增函数,则$y=f^{-1}(x)$也是区间D上的增函数.

③函数$y=f(x)$在定义域A上存在反函数,则$f(x)$在A上是

单调函数.

以上三个命题中，正确的个数为（　　）

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

第 7 届(1996 年)试题

解　①、②中两个函数的定义域，一般不应该是同一个区间 D；③中函数存在反函数，并不一定单调. 所以三个命题无一正确，选(A).

思考　复合函数单调性的判定方法可以简记为“同增异减”，即当 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 同为增函数(或减函数)时，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 是增函数；当 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 一个为增函数，另一个为减函数时，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 是减函数.

判断函数单调性的常用方法有：定义法，观察法，图像法，复合函数法，求导法等. 具体判断时一定要注意函数的定义域.

例 2　若函数 $y=\log_3(x^2+ax-a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

(A)$\mathbf{R}$.　(B)$\mathbf{R}^+$.　(C)$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.　(D)$(-4,0)$.

第 5 届(1994 年)试题

解　由题设知 $x^2+ax-a>0$ 恒成立，从而相应二次方程 $x^2+ax-a=0$ 的判别式 $\Delta=a^2+4a<0$. 所以 $-4<a<0$，故选(D).

评析　关键是把问题等价转化为不等式恒成立时参数的取值问题.

思考　变式 1　若函数改为 $y=\dfrac{1}{\log_3(x^2+ax-a)}$，则问题等价于“$x^2+ax-a>0$ 恒成立，且 $x^2+ax-a\neq 1$”；

变式 2　若函数改为 $y=\sqrt{\log_2(x^2+ax-a)}$，则问题等价于“$\log_2(x^2+ax-a)\geqslant 0$ 恒成立”，也即“$x^2+ax-a\geqslant 1$ 恒成立”；

变式 3　若函数改为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(x^2+ax-a)}}$,则问题等价于“$\log_2(x^2+ax-a)>0$ 恒成立”,也即“$x^2+ax-a>1$ 恒成立”.

例 3　已知 $a>0$,$f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$,则 $f\left(\dfrac{1}{2004}\right)+f\left(\dfrac{2}{2004}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2003}{2004}\right)=$________.

第 15 届(2004 年)试题

解　因为

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{a^x+\sqrt{a}}=1,$$

所以

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{1}{2004}\right)+f\left(\frac{2}{2004}\right)+\cdots+f\left(\frac{2003}{2004}\right)\\=&\frac{1}{2}\left\{\left[f\left(\frac{1}{2004}\right)+f\left(\frac{2003}{2004}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2004}\right)+f\left(\frac{2002}{2004}\right)\right]+\cdots\right.\\&\left.+\left[f\left(\frac{2003}{2004}\right)+f\left(\frac{1}{2004}\right)\right]\right\}\\=&\frac{1}{2}(1+1+\cdots+1)\\=&\frac{2003}{2}=1001\ \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

评析　关键是发现隐含着的性质 $f(x)+f(1-x)=1$,然后简洁明快地利用倒写相加法求和.

思考　类似问题很多,下面几个留给读者完成:

(1)设 $f(x)=\dfrac{2+x}{1+x}$,则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(1000)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{1000}\right)=$________.

第 14 届(2003 年)备选题,答案:2998.5

(2)设 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}$,则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+$

$f\left(\frac{2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{100}\right)$的值为______.

第 5 届(1994 年)试题,答案:10000. 提示:$f(x)+f(\frac{1}{x})=2$

例 4　关于 x 的不等式$\lg^2x-(2+m)\lg x+m-1>0$ 对于 $|m|\leqslant 1$恒成立. 则 x 的取值范围是(　　)

(A)$(0,1)\cup(10^3,+\infty)$.　　(B)$\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10^2,+\infty)$.

(C)$\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10^3,+\infty)$.　　(D)$(0,10^2)\cup(10^3,+\infty)$.

第 14 届(2003 年)试题

解　设 $y=\lg x$,则有 $y^2-(2+m)y+m-1>0$. 由于这是一个含有参数的一元二次不等式,直接讨论很复杂. 可变更主元,将它按 m 进行整理,得$(1-y)m+(y^2-2y-1)>0(y\neq 1)$.

又设 $f(m)=(1-y)m+(y^2-2y-1)$,则 $f(m)$是 m 的一次函数,因为一次函数是单调函数. 因此当$-1\leqslant m\leqslant 1$ 时,$f(m)>0$,只须

$$\begin{cases}f(1)>0\\f(-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-3y>0\\y^2-y-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<0\text{ 或 }y>3\\y<-1\text{ 或 }y>2\end{cases}$$

所以 $y<-1$ 或 $y>3$,即 $\lg x<-1$ 或 $\lg x>3$,解得 $0<x<\frac{1}{10}$ 或 $x>10^3$,选(C).

评析　本题首先用换元法设 $y=\lg x$,将问题转化为一个含有字母的一元二次不等式:$y^2-(2+m)y+m-1>0$ 对$|m|\leqslant 1$ 恒成立问题. 由于直接讨论还很复杂,再利用变更主元法,将它按 m 进行整理,转化为一次不等式$(1-y)m+(y^2-2y-1)>0(y\neq 1)$对$|m|\leqslant 1$ 恒成立问题. 最后利用一次函数的单调性,使问题顺利获解.

一次次的转化,使复杂的数学问题简单化,是本题获解的关键.

当然,作为选择题,也可用取特殊值的方法求解.

思考 解数学题时,把某个式子看成一个整体,用一个变量去代替它,从而使问题得到简化,这叫换元法.换元的实质是转化,关键是设元,理论依据是等量代换,目的是变换研究对象,将问题移至新对象的知识背景中去研究,从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化,变得容易处理.

换元法又称辅助元素法、变量代换法.通过引进新的变量,可以把分散的条件联系起来,隐含的条件显露出来,或者把条件与结论联系起来.或者变为熟悉的形式,把复杂的计算和推证简化.

换元,可以使高次化为低次、使分式化为整式、使无理式化为有理式、使超越式化为代数式,在研究方程、不等式、函数、数列、三角等问题中有广泛的应用.

换元的方法有:局部换元、三角换元、均值换元等.局部换元又称整体换元.

使用换元法时,要遵循有利于运算、有利于标准化的原则,换元后要注意使引入的新变量变化范围对应于原变量的取值范围,不能缩小也不能扩大.

例 5 函数 $f(x)$ 的图像是将函数 $\log_2(x+1)$ 的图像上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$,纵坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 而得到的,则与 $f(x)$ 的图像关于原点对称的图像表示的函数的解析式是________.

第 11 届(2000 年)试题

解 设点 (a,b) 在函数 $\log_2(x+1)$ 的图像上,则 $f(x)$ 图像上的对应点 (x,y) 为 $\left(\frac{a}{3},\frac{b}{2}\right)$,所以 $a=3x,b=2y$,因为点 (a,b) 在函数 $\log_2(x+1)$ 的图像上,故 $2y=\log_2(3x+1)$,即 $y=\frac{1}{2}\log_2(3x+1)$,它关于原点对称的图像表示的函数的解析式是 $y=-\frac{1}{2}\log_2(1-3x)$.

评析　这是函数图像的放缩变换与对称变换结合的试题，这类问题的求解，宜细不宜粗，一定要设出函数图像变换前后的对应点，切忌想当然.

思考　一般地，常用的函数图像变换有：平移，放缩，对称. 若要根据图像变换作图，则要充分利用基本函数的图形，以基本函数的图形为基础，应用平移，放缩，对称变换作出图形. 特别要注意图像变换中的可变量和不变量，有时会给解题带来很大的方便.

例 6　以 a,b,c 顺次分别表示方程 $x+\log_2 x=2$，$x+\log_3 x=2$，$x+\log_2 x=1$ 的根，则它们的大小关系是（　　）

(A) $a>b>c$.　　(B) $b>a>c$.

(C) $c>a>b$.　　(D) $c>b>a$.

第 1 届（1990 年）试题

解　$f(x)=x+\log_2 x$ 是增函数，方程 $x+\log_2 x=1$ 即 $f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$，所以 $c=1$.

分别作出函数 $y_1=2-x$，$y_2=\log_2 x$，$y_3=\log_3 x$ 的图像，从图 6-5 上可见，$1<x_1<x_2$，也就是 $b>a>c$，选(B).

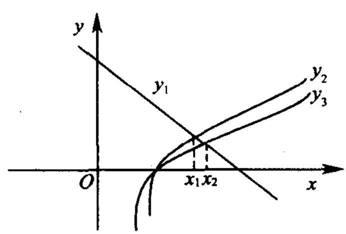


图 6-5

评析　本题应用了函数与方程、数形结合的数学思想，使问题顺利获解.

思考　函数描述了自然界中数量之间的关系，函数思想通过提出问题的数学特征，建立函数关系的数学模型，从而进行研究. 它体现了“联系和变化”的辩证唯物主义观点.

一般地，函数思想是先构造函数再利用函数的性质解题，经常利用的性质有：

$f(x)$，$f^{-1}(x)$的单调性、奇偶性、周期性、最大值和最小值、图

像变换等,另外高中阶段要熟练掌握一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数的具体特性.

在解题中,要注意挖掘题目中的隐含条件,构造出函数并妙用函数的性质,是应用函数思想的关键.只有对所给的问题观察、分析、判断比较深入、充分时,才能产生由此及彼的联系,构造出函数原型.

另外,方程问题、不等式问题和某些代数问题也可以转化为与其相关的函数问题来解.

应用函数思想的常见题型是:遇到变量,构造函数关系解题;有关不等式、方程、最小值和最大值之类问题,利用函数观点加以分析;含有多个变量的数学问题,选定合适的主变量,从而揭示其中的函数关系;实际应用问题,翻译成数学语言,建立数学模型和函数关系式,应用函数性质或不等式等知识解答;等差、等比数列中,通项公式、前 n 项和的公式,都可以看成关于 n 的函数,数列问题也可以用函数方法解决.

例 7 设 α,β 分别是方程 $\log_2 x+x-3=0$ 和 $2^x+x-3=0$ 的根,则 $\alpha+\beta=$________,$\log_2\alpha+2^\beta=$________.

第 9 届(1998 年)高二试题

解 在直角坐标系内分别作函数 $y=\log_2 x$,$y=2^x$ 和直线 $y=x$ 与 $y=-x+3$ 的图像.

观察图 6-6 可知:

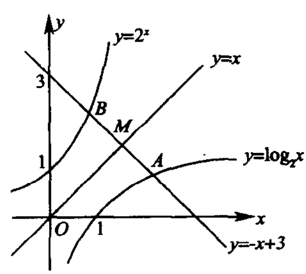


图 6-6

α 是直线 $y=-x+3$ 与对数曲线 $y=\log_2 x$ 的交点 A 的横坐标.

β 是直线 $y=-x+3$ 与指数曲线 $y=2^x$ 的交点 B 的横坐标.

因为曲线 $y=2^x$ 与曲线 $y=\log_2 x$ 关于直线 $y=x$ 对称,

所以设 M 是直线 $y=x$ 与直线

$y=-x+3$ 的交点，则 OM 垂直平分 AB.

于是 $\alpha+\beta=2x_M$，$\log_2\alpha+2^\beta=2y_M$，

再由 $\begin{cases}y=-x+3\\ y=x\end{cases}$，可得 $\alpha+\beta=\log_2\alpha+2^\beta=2x_M=2y_M=3$.

评析　上面是采用数形结合的方法求解的，关键在于找到函数图像之间内隐的几何联系. 是否有纯代数的解法存在？这是值得探索的. 读者可参考第 3 讲例 1 解法利用函数的单调性完成解题.

思考　"数"与"形"是数学中最本质、最古老的两样东西. 著名数学家华罗庚指出："数缺形时少直观，形缺数时难入微"，数形结合就是把抽象的数学语言与直观的图形结合起来思索，使抽象思维与形象思维结合，通过"以形助数"或"以数解形"，使得复杂问题简单化，抽象问题具体化，从而起到优化解题途径的目的.

数形结合在解题过程中应用十分广泛，运用数形结合思想解题，不仅很直观，易于寻找解题途径，而且能避免繁杂的计算和推理，简化解题过程，可起到事半功倍的效果.

巧妙运用数形结合的数学思想方法在解决选择、填空题和一些抽象的数学问题时，更有优越性.

例 8　已知函数 $f(x)=|2^x-1|$，$a<b<c$，且 $f(a)>f(c)>f(b)$，则（　　）

(A) $a<0,b<0,c<0$.　　(B) $a<0,b\geq 0,c>0$.

(C) $2^{-a}<2^c$.　　(D) $2^a+2^c<2$.

第 7 届（1996 年）试题

解　作出函数 $f(x)=|2^x-1|$ 的草图（略），由图可见必须有 $a<0,c>0$，b 不确定，而 $f(a)=|2^a-1|=1-2^a$，$f(c)=|2^c-1|=2^c-1$，由 $f(a)>f(c)$，得 $2^a+2^c<2$，选(D).

评析　本题是应用数形结合的方法求解的，关键是心中要有

一些基本函数的图形(不一定要画出). 对题中给出的代数式子,从几何角度认识它的性质,拓展解题视野,探讨解题思路. 而有些问题,则需要对题给的几何条件,考虑它对应的代数表达式或数值,并研究它的性质与特征,寻求解题途径;或者从数、形两个方面交替地考虑和应用.

用数形结合方法解决问题可概括成如下两点:

(1)在解决“数”的问题时,常结合给出的图形或构造出与之相适应的几何图形来,并利用图形的特性和规律,帮助解决问题.

(2)在解决“形”的问题时,常采用计算方法,使要解决的形的问题转化为对数量关系式的研究.

思考 著名数学家华罗庚曾说过:“数形结合千般好,数形分离万事休.”数是形的抽象概括,形是数的直观表现. 数与形的结合,一方面是通过数量关系的讨论来研究几何图形的性质,另一方面是利用几何图形的直观,揭示数量关系许多深刻的特性. 数形结合的思想方法,是研究数学问题的一个基本方法,深刻理解这一观点,有利于提高我们发现问题、分析问题和解决问题的能力.

数形结合的主要方法有:以数助形、以形助数、形数互化、几何解释等方法.

几何方法具有直观、形象的优势,代数方法的特点是解答过程严密、规范、思路清晰. 应用数形结合的思想就能扬这两种方法之长.

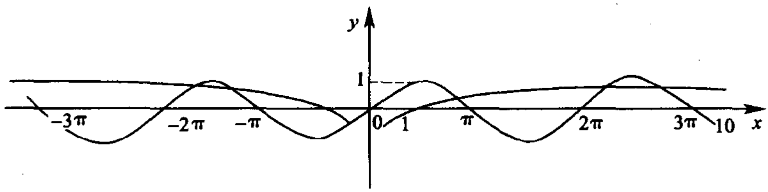
下面再给出一个用数形结合法求解的试题:

方程 $\lg|x|=\sin x$ 的根的个数是(　　)

(A)4.　　(B)5.　　(C)6.　　(D)7.

第 10 届(1999 年)试题

解 画出 $y=\lg|x|$, $y=\sin x$ 的图像有 6 个交点,选(C).



例 9　不等式$(-2)^x a-3^{x-1}-(-2)^x<0$对于任意正整数$x$恒成立,求实数$a$的取值范围.

第 15 届(2004 年)试题

解　原不等式等价于$(-1)^x a<\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x+(-1)^x$,为分离参数$a$,须讨论正整数$x$的奇偶性.

当x是正偶数时,$a<\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x+1$　　(1)

而函数$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x+1$是单调增函数,最小值为$f(2)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=\frac{7}{4}$,所以$a<\frac{7}{4}$时,式(1)恒成立;

当x是正奇数时,$-a<\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x-1$,$a>1-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x$　　(2)

而函数$g(x)=1-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x$是单调减函数,最大值为$g(1)=1-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$,所以$a>\frac{1}{2}$时,式(2)恒成立.

综上,实数a的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$.

评析　本题利用分离参数的思想方法,由于涉及到$(-1)^x$的取值,必须对x进行奇偶分类讨论,然后利用函数的单调性求解.

思考　分类讨论是一种重要的数学思想方法,进行分类讨论要遵循的原则是:分类的对象是确定的,标准是统一的,不重复、不

遗漏，分清主次，不越级讨论. 其中最重要的一条是“不重不漏”.

这类问题有时会与数列等知识结合，成为综合性试题，值得关注！如：

已知 n 为正整数，解关于 x 的不等式

$$\log_a x-4\log_{a^2}x+\cdots+n(-2)^{n-1}\log_{a^{n-1}}x$$
$$>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a^2)$$

（答案：$\left\{x\,|\,x>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right\}$）

第 7 讲　函数方程与开放题

一、基础知识

1. 含有自变量和未知函数的方程，称为函数方程，有时也简称为方程. 如果函数 $f(x)$ 在其定义域内满足所给的函数方程，就称 $f(x)$ 为该函数方程的函数解或解.

2. 函数方程的常用解法有：代换法；赋值法、递推法、待定系数法.

3. 开放题是相对于传统的答案惟一的封闭题而言的，其答案不惟一.

二、例题

例 1　定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$，对任何 $a,b\in\mathbf{R}$，都有 $f[af(b)]=ab$，则 $\sqrt{f^2(1994)}=$________.

第 5 届(1994 年)试题

解 取 $a=1$ 得 $f[f(b)]=b$ (1)

取 $a=b$ 得 $f[bf(b)]=b^2$ (2)

取 $a=f(b)$ 得 $f[f^2(b)]=bf(b)$ (3)

(3)结合(1)得 $f\{f[f^2(b)]\}=f[bf(b)]=f^2(b)$,

(3)结合(2)得 $f\{f[f^2(b)]\}=b^2$,所以 $f^2(b)=b^2$.

$\sqrt{f^2(1994)}=1994$.

评析 这是复合型的函数方程问题.只有反复特殊化,如本题,取 $a=1,a=b,a=f(b)$,才能得到欲求的结果.

思考 一般情况下成立的数学题,在其特殊情形下也成立.作为填空题,只要猜测出一个函数解,就非常容易求出结果了.如本题,实际上我们容易看出,一个特解为 $f(x)=x$,进而易得 $\sqrt{f^2(1994)}=1994$.

例 2 函数 $y=f(x)$ 对于任意实数 x,y 都满足 $f(x+y^2)=f(x)+2[f(y)]^2$,且 $f(1)\neq0$,则 $f(1998)=$________.

第 9 届(1998 年)试题

解 令 $x=y=0$,得 $f(0)=f(0)+2[f(0)]^2,f(0)=0$

令 $x=0,y=1$,得 $f(1)=f(0)+2[f(1)]^2$,

$\because f(1)\neq0,\therefore f(1)=\frac{1}{2}$.

令 $x=n,y=1$,得 $f(n+1)=f(n)+2[f(1)]^2=f(n)+\frac{1}{2}$,

$\therefore f(1998)=f(0)+\frac{1}{2}(1998-0)=999$.

评析 根据所给的条件,本题我们灵活地选取了几组适当的自变量的特殊值 $x=y=0;x=0,y=1;x=n,y=1$,简化了函数方程,将其转化为等差数列问题,逐步靠近未知的结果.

思考 由 $f(0)=0,f(n+1)=f(n)+\frac{1}{2}$,可得 $f(n)=\frac{n}{2}$.作为

填空题,如果能据此猜出一个解函数为 $f(x)=\frac{1}{2}x$,求解就得出了.

例 3 若函数 $f(x)$满足条件

$2f(-\sin x)+3f(\sin x)=4\sin x\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

则 $f(x)=$________.

第 9 届(1998 年)山西、江西、天津赛区试题

解 令 $\sin x=t$,则 $\cos x=\sqrt{1-t^2}$,原方程即

$$2f(-t)+3f(t)=4t\sqrt{1-t^2}\tag{1}$$

将上式中 t 换成 $-t$,得

$$2f(t)+3f(-t)=-4t\sqrt{1-t^2}\tag{2}$$

由(1)、(2)可得 $f(t)=4t\sqrt{1-t^2}$,$|t|\leqslant 1$.

评析 这里是用换元法来解的.求函数解析式的主要方法有:定义法、赋值法、换元法、递推法、待定系数法、反函数法等.当函数的模式已知时,常用待定系数法;当函数的模式未知时,如果变量容易替换,常用换元法,具体用什么方法要根据题中条件来选定.

思考 函数方程的解是符合约束条件的任意函数.本题中求出的实际上只是符合条件的一个函数解.

由于$|t|>1$ 时,题设条件并没有对函数 $f(x)$进行约束,因此可以任意取值,也可以没有定义.所以本题的通解为

$$f(t)=\begin{cases}4t\sqrt{1-t^2}, & |t|\leqslant 1\\ \varphi(t), t\in A(A\subseteq(-\infty,-1)\cup(1,+\infty))\end{cases}$$

例 4 定义在 $\mathbf{N}^*$ 上,且在 $\mathbf{N}^*$ 上取值的严格增函数 $y=f(n)$,对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$,当$(m,n)=1$(即 m,n 互素)时,都有 $f(n)f(m)=f(nm)$.又知 $f(180)=180$,则 $f(1991)$的值是________.

第 2 届(1991 年)试题

解 $f(180)=f(1\times180)=f(1)f(180)=180,\Rightarrow f(1)=1$

又 $y=f(n)$是定义在 $\mathbf{N}^*$ 上,且在 $\mathbf{N}^*$ 上取值的严格增函数,

所以

$$1=f(1)<f(2)<f(3)<\cdots<f(179)<f(180)=180$$

由此知 $f(k)=k(1\leqslant k\leqslant 180, k\in\mathbf{N})$.

$$f(1995)=f(399\times 5)=f(399)f(5)=f(3\times 133)\times 5$$
$$=3\times 133\times 5=1995$$

$$180=f(180)<f(181)<\cdots<f(1995)=1995$$

进而推得 $f(k)=k(180\leqslant k\leqslant 1995, k\in\mathbf{N})$，所以 $f(1991)=1991$.

评析　本题很巧妙地应用了连续整数等距为 1 的性质，结合函数单调性，采用两边夹的思想方法，使 $f(n)$，n 形成一一对应相等的关系，实际上可进一步证明 $f(n)=n, n\in\mathbf{N}$，但要用到第二数学归纳法，下面写出来仅供参考.

证明　上面已证 $f(k)=k(1\leqslant k\leqslant 180, k\in\mathbf{N})$，假设 $n\leqslant k, k\geqslant 3$ 时都有 $f(n)=n$，下面证明 $n=k+1, k\geqslant 3$ 也有 $f(n)=k+1$.

由于 $(k,k-1)=1$，所以

$f[k(k-1)]=f(k)f(k-1)=k(k-1)$，

所以由 $y=f(n)$ 是定义在 $\mathbf{N}^*$ 上，且在 $\mathbf{N}^*$ 上取值的严格增函数，得

$$k=f(k)<f(k+1)<\cdots<f[k(k-1)]=k(k-1)$$

由此得 $f(n)=n(k\leqslant n\leqslant k(k-1), k\in\mathbf{N}, k>2)$

由于 $k(k-1)\geqslant k+1$，所以 $f(k+1)=k+1$，这就证明了 $n=k+1, k\geqslant 3$ 也有 $f(n)=k+1$

根据归纳原理，对任意 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f(n)=n$.

数学归纳法是用来证明某些与自然数有关的数学命题的一种推理方法，在解数学题中有着广泛的应用. 它是一个递推的数学论证方法：

论证的第一步是证明命题在 $n=1$（或 n_0）时成立，这是递推的基础；

第二步是假设在 $n=k$ 时命题成立，再证明 $n=k+1$ 时命题

也成立，这是无限递推下去的理论依据，它判断命题的正确性能否由特殊推广到一般，实际上它使命题的正确性突破了有限，达到无限.

这两个步骤密切相关，缺一不可，完成了这两步，就可以断定“对任何自然数(或 $n\geqslant n_0$ 且 $n\in\mathbf{N}$)结论都正确”. 由这两步可以看出，数学归纳法是由递推实现归纳的，属于完全归纳.

运用数学归纳法证明问题时，关键是 $n=k+1$ 时命题成立的推证，此步证明要具有目标意识，注意与最终要达到的解题目标进行分析比较，以此确定和不断调整解题的方向，使差异逐步减小，最终实现目标完成解题.

运用数学归纳法，可以证明下列问题：与自然数 n 有关的恒等式、代数不等式、三角不等式、数列问题、几何问题、整除性问题等等.

思考 可以将问题推广为：

定义在 $\mathbf{N}$ 上，且在数列 $\{2n-1\}$ 中取值的严格增函数 $y=f(n)$，对任意 $m,n\in\mathbf{N}$，当 $(m,n)=1$(即 m,n 互素)时，$f(n)f(m)=f(nm)$. 又知 $f(183)=365$，则 $f(2005)$ 的值是________.

还可以将值域 $\{2n-1\}$ 推广为一般的等差整数列 $\{kn-1\}$ 等，不一一指出了.

例 5 函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-1,4)$，对于定义域内不等正实数 x_1,x_2 都有 $f(x_1)+f(x_2)<2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，请写出两个满足条件的(不同类型的)函数解析式是________，________.

第 14 届(2003 年)试题

解 这是答案开放题，符合条件的函数很多，如：

$$f(x)=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^{x}(x>0);$$

$$f(x)=\frac{10}{\pi}\arctan x-1(x>0);$$

评析 本题的背景是高等数学中的凹函数. 这类以高等数学的基本知识为背景,用高等数学派生知识求解的试题属于即时性学习题,可以较好地评价竞赛参赛人员的学习潜能,在数学竞赛中这类试题将不断增加. 特别是用初等数学语言表述的"再发现型"问题,最值得关注,这类问题是高中阶段学习方式转变的纽带.

思考 数学开放题是 20 世纪 70 年代开始出现的一种新题型,开放题是相对于传统的封闭题而言,其特征是题目的条件不充分,或没有确定的结论,也正因为这样,所以开放题的解题策略往往也是多种多样的.

(一)数学开放题的特征

数学开放题一般具有下列特征:

1. 不确定性:所提的问题常常是不确定的和一般性的,其背景情况也是用一般词语来描述的,必须收集其他必要的信息,才能着手解的题目.

2. 探究性:没有现成的解题模式,有些答案可能易于直觉地被发现,但是求解过程中往往需要从多个角度进行思考和探索.

3. 非完备性:有些问题的答案是不确定的,存在着多样的解答,但重要的还不是答案本身的多样性,而在于寻求解答的过程中认知结构的重建.

4. 发散性:在求解过程中往往可以引出新的问题,或将问题加以推广,找出更一般、更有概括性的结论.

5. 层次性:常常通过实际问题提出,必须用数学语言将其数学化,也就是建立数学模型.

6. 发展性:能激起解题者的好奇心.

7. 创新性:问题比较新颖,有一定的创意.

(二)数学开放题的分类

对数学开放题的分类,从构成数学题系统的四要素(条件、依据、方法、结论)出发,定性地可分成四类:如果寻求的答案是数学题的条件,则称为条件开放题;如果寻求的答案是依据或方法,则称为策略开放题;如果寻求的答案是结论,则称为结论开放题;如果数学题的条件、解题策略或结论都要求解题者在给定的情境中自行设定与寻找,则称为综合开放题.

具备对“封闭”题“开放”的意识的人,事实上也就有了创新意识,这种意识驱动下的实践自然会使自己的创造力得到发展.

下面再提供几个开放题,供有兴趣的读者练习:

1. 条件开放题

如果一个数学开放题,其未知的要素是假设,则称为条件性开放题. 这类开放题中往往给出结论,要求从各种不同的角度去寻求这个结论成立的条件. 如

问题 1 在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1—ABCD$ 中,当底面四边形 $ABCD$ 满足条件时,有 $A_1C\perp B_1D_1$,(注:填上你认为正确的一种条件即可,不必考虑所有可能的情形).

这是一道数学完形填空题,也是高考数学中首次出现的探索条件型答案不惟一的开放题,需要执果索因,答案较多,此题主要考查四棱柱的性质,三垂线性定理等,由于只要求填出使结论成立的充分条件,条件放得宽,难度不大.

2. 策略开放题

如果一个数学开放题,其未知的要素是推理,则称为策略性开放题. 这类开放题一般都给出了条件和结论,而怎样由条件去推断结论,或怎样根据条件去判断结论是否成立的策略未知. 如:

问题 2 已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1\ (x\in\mathbf{R})$

该函数的图像可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图像经过怎样的平移和伸缩变换得到?

该题解答变换顺序有 24 种之多,由每一种不同的策略都能使该题完成.

3. 结论开放题

如果一个数学开放题,其未知的要素是判断,则称为结论开放题. 结论性开放题就是给出一定的条件,满足条件的结论不止一个. 如:

问题 3　若四面体各棱的长是 1 或 2,且该四面体不是正四面体,则其体积的值是________(只需写出一个可能的值).

这类题目,我们常以答案个数的多少去衡量题目开放度的大小,如问题 3,此题的实质是构造满足条件的四面体,它们的体积分别是 $\frac{\sqrt{11}}{12}$ 或 $\frac{\sqrt{14}}{12}$ 或 $\frac{\sqrt{11}}{6}$,则所求结论为三个答案中任一个.

问题 4　用实际例子说明 $y=\begin{cases}10+2x, x\in[0,5)\\20, x\in[5,10)\\40-2x, x\in[10,20]\end{cases}$ 所表示的意义.

给变量赋予不同的内涵,就可得出函数不同的解释,我们从物理和经济两个角度出发给出实例.

(1)x 表示时间(单位:s),y 表示速度(单位:m/s),开始计时后质点以 10m/s 的初速度作匀加速运动,加速度为 2m/s^2,5 秒钟后质点以 20m/s 的速度作匀速运动,10 秒钟后质点以 2m/s^2 的加速度作匀减速运动,直到质点运动到 20 秒末停下.

(2)季节性服饰在当季即将到来之时,价格呈上升趋势,设某服饰开始时定价为 10 元,并且每周(7 天)涨价 2 元,5 周后开始保持 20 元的价格平稳销售,10 周后当季即将过去,平均每周削价 2 元,直到 20 周周末该服饰不再销售.

4. 综合开放题

如果一个开放题其条件、解题策略和结论都要求解题者自己去设定和寻找，这类问题称为综合性开放题.

问题 5 α,β 是两个不同的平面，m,n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线，给出四个论断：①$m\perp n$；②$\alpha\perp\beta$；③$n\perp\beta$；④$m\perp\alpha$. 以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题________.

该题是条件开放结论也开放. 四个论断任三个论断都可作为条件，剩余一个则是结论，条件和结论都不是固定的，是可变的，解答该题需要考生去思考、分析、尝试、猜想、论证，极具挑战性、探索性.

第 8 讲 数列的通项

数列在整个中学数学中占有重要的地位，处于整个中学数学内容的交汇处，具有广泛的实际应用，是培养观察能力、启发思维的好素材.

一、基础知识

(1)数列

数列是按一定次序排列的一列数，其中每一个数叫数列的一项，各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项)，第 2 项，…，第 n 项，…. 其一般形式为：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记作 $\{a_n\}$，其中 a_n 是数列的第 n 项.

数列中的数是按一定次序排列的，如果组成两个数列的数相

同而排列次序不同，那么它们就是不同的数列.

(2)数列的通项公式

数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式表示，这个公式叫做数列的通项公式.

数列实际上是一种特殊的函数. 数列的每一项与它的项数相对应，对于正整数集(或它的有限子集)中的每一个元素，数列都有一项与之对应，所以，数列可以看成是以正整数集(或其子集)为定义域的函数，即 $a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(3)数列的递推公式

已知数列的前 k 项，且任一项 a_n 与它的前一项(或前若干项) $a_{n-1}(n\geqslant 2)$间的关系可以用一个公式来表示，这个公式称为数列的递推公式. 递推公式是给出数列的一种方法. 利用起始项，由递推公式可写出数列的前有限项.

(4)数列的表示法

解析法(用通项公式或递推公式表示)；图像法(用一群孤立的点表示)；列表法(用列表给出的函数关系表示，自变量 1,2,3,…)；语言叙述法等.

(5)数列的分类

按项数分，可分为有穷数列和无穷数列；

按相邻项的大小关系可分为：递增数列，递减数列；常数列；摆动数列；

按数列中任何一项的绝对值的取值范围可分为：有界数列与无界数列.

(6)数列$\{a_n\}$的前 n 项和

数列$\{a_n\}$从第一项累加到第 n 项的和称为这个数列的前 n 项和，记为 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 前 n 项和 S_n 与通项 a_n 满足关系式：$S_n=S_{n-1}+a_n(n\geqslant 2)$，或 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2\end{cases}$

注意点：

①要注意数列与集合的本质区别. 数列的本质是排列着的项有顺序且必须是数(或表示数的式子)，各项的值可以重复，即数列的项具有确定性、有序性、不具有互异性；集合中的元素之间无顺序，元素不一定是数，且不可以重复，即集合中的元素具有确定性、无序性、互异性.

②数列是特殊的函数. 特殊在定义域是自然数集或由 1 为首的有限个连续自然数组成的集合. 其图像是无限个或有限个孤立的点. 用函数观点看数列，数列的动态的、整体的性质会显现的更加清楚.

③符号 a_n 和 $\{a_n\}$ 含义不同：$\{a_n\}$ 表示一列数，而 a_n 只表示数列 $\{a_n\}$ 中的第 n 项.

④特别要注意的是，仅仅给出有限项的数列，如果没有界定性的文字限定，它的通项公式一定有无限多个.

二、例题

例 1 Find the missing number in the sequence 3, 6, 13, 28, ________, 122, 249, ________.

Answer: ________. (英汉小词典：sequence 数列)

第 15 届(2004 年)试题

译文 在数列中找出丢失的数：3，6，13，28，________，122，249，________.

常见的解法所给数列的通项公式是 $a_n=2a_{n-1}+n-2$，所以缺少的项是

$$a_5=2\times28+3=59, a_8=2\times249+6=504.$$

评析 上面的解答完整吗？众所周知，仅给出有限项的数列，通项公式是不惟一的. 所给数列的通项公式也可以是 $a_n=2a_{n-1}+$

$n-2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-7)$.

实际上这里 a_5,a_8 可以取任意值. 设所给数列的通项公式为 $a_n=2a_{n-1}+n-2+(xn+y)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-7),x,y\in\mathbf{R}$

其中待定系数 x,y 由方程组

$$\begin{cases}a_5=2a_4+5-2+(5x+y)(5-1)(5-2)\\ \qquad(5-3)(5-4)(5-6)(5-7),\\ a_8=2a_7+8-2+(8x+y)(8-1)(8-2)\\ \qquad(8-3)(8-4)(8-6)(8-7).\end{cases}$$

惟一确定.

思考　已知数列$\{a_n\}$:1,2,3,a_4,…. 其中 $a_4\neq4$. 能否写出数列$\{a_n\}$满足如下条件的一个通项公式:

(1)含 n 的多项式;(2)把 n 作为指数.

解　(1)根据数列的前几项写出通项公式,设法加一个 $n=1$,2,3 时都为零的表达式:显然 $n=1,2,3$ 时,$(n-1)(n-2)(n-3)=0$.

$a_n=n+(n-1)(n-2)(n-3),n\in\mathbf{N}^*$,$a_4=4+(4-1)(4-2)(4-3)=10$,符合要求.

能否再写出一个与上不同的通项公式? 第 4 项能为任意实数 a 吗?

$$a_n=n+x(n-1)(n-2)(n-3),n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R},x\neq1$$

令 $a_4=4+x(4-1)(4-2)(4-3)=a,x=\dfrac{a-4}{6}$,即

$$a_n=n+\frac{a-4}{6}(n-1)(n-2)(n-3),n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R}$$

第 4 项为任意实数 a.

(2)根据数列的前两项写出通项公式,设法加一个 $n=1,2$ 时都为零的表达式. 显然 $n=1,2$ 时,$(n-1)(n-2)=0$,注意到 $a_1=1=2^0$,$a_2=2=2^1$,我们可设 $a_n=2^{n-1}+x(n-1)(n-2)$,由于 $a_3=$

3,所以 $2^{3-1}+x(3-1)(3-2)=3$, $x=-\frac{1}{2}$,此时,$a_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, $a_4=5$,满足要求.

能否再写出一系列不同的通项公式,如含有绝对值、对数式的通项?

类似地可得,

(1)$a_n=2+(n-2)|n-2|$;

(2)$a_n=2+(n-2)(2\log_3 n-1)$;

(3)$a_n=2-\sin\frac{n\pi}{2}$.

例 2　数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=1$,且对任意的 $m,n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+m}=a_n+a_m+nm$,则通项公式 $a_n=$________.

第 12 届(2001 年)试题

解　令 $m=1$,得 $a_{n+1}=a_n+a_1+n=a_n+n+1$,因此,

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1\\&=n+(n-1)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

又 a_1 也满足此式,所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

评析　上面利用特殊化的思想解综合题,过程十分漂亮!但仔细分析,可以发现:如果作为解答题,上面的解题过程还不够完整.必须再加上检验这一不可缺少的步骤.

反例　数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=1$,且对任意的 $m,n\in\mathbf{N}$, $a_{n+m}=a_n+a_m+nm^2$,则通项公式 $a_n=$________.

令 $m=1$,得 $a_{n+1}=a_n+a_1+n=a_n+n+1$,所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,

但实际上满足条件的数列通项是不存在的.

思考　一般与特殊是矛盾的两个方面,从上题可见,在一定的条

件下可以相互转化,特殊化的思想尤其适用于解选择题与填空题.

例 3　数列 1, 1, 2, 2, 3, 3, …, n, n, … 的通项公式 $a_n=$________,前 n 项和 $S_n=$________.

第 14 届(2003 年)试题

解　a_n 是数列 $1,0,1,0,\cdots,\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\cdots$,的前 n 项和.

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1+(-1)^{i-1}}{2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{2n+1+(-1)^{n-1}}{4},$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{2n+1+(-1)^{i-1}}{4}=\frac{1}{4}\left[n^2+2n+\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{8}[2n^2+4n+1-(-1)^n].$$

评析　数列$\{a_n\}$:$1,1,2,2,3,3,\cdots,n,n,\cdots$可以看做由两个数列 $1,2,3,\cdots,n,\cdots,1,2,3,\cdots,n,\cdots$按奇偶位置相应插入合成的,如果引入取整函数:$[x]$,它表示不超过 x 的最大整数,则 $a_n=\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

思考　两种方法,得到两个形式不同的答案,使我们有意外收获:$\left[\frac{n+1}{2}\right]=\frac{2n+1+(-1)^{n-1}}{4}$.在数学的学习过程中,一定要正视这种现象,还要充分挖掘它的价值,说不定它会给你带来更大的额外收获!有道是无心插柳柳成行,科学上的很多新思路,有不少正是来源于意外的发现.

例 4　已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=3,a_2=5$,且对大于 2 的正整数 n,总有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$,则 a_{2003} 等于(　　)

(A)-5.　　(B)-2.　　(C)2.　　(D)3.

第 14 届(2003 年)试题

解　由递推关系式,得 $a_3=2,a_4=-3,a_5=-5,a_6=-2,a_7=$

3，$a_8=5$，可知数列$\{a_n\}$是周期为 6 的循环数列，$2003=333\times6+5$，所以 $a_{2003}=a_5=-5$，选(A).

评析 本题采用列举法，写出数列的前 8 项看出其周期性的，这是一种有效的方法. 由于前 8 项的数值在第 7 项开始已出现循环，根据递推关系式，将 a_7,a_8 作为初始值，这个循环就会永远进行下去，数列的周期性不证自明.

思考 一般地数列$\{a_n\}$：已知 a_1,a_2，且满足关系式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，满足什么条件时，$\{a_n\}$为周期数列？

设 x_1,x_2 是特征方程 $x^2=px+q$ 的两个根，如果存在正整数 m 满足 $x_1^m=x_2^m=1$，则$\{a_n\}$为周期数列，m 是它的一个周期.

证明 设 $a_n=\alpha x_1^n+\beta x_2^n$，则 $a_{n+m}=\alpha x_1^{n+m}+\beta x_2^{n+m}=\alpha x_1^n x_1^m+\beta x_2^n x_2^m=\alpha x_1^n+\beta x_2^n=a_n$，所以$\{a_n\}$为周期数列，$m$ 是它的一个周期.

例 5 设$\{a_n\}$是集合$\{2^s+2^t\mid 0\leqslant s<t$，且 $s,t\in\mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排成的数列，则 $a_5=$________，$a_{50}=$________.

第 15 届(2004 年)试题

解 集合中的元素从小到大排列，每个括号内为一组，第 n 组有 n 个元素，依次为

(2^0+2^1)；$(2^0+2^2,2^1+2^2)$；$(2^0+2^3,2^1+2^3,2^2+2^3)$；…

显然，$a_5=2^1+2^3=10$.

因为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$，所以 a_{50}是第 10 组中的第 5 个元素，即 $a_{50}=2^4+2^{10}=1040$.

评析 本题以集合中元素排列的数组为背景，由表及里，层层深入地运用数学知识分析探索，揭示问题本质，具有较大的自由度和思维空间，渗透了研究性学习的理念. 本题求解的关键，是对所给集合$\{2^s+2^t\mid 0\leqslant s<t$，且 $s,t\in\mathbf{Z}\}$中的元素进行分组排序.

思考 利用类似方法，可解决更一般的问题，如：

拓展问题 1：设$\{a_n\}$是集合$\{2^s+2^t+2^r\mid 0\leqslant s<t<r$，且$r,s,t\in$

$\mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排成的数列，则 $a_5=$ ________，$a_{50}=$ ________.

第 15 届(2004 届)试题

解　根据数列$\{a_n\}$各项的幂指数 s,t,r 依次分组

(1)0,1,2;

(2)0,1,3;0,2,3;1,2,3;

(3)0,1,4;0,2,4;1,2,4;0,3,4;1,3,4;2,3,4;

…

(n)0,1,n;0,2,n;1,2,n;0,3,n;1,3,n;2,3,n;…;$n-2$,$n-1$,n.

每组的项数依次为 $1,1+2,1+2+3,\cdots,1+2+3+\cdots+n$. 所以 a_5 是第(3)组的第 1 项，$a_5=2^0+2^1+2^4=19$，

a_{50}是第(6)组的第 15 项. 因为

$$1+2+3+4+5=15,$$

所以 $s=4,t=5,r=7,a_{50}=2^4+2^5+2^7=176$.

拓展问题 2:(Ⅰ)设$\{a_n\}$是集合$\{2^t+2^s\mid 0\leqslant s<t$，且$s,t\in\mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排列成的数列，即 $a_1=3,a_2=5,a_3=6,a_4=9$，$a_5=10,a_6=12,\cdots$. 将数列$\{a_n\}$各项按照上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

$$\begin{array}{c}3\\5\quad 6\\9\quad 10\quad 12\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\end{array}$$

(ⅰ)写出这个三角形数表的第四行、第五行各数；(ⅱ)求 a_{100}.

(Ⅱ)(本小题为附加题，如果解答正确，加 4 分，但全卷总分不超过 150 分)设$\{b_n\}$是集合$\{2^r+2^t+2^s\mid 0\leqslant r<s<t$，且$r,s,t\in\mathbf{Z}\}$中所有的数都是从小到大排列成的数列，已知 $b_k=1160$，求k.

2003年全国高考数学理科压卷试题

解 (Ⅰ)(ⅰ)第四行 17 18 20 24 第五行 33 34 36 40 48

(ⅱ)设 $a_{100}=2^{s_0}+2^{t_0}$,只须确定正整数 s_0,t_0.

数列$\{a_n\}$中小于 2^{t_0} 的项构成的子集为$\{2^t+2^s\mid 0\leqslant s<t<t_0\}$,

某元素个数为 $C_{t_0}^2=\dfrac{t_0(t_0-1)}{2}$,依题意$\dfrac{t_0(t_0-1)}{2}<100$.

满足等式的最大整数 t_0 为 14,所以取 $t_0=14$.

因为 $100-C_{14}^2=s_0+1$,由此解得$s_0=8$,$\therefore a_{100}=2^{14}+2^8=16640$.

(Ⅱ)$b_k=1160=2^{10}+2^7+2^3$,

令 $M=\{c\in B\mid c<1160\}$ (其中,$B=\{2^r+2^s+2^t\mid 0\leqslant r<s<t\}$

因 $M=\{c\in B\mid c<2^{10}\}\cup\{c\in B\mid 2^{10}<c<2^{10}+2^7\}\cup\{c\in B\mid 2^{10}+2^7<c<2^{10}+2^7+2^3\}$.

现在求 M 的元素个数:$\{c\in B\mid c<2^{10}\}=\{2^r+2^s+2^t\mid 0\leqslant r<s<t<10\}$,

某些元素个数为 C_{10}^3:$\{c\in B\mid 2^{10}<c<2^{10}+2^7\}=\{2^{10}+2^s+2^r\mid 0\leqslant r<s<7\}$.

某些元素个数为 C_7^2:$\{c\in B\mid 2^{10}+2^7<c<2^{10}+2^7+2^3\}=\{2^{10}+2^7+2^r\mid 0\leqslant r<3\}$.某些元素个数为 C_3^2;

所以 $k=C_{10}^3+C_7^2+C_3^2+1=145$.

拓展问题 3:设 $f(n)$,$g(n)$均为定义在自然数集 **N** 上的严格递增函数,且对任意 $n\in\mathbf{N}$,都成立 $f(n+1)+g(0)>f(n)+g(n-1)$.数列$\{a_n\}$是集合$\{f(t)+g(s)\mid 0\leqslant s<t$,且$s,t\in\mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排成的数列,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 将数列$\{a_n\}$的项从小到大排成数表:

$a_1=f(1)+g(0)$,

$a_2=f(2)+g(0)$,$a_3=f(2)+g(1)$,

$a_4=f(3)+g(0)$,$a_5=f(3)+g(1)$,

$a_6=f(3)+g(2)$,

$a_7=f(4)+g(0), a_8=f(4)+g(1)$,

$a_9=f(4)+g(2), a_{10}=f(4)+g(3)$,

…

$a_{\frac{k(k-1)}{2}+1}=f(k)+g(0), a_{\frac{k(k-1)}{2}+2}=f(k)+g(1), \cdots$,

$a_{\frac{k(k-1)}{2}+i}=f(k)+g(i-1), \cdots, a_{\frac{k(k-1)}{2}+k}=f(k)+g(k-1), \cdots$

若$\{a_n\}$在数表的第 k 行，则由 $a_{\frac{k(k-1)}{2}+i}=f(k)+g(i-1)$，可知当$\frac{k(k-1)}{2}+1\leqslant n<\frac{k(k+1)}{2}+1(k\in\mathbf{N})$时，

$$a_n=f(k)+g\left[n-1-\frac{k(k+1)}{2}\right].$$

由$\frac{k(k-1)}{2}+1\leqslant n<\frac{k(k+1)}{2}+1$ 得 $\begin{cases}k^2-k+2-2n\leqslant 0\\ k^2+k+2-2n>0\end{cases}$，解得 $\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}<k\leqslant\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$，且$\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}-\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}=1$，所以 $k=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数）.

故 $a_n=f(k)+g\left(n-1-\frac{k(k+1)}{2}\right)$，其中 $k=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

下面给出一个没有彻底解决的推广问题，留给有兴趣的读者作进一步研究：

拓展问题 4: 设集合 $A=\{m^{t_1}+m^{t_2}+\cdots+m^{t_k}\mid 0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k, t_i\in\mathbf{N}(i=1,2,\cdots,k)\}$

(1)若 A 中的元素是 k 个 m 的不同整数幂之和，将它们从小到大排成数列$\{a_n\}$，则 $a_5=$________.

(2)若 A 中的元素是若干个 m 的不同整数幂（包括 1 个）之和，将它们从小到大排成数列$\{a_n\}$，则 $a_5=$________.

问题(2)取 $m=3$ 的特殊情形，就是希望杯第 15 届（2004 年）高一培训题第 51 题.

例 6 给定 n 个数:$a_1=0.5^{0.5}$,$a_k=0.5^{a_{k-1}}$($k=2,3,\cdots,n$),将这 n 个数由大到小排成一列,定义:第 k 位上恰是 a_k 的数 k($k\geqslant 2$)叫做希望数,试求 $n=2999$ 时的希望数.

第 11 届(2000 年)试题

解 设 $f(x)=0.5^x$,则 $f(x)$在 $\mathbf{R}^+$ 上是减函数

记 $a_1=f(0.5)$,$a_k=f_k(0.5)=\underbrace{f\{f\cdots[f}_{k个f}(0.5)]\}$,

利用函数的单调递减性,得

$$f(0.5)>f_2(0.5),$$

$$f(0.5)>f_3(0.5)>f_2(0.5),$$

$$f(0.5)>f_3(0.5)>f_4(0.5)>f_2(0.5),$$

$$\cdots$$

$$f(0.5)>f_3(0.5)>\cdots>f_{2n-1}(0.5)>f_{2n}(0.5)>\cdots>f_2(0.5),$$

$$f(0.5)>f_3(0.5)>\cdots>f_{2n+1}(0.5)>f_{2n}(0.5)>\cdots>f_2(0.5),$$

即 $a_1>a_2$,

$a_1>a_3>a_2$,

$a_1>a_3>a_4>a_2$,

$\cdots$,

$a_1>a_3>\cdots>a_{2n-1}>a_{2n}>\cdots>a_2$,

$a_1>a_3>\cdots>a_{2n+1}>a_{2n}>\cdots>a_2$,

可见,当 $n=2$ 时,希望数 $k=2$;

当 $n=5$ 时,希望数 $k=4$;

当 $n=8$ 时,希望数 $k=6$;

当 $n=3m-1$ 时,希望数 $k=2m$,其中 $m\in\mathbf{N}^*$.

又由 $2999=3\times1000-1$ 可知,

当 $n=2999$ 时,所求希望数为:$k=2\times1000=2000$.

评析 这是新定义的数学试题.必须认真审题,按照题目要求进行推断,才能求出希望数.

思考　可以一般地计算希望数.

对于按如上方式排列的 n 个数的足标构成的数列，显然，前面的$\frac{n}{2}$个足标中不会有希望数(因为 $k<2k-1$，当 $k>1$ 时). 若有，只能在后面的$\frac{n}{2}$个足标中. 设第 k 位上的足标是希望数，则此第 k 位是从右向左数过来的第 $n-k+1$ 位. 于是

$$k=2(n-k+1)\text{，且 }k>\frac{n}{2}.$$

则　$3k=2(n+1)$.

因此，当且仅当 $3\mid n+1$ 时才会有希望数 $k=\frac{2}{3}(n+1)$. 亦即，只有当 $n=3m-1$ 时有希望数，且是惟一的.

第 9 讲　等差型数列与等比型数列

一、基础知识

1. 等差数列

(1)如果从第二项起，一个数列的每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列叫做等差数列. 这个常数称为数列的公差，通常用 d 表示，即 $d=a_n-a_{n-1}$($n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$).

(2)等差数列的通项公式

等差数列的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$($n\geqslant 1,n\in\mathbf{N}^*$).

公式的推导可用迭代法，逐差法，叠加法，归纳法完成.

(3)等差数列的表示法

列举法　首项为 a_1，公差为 d_4 的等差数列，可列举表出为 a_1，

$a_1+d,a_1+2d,...,a_1+(n-1)d,\cdots$,简记为$\{a_1+(n-1)d\}$.

解析法 $a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$或$a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*)$.

图像法 因为$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$,从函数的角度看,$a_n$是关于$n$的一次函数($d\neq0$)或常数函数($d=0$).它的图像是一条直线上的均匀排开的一群孤立点,直线的斜率为公差d,在y轴上的截距为a_1-d.

(4)等差中项

若a,A,b成等差数列,那么A叫做a与b的等差中项,任何两个数a,b有且仅有一个等差中项$A=\frac{a+b}{2}$.

a,A,b成等差数列的充要条件是$2A=a+b$.

(5)等差数列的重要性质

①有穷等差数列中,与首末两端等距离的两项和相等,并等于首末两项之和.即$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$

一般地,若p,q,r,s为正整数且$p+q=r+s$,则$a_p+a_q=a_r+a_s$,若$2m=p+q$,则$a_{2m}=a_p+a_q$.

②项数(下标)成等差数列的项,仍然组成等差数列,即$a_m,a_{m+p},a_{m+2p},\cdots(m,p\in\mathbf{N}^*)$为等差数列.

③$a_n=a_m+(n-m)d$.

2. 等比数列

(1)如果一个数列从第二项起,每一项与前一项之比等于同一常数q,这个数列叫等比数列.这个常数称为等比数列的公比,通常用q表示,$q=\frac{a_n}{a_{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$易知$q\neq0$.

(2)等比数列的通项公式

通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$;公式变形$a_n=a_mq^{n-m}$.

推导方法有逐商法,迭代法,归纳法.

(3)等比数列的表示法

列举法　首项为 a_1，公比为 q 的等比数列表示为：$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}, \cdots$，简记为 $\{a_1q^{n-1}\}$.

解析法　若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in \mathbf{N}^*)$，则 $\{a_n\}$ 为等比数列.

图像法　因为 $a_n=\frac{a_1}{q}q^n$，所以 a_n 是关于 n 的指数函数型，在直角坐标系中，等比数列的图像是函数 $y=\frac{a_1}{q}q^x$ 图像上一些孤立的点，特别地，当 $a_1=q$ 时，其图像是函数 $y=q^x$ 图像上一些孤立的点.

(4)等比中项

如果在 a,b 之间插入一个数 G，使 a,G,b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项.

G 是 a,b 的等比中项的充要条件是 $G^2=ab(ab>0)$，或 $G=\pm\sqrt{ab}\ (ab>0)$.

(5)等比数列的性质

①若 m,n,p,q 均为正整数，且 $m+n=p+q$ 时，有 $a_m.a_n=a_p.a_q$.

②如果 $\{a_n\}$ 是等比数列，那么其中序号成等差数列的项仍成等比数列.

二、例题

例 1　一个直角三角形的三条边的长度都是整数，且组成一个等差数列，则其中的一条边的长度可能是(　　)

(A)13.　　(B)41.　　(C)81.　　(D)91.

第 5 届(1994 年)试题

解　设三边的长依次为 $x-d, x, x+d$，由勾股定理，得 $(x-d)^2+x^2=(x+d)^2$，整理即 $x(x-4d)=0$，$x=4d(x\neq 0)$，三边长之比为 $3:4:5$，当边长为整数时，必为 3,4,5 这 3 个数之一

的倍数,故选(C).

评析　组成等差数列的三个数,依次设为 $x-d,x,x+d$,在解题时易于化简.

思考　是否存在三边成等比的直角三角形?

设三边的长依次为 $a,aq,aq^2(a,q>0)$,由勾股定理,得 $a^2+a^2q^2=a^2q^4$,整理即得 $q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. 因此三边成等比的直角三角形是存在的.

那么是否存在非直角三角形的三边成等差(或等比)的整边三角形?有理数边三角形呢?

留给读者自行研究.

从等差数列到等比数列,这是一种类比的思维方法,是数学的发现之源泉. 数学中很多的新发现,都来自于类比思维.

例 2　数列$\{a_n\}$:$a_1=p,a_{n+1}=qa_n+r(p,q,r$ 是常数),则 $r=0$ 是$\{a_n\}$成等比数列的(　　)

(A)充分条件,但不是必要条件.

(B)必要条件,但不是充分条件.

(C)充要条件.

(D)不充分且不必要的条件.

第 1 届(1990 年)试题

解　当 $r=0$ 时取 $p=0$,此时 $a_n=0$,数列$\{a_n\}$不成等比数列,因此条件不具有充分性;

当$\{a_n\}$是等比数列时,取 $p=r\neq0,q=0$,此时 $a_n=p$ 是非零常数列,也是等比数列,因此,条件不具有必要性. 选(D).

评析　本题所给的数列$\{a_n\}$:$a_1=p,a_{n+1}=qa_n+r(p,q,r$ 是常数)称为常系数一阶线性递归数列,等差数列和等比数列都是它的特殊情形. 常系数一阶线性递归数列的通项可用如下一些方法求出.

(1)转化为等差型数列：两边同除 q^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{a_n}{q^n}+\frac{r}{q^{n+1}}$，令 $b_n=\frac{a_n}{q^n}$，转化为等差型数列 $b_{n+1}=b_n+\frac{r}{q^{n+1}}$. 再用逐差法求出其解.

(2)转化为等比型数列：常用待定系数法，令 $a_{n+1}+x=q(a_n+x)$，可得 $(q-1)x=r$. 当 $q\neq1$ 时，可以转化为等比型数列：$a_{n+1}+\frac{r}{q-1}=q\left(a_n+\frac{r}{q-1}\right)$，进而利用等比数列的通项公式先求出数列 $\left\{a_n+\frac{r}{q-1}\right\}$ 的通项.

类似地，常系数二阶线性递归数列 $\{a_n\}$：已知 $a_1,a_2,a_{n+2}=qa_{n+1}+ra_n$（$p,q,r$ 是常数），可用待定系数法转化为一阶线性递归数列再求通项，即引入待定常数 x，使 $a_{n+2}-xa_{n+1}=(q-x)(a_{n+1}-xa_n)$，这里 $(q-x)x=r$.

思考 要确定变量间的函数关系，设出某些未知系数，然后根据所给条件来确定这些未知系数的方法叫做待定系数法. 用待定系数法解题的关键是依据已知，正确列出等式或方程. 使用待定系数法，就是把具有某种确定形式的数学问题，通过引入一些待定的系数，转化为方程(组)来解决.

使用待定系数法，它解题的基本步骤是：

第一步，确定所求问题含有待定系数的解析式；

第二步，根据恒等的条件，列出一组含待定系数的方程；

第三步，解方程组或者消去待定系数，从而使问题得到解决.

如何列出一组含待定系数的方程，主要从以下几方面分析：

①利用对应系数相等列方程；

②由恒等的概念用数值代入法列方程；

③利用定义本身的属性列方程；

④利用几何条件列方程.

比如在求圆锥曲线的方程时,我们可以用待定系数法求方程:首先设所求方程的形式,其中含有待定的系数;再把几何条件转化为含所求方程未知系数的方程或方程组;最后解所得的方程或方程组求出未知的系数,并把求出的系数代入已经明确的方程形式,得到所求圆锥曲线的方程.

要判断一个问题是否需用待定系数法求解,主要是看所求解的数学问题是否具有某种确定的数学结构,如果具有,就可以用待定系数法求解.例如分解因式、拆分分式、数列求通项(求和)、求函数式、求复数、解析几何中求曲线方程等,这些问题都具有确定的数学结构,所以都可以用待定系数法求解.

例3 已知数列$\{a_n\}$中,$a_n=2a_{n-1}+n$(其中n是大于1的整数),

(1)若$\{a_n\}$是等差数列,求$\{a_n\}$的通项公式.

(2)$\{a_n\}$能否为等比数列?若可能,求其通项公式;若不能,请说明理由.

第15届(2004年)试题

解 (1)设公差为d,则由$a_n=2a_{n-1}+n$,得

$$a_1+(n-1)d=2[a_1+(n-2)d]+n,$$

即
$$a_1-3d+n(d+1)=0(n\in\mathbf{Z},n>1). \quad (*)$$

当且仅当

$\begin{cases}a_1-3d=0,\\d+1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1=-3,\\d=-1.\end{cases}$时,(*)式恒成立.所以$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d=-n-2.$$

(2)若$\{a_n\}$是等比数列,设公比为q,则由$a_n=2a_{n-1}+n$,得

$$a_1q=2a_1+2,a_1q^2=2a_1q+3,$$

解得$q=\frac{3}{2}$,$a_1=-4$.但不满足$a_1q^3=2a_1q^3+4$,即$a_4=2a_3+4$,所

以$\{a_n\}$不可能为等比数列.

评析 本题是一道探索性试题,两个小题采用了不同的论证方法.(1)中用等差数列的通项公式,而(2)中只利用了等比数列的前几项进行检验,但殊途同归,矛盾的普遍性与特殊性在这里发挥了同样的作用.

事实上,题给的数列通项是可以用如下简单的方法直接求出来的:

解 由$a_n=2a_{n-1}+n$,得$a_n+n+2=2(a_{n-1}+n+1)$,令$b_n=a_n+n+2$,则$b_n=2b_{n-1}$,可见数列$\{b_n\}$是等比型数列,$b_n=2^{n-1}b_1$,即$a_n+n+2=2^{n-1}(a_1+3)$,$a_n=-n-2+2^{n-1}(a_1+3)$.

思考 一般地,设$f(n)$是非零函数,则由递推关系式$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$给出的数列$\{a_n\}$的通项公式可用"逐和法"求出:

在递推关系式$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$两边同除$f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)$,得

$$\frac{a_{n+1}}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)}$$

$$=\frac{a_n}{f(n-1)\cdots f(2)f(1)}+\frac{g(n)}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)}.$$

令$b_n=\dfrac{a_n}{f(n-1)\cdots f(2)f(1)}$,得$b_{n+1}=b_n+\dfrac{g(n)}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)}$.

再用"逐和法",由

$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1$

先求出b_n,进而由$a_n=f(n-1)\cdots f(2)f(1)b_n$求出通项公式.

例 4 已知数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$,且$a_9=\dfrac{1}{7}$,则$a_{2002}=$ ________.

第 13 届(2002 年)试题

解 由于$a_9=\dfrac{1}{7}$,结合$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$,对任意正整数$n$,$a_n\neq0$,

于是$\frac{1}{a_{n+1}}=3+\frac{1}{a_n}$，$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=3$，所以$\{\frac{1}{a_n}\}$是公差为 3 的等差数列，于是有$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_9}+3(n-9)=7+3n-27=3n-20$，$a_n=\frac{1}{3n-20}$，所以$a_{2002}=\frac{1}{3\times2002-20}=\frac{1}{5986}$.

评析 类似$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$的分式型递推数列求通项，都可采用上面取倒数的方法来求．解题中间还用了推广的等差数列通项公式：$a_n=a_s+(n-s)d$.

思考 一般地，数列$\{x_n\}$由x_1及递推关系式$x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}$确定，其通项可按如下方法求出：

当$x=\frac{ax+b}{cx+d}$有根α时，$x_{n+1}-\alpha=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}-\alpha=\frac{(a-c\alpha)x_n+b-\alpha d}{cx_n+d}$$=\frac{(a-c\alpha)(x_n-\alpha)}{cx_n+d}$，取倒数或令$t_n=\frac{1}{x_n-\alpha}$就可将它转化为一阶线性递推数列$\{t_n\}$来解.

当$x=\frac{ax+b}{cx+d}$有两个不同根α,β时，同上可得，$x_{n+1}-\beta=\frac{(a-c\beta)(x_n-\beta)}{cx_n+d}$，于是可转化为满足$\frac{x_{n+1}-\beta}{x_{n+1}-\alpha}=\frac{a-c\beta}{a-c\alpha}\cdot\frac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$的等比型数列$\left\{\frac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}\right\}$.

例 5 某运动会开了n天$(n>1)$，共颁发了m枚奖牌，第一天发出 1 枚加上余下的$(m-1)$枚的$\frac{1}{7}$，第二天发出 2 枚加上余下的$\frac{1}{7}$；如此继续到第$n-1$天，第n天发出n枚，恰好把奖牌发完．该运动会开了________天，共发了________枚奖牌.

第 15 届(2004 年)培训题

解　设 k 天后，剩下 a_k 个奖牌，则第 k 天发出的奖牌数为 $\frac{1}{7}(a_k-1-k)$. 故

$$a_k = a_{k-1} - \left[k + \frac{1}{7}(a_{k-1} - k)\right].$$

所以 $a_{k-1}=k+\frac{7}{6}a_k$. 即

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{7}{6}a_1 = 1 + \frac{7}{6}\left(2 + \frac{7}{6}a_2\right) = \cdots \\ &= 1 + 2\cdot\frac{7}{6} + 3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \cdots + n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{6}\right)^n a_n. \end{aligned}$$

因为 $a_n=0$，所以 $m=36+6(n-6)\left(\frac{7}{6}\right)^n$.

又因为 $m\in\mathbf{N}$，故 $n=6, m=36$.

评析　题目中条件“第 n 天发出 n 枚，恰好把奖牌发完”，等价于 $a_n=0$，这里利用关系式 $a_{k-1}=k+\frac{7}{6}a_k$ 进行逆向递推，结合 $m\in\mathbf{N}$，求得结果.

思考　注意到上面解题过程中我们已得到

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{7}{6}a_1 = 1 + 2\cdot\frac{7}{6} + 3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \cdots + \\ &\quad n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{6}\right)^n a_n = 36 + 6(n-6)\left(\frac{7}{6}\right)^n + \left(\frac{7}{6}\right)^n a_n. \end{aligned}$$

可得由递推式 $a_{k-1}=k+\frac{7}{6}a_k$ 给出的数列 $\{a_k\}$ 的通项公式：

$$a_n = (a_1 - 30)\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} - 6(n-6).$$

本题中是直接采用逆向递推的方法求解的，是否有其他的简洁解法，留给读者思考.

第10讲　数列的求和

一、基础知识

1. 数列求和的常用方法有：倒序相加法，分组转化法，解析法，错位相减法，裂项相消法，公式法(利用已知数列的和).

2. 等差数列的前 n 项和

设等差数列各项为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n,\cdots$，则它的前 n 项和为

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

3. 等比数列的前 n 项和公式

①当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.

②当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-qa_n}{1-q}(n\in\mathbf{N}^*)$

二、例题

例1　一个等差数列共有12项，前4项的和是10，后4项的和是4，则中间4项的和是________，前10项的和是________.

第15届(2004年)试题

解　由等差数列的性质知：等差数列的前4项的和、中间4项的和、后4项的和也成等差数列，所以中间4项的和是 $\frac{10+4}{2}=7$.

已知前4项的和为10，即 $4a_1+\frac{4(4-1)}{2}d=10$，$2a_1+3d=5$，

前 8 项的和为 17，即 $8a_1+\frac{8(8-1)}{2}d=17,8a_1+28d=17$，

解得 $a_1=\frac{89}{32},d_1=-\frac{3}{16}$，所以前 10 项的和 $=17+a_9+a_{10}=\frac{155}{8}$.

评析　等差数列具有许多美妙的性质，利用这些性质可使解题变得简捷，上面中间 4 项的和的求法就充分说明了这一点.

在学习等差数列时，若能从挖掘等差数列的性质想开去，可逐步思考如下一些问题，有利于对这部分知识全面而深刻地理解：

问题 1　在等差数列 $\{a_n\}$ 中，去掉前面部分项留下的数列：a_s，$a_{s+1},\cdots,a_n,\cdots$ 是否仍是等差数列？数列通项公式能写出来吗？

(答案：是等差数列，$a_n=a_s+(n-s)d$)

问题 2　在等差数列 $\{a_n\}$ 中，偶数项组成的数列 $a_2,a_4,a_6,\cdots$ 序号为 $3k-2$ 的项组成的数列 $a_1,a_4,a_7,\cdots$ 是否也成等差数列？若是，公差是多少？

(答案：是等差数列，公差是 $2d$ 与 $3d$)

思考　上面的性质能否推广到一般情形，即“等差数列中，下标成等差数列的项仍成等差数列”？

显然，在等差数列 $\{a_n\}$ 中，下标成等差数列的项组成的数列 $a_s,a_{s+t},a_{s+2t},\cdots,a_{s+nt},\cdots$ 仍然是等差数列，且公差为 td.

上面解题中应用的等差数列的性质：前 4 项的和、中间 4 项的和、后 4 项的和也成等差数列. 进一步可以推广为：“等差数列中，若下标的平均值相同，则其相应项的和的平均值也相同”，即：

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

若 $\frac{1}{m}(s_1+s_2+\cdots+s_m)=\frac{1}{n}(t_1+t_2+\cdots+t_n)$，

则 $\frac{1}{m}(a_{s_1}+a_{s_2}+\cdots+a_{s_m})=\frac{1}{n}(a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_n})$.

证明　利用等差数列的通项公式，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m}(a_{s_1}+a_{s_2}+\cdots+a_{s_m})\\=&\frac{1}{m}[ma_1+(s_1+s_2+\cdots+s_m-m)d]\\=&a_1+\left(\frac{s_1+s_2+\cdots+s_m}{m}-1\right)d,\\&\frac{1}{n}(a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_n})\\=&\frac{1}{n}[na_1+(t_1+t_2+\cdots+t_n-n)d]\\=&a_1+\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n}-1\right)d,\end{aligned}$$

应用题设条件，$\frac{1}{m}(s_1+s_2+\cdots+s_m)=\frac{1}{n}(t_1+t_2+\cdots+t_n)$，立即得到

$$\frac{1}{m}(a_{s_1}+a_{s_2}+\cdots+a_{s_m})=\frac{1}{n}(a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_n}).$$

用上面的结论，可以十分容易地解决：

某等差数列共 $2n+1$ 项，其中奇数项的和为 95，偶数项的和为 90，则第 $n+1$ 项的值=(　　)

(A)7.　　(B)5.　　(C)4.　　(D)2.

第 10 届(1999 年)试题，答案：(B)

例 2　等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项的和分别为 S_n，T_n，且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-3}{2n+3}$，则 $\frac{a_6}{b_6}=$(　　)

(A)$\frac{3}{2}$.　　(B)1.　　(C)$\frac{6}{5}$.　　(D)$\frac{27}{23}$.

第 15 届(2004 年)试题

解　根据等差数列的性质，知

$$\frac{a_6}{b_6}=\frac{2a_6}{2b_6}=\frac{a_1+a_{11}}{b_1+b_{11}}=\frac{\frac{11}{2}(a_1+a_{11})}{\frac{11}{2}(b_1+b_{11})}=\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{3\times11-3}{2\times11+3}=$$

$\frac{6}{5}$，选(C).

评析　本题获解的关键是将两个等差数列的对应项之比转化为它们的前 n 项和之比.

思考　我们自然会想到：

在题设条件下，能否求出两个等差数列的不是对应项之比值？

答案是肯定的. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n(an+b)$，根据其结构特点，由题设条件 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-3}{2n+3}$，我们可设 $S_n=\lambda n(3n-3)$，$T_n=\lambda n(2n+3)$，$\lambda\neq 0$，

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \lambda(3n^2-3n)-\lambda[3(n-1)^2-3(n-1)] \\ &= \lambda\{3[n^2-(n-1)^2]-3\} = (6n-6)\lambda \\ b_m &= T_m - T_{m-1} = \lambda(2m^2+3m)-\lambda[2(m-1)^2+3(m-1)] \\ &= \lambda\{2[m^2-(m-1)^2]+3\} = (4m+1)\lambda \end{aligned}$$

于是，一般地有

$$\frac{a_n}{b_m}=\frac{(6n-6)\lambda}{(4m+1)\lambda}=\frac{6n-6}{4m+1}.$$

更一般地，若将条件改为 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{an+b}{cn+d}$，则 $\frac{a_n}{b_m}=\frac{2an+b-a}{2cm+d-c}$.

例 3　设 $(3x^4+7x^3+4x^2-7x-5)^5\cdot(3x^4-7x^3+4x^2+7x-5)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{40}x^{40}$，则 $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{40}$ 的值是________.

第 3 届(1992 年)试题

解　在所给式子中，分别令 $x=-1$，$x=1$，得

$$a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{39}+a_{40}=2^{10},$$

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{39}+a_{40}=2^{10}.$$

两式相加，得 $a_0+a_2+\cdots+a_{40}=2^{10}=1024$.

评析　赋值法是解决这类问题的有效途径.

思考 赋值的一些规律:求常数项取 $x=0$,其他的利用 $x^k=1$ 的根,可以求出 $a_0+a_k+a_{2k}+\cdots$ 的值.

但对本题,运算较为复杂,不一一写出了.

例 4 已知 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ 的值是 $\frac{1991}{1992}$,则 $n=$________,其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

第 3 届(1992 年)试题

解

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\\&=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}=\frac{1991}{1992}.\end{aligned}$$

所以 $n=1991$.

评析 本题中数列求和的方法叫做拆项法(或裂项法),它将数列的每一项拆成两个连续项的差.这是数列求和中常用的一种方法.

思考 拆项的方法不一定是惟一的.请看:

拓广 1 数列 $\left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right\}$ 的前 n 项的和是________.

第 3 届(1992 年)试题

这里一般项有几种拆法:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{2+n-n}{n(n+2)}\cdot\frac{1}{2(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right),$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1+n-n}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+2)}$$

$$=\frac{1}{n(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+2)}.$$

但从消项的角度看,第一种拆法最方便:

$$2S_n=\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\cdots+$$
$$\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{2(n+1)(n+2)},$$

$$S_n=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}.$$

拓广 2 使$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}>\frac{995}{1994}$成立的最小的自然数 n 是________.

第 5 届(1994 年)试题. 答案:249

例 5 数列$\{2^n\}$和$\{3n+2\}$的公共项由小到大排成数列$\{c_n\}$,则$\{c_n\}$的通项公式 $c_n=$________,前 n 项和 $S_n=$________.

第 14 届(2003 年)试题

解 数列$\{2^n\}$和$\{3n+2\}$的公共项,可令 $2^n=3m+2(n,m\in\mathbf{N}^*)$得到其在原数列中的项数序号. 易知 $n>1$,由 $m=\frac{2^n-2}{3}=\frac{(3-1)^n+1}{3}-1$,当且仅当$\frac{(-1)^n+1}{3}\in\mathbf{N}$时,即 n 为奇数时,得到公共项由小到大排成数列$\{c_n\}$:8,32,128,…,通项公式 $c_n=2^{2n+1}$. 从而前 n 项和 $S_n=\frac{8-2^{2n+3}}{1-4}=\frac{8}{3}(4^n-1)$.

评析 上面的解法非常简捷. 数列的通项公式及前 n 项和

公式实质上是定义在自然数集上的函数,因此可利用函数思想来分析或用函数方法来解决数列问题.也可以利用方程的思想,设出未知的量,建立等式关系,将问题算式化,简捷明快地加以解决.

思考　等比数列$\{c_n\}$是等差数列$\{3n+2\}$的一个子序列,这是一类值得探索的问题,也是数学命题的一个热点.下面给出第13届高一第2试第22题,让有兴趣的读者进一步研究.

一个非常数等差数列$\{a_n\}$中的部分项$\{a_{b_k}\}$成等比数列,已知$b_1=2,b_2=4,b_3=12$,

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式;(2)求数列$\{b_n\}$的前n项和.

(答案:(1)$\frac{2}{3}\cdot 4^{n-1}+\frac{4}{3}$;(2)$\frac{1}{9}(2^{2n+1}+12n-2)$)

例6　如图10-1是一个向右和向下方可以无限延伸的棋盘,横排为行,竖排为列.将自然数按已填好的4×4个方格中的数字显现的规律填入各方格中.

(1)求位于第3行、第8列的方格内的数字.

(2)数字321在哪一个方格内?

(3)写出位于从左上角向右下角的对角线上的方格内的数字组成的数列的通项公式.

(4)求(3)中数列的前n项和S_n.

1	2	4	7		
3	5	8	12		
6	9	13	18		
10	14	19	25		

图10-1

第9届(1998年)试题

解　(1)在第 3 行中,由左向右的数字依次是:

$a_1=6, a_2=9=a_1+3, a_3=13=a_2+4, a_4=18=a_3+5, \cdots$

归纳可证得 $a_n=a_{n-1}+(n+1)$.

$$\begin{aligned} a_8 &= a_7+9=a_6+8+9=\cdots \\ &= a_4+6+7+8+9=18+30=48. \end{aligned}$$

(2)为求数字 321 在哪个方格内,可将棋盘上的数字按从右上到左下的对角线方向排列如下:

第 1 组 1,

第 2 组 2,3,

第 3 组 4,5,6,

第 4 组 7,8,9,10,

……

显然,从第 1 组到第 n 组共包含 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$个数字,故第 n 组中最大数字是$\dfrac{n(n+1)}{2}$.

因为 321 是第 321 个数字,

所以 321 所在“组”的行号是满足$\dfrac{n(n+1)}{2}\geqslant 321$ 的最小自然数 n,试算,从

$24\times25\div2=300$ 和 $25\times26\div2=325$,可得 $n=25$.

第 25 组中最小的数是数列 1,2,4,7,11,…的第 25 个数.

即 $a_n=a_{n-1}+(n-1)$中的第 25 个数,记为 a_{25},易知

$a_{25}=a_{24}+24=a_{23}+23+24=\cdots$

$\quad=a_1+1+2+3+\cdots+24=1+(1+24)\times24\div2=301.$

因而 321 是第 25 组中第$(321-301+1)$个数,即第 21 个数.

所以 321 位于第 25 行、第 21 列的方格内.

(3)位于从左上角到右下角的对角线上的方格内的数字组成的数列是

$$1,5,13,25,\cdots.$$

不妨依次记为 $b_1,b_2,b_3,\cdots$,易见,b_n 是依(2)中排法的第 $2n-1$ 组的中间一个数,即第 n 个数,

$$b_n=\frac{(2n-1)2n}{2}-(n-1)=2n(n-1)+1$$

$$=2n^2-2n+1,n=1,2,3,\cdots.$$

(4)利用自然数平方和的公式:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

可以计算出来

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2k^2-\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n(2n^2+1)}{3}$$

评析 本题求解的关键是根据表格中所给出的数字找出数列排列的内在规律.

思考 类似地,可求出其他方向上的"线状"数列的和.这些问题留给读者解决.

第11讲 三角函数的定义、图像和性质

一、基础知识

1.三角函数的定义

在平面直角坐标系 $x-O-y$ 内,从原点出发的任意一条射线上的任意一点,都惟一地对应着三个量:

这个点的横、纵坐标 x、y,这个点与坐标原点的距离 r. x,y,r 可以构成六个不同的比:$\frac{y}{r}$,$\frac{x}{r}$,$\frac{y}{x}$,$\frac{x}{y}$,$\frac{r}{x}$,$\frac{r}{y}$. 它们依次是该射线所对应的角的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割,如果取 $r=1$,则可方便地研究这六个比值的变化及相互关系. 整个三角学的基础就在于此.

2. 正、余弦函数

图像的画法

(1)描点法

按①列表,②描点,③用光滑的曲线连接作出正、余弦函数的图像.

(2)几何法

利用单位圆中的正弦线、余弦线来作正、余弦函数的图像的方法.

(3)五点法

作正弦函数的图像,常取的五点为 $(0,0)$,$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$,$(\pi,0)$,$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$和$(2\pi,0)$;作余弦函数的图像,常取的五点为 $(0,1)$,$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$,$(\pi,-1)$,$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$和$(2\pi,1)$.

(4)正弦函数的图像也叫正弦曲线,余弦函数的图像也叫余弦曲线

正、余弦函数的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$.

正、余弦函数的值域都是$[-1,1]$. 其中正弦函数当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最大值 1,当且仅当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最小值$-1$;余弦函数当且仅当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最大值 1,当且仅当 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最小值$-1$.

3. 周期性

(1)周期函数定义

对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 叫做周期函数. 非零常数 T 叫做这个函数的周期.

对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它所有的周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

(2)正、余弦函数都是周期函数，$2k\pi$($k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0$)都是它们的周期，最小正周期是 2π.

(3)函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$(其中 A，ω，φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$)的最小正周期都是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

4. 正、余弦函数的奇偶性

(1)正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数. 因此正弦函数的图像关于原点对称；余弦函数的图像关于 y 轴对称.

(2)正弦曲线是中心对称图形，它的对称中心坐标为 $(k\pi,0)$($k\in\mathbf{Z}$)，正弦曲线也是轴对称图形，它的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$($k\in\mathbf{Z}$).

余弦曲线也是中心对称图形，它的对称中心坐标为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$($k\in\mathbf{Z}$)，余弦曲线也是轴对称图形，它的对称轴方程为 $x=k\pi$($k\in\mathbf{Z}$).

(3)正弦曲线、余弦曲线的对称轴一定分别经过他们各自的最高点或最低点. 正弦曲线、余弦曲线的对称中心一定分别经过他们各自与 x 轴的交点.

5. 正、余弦函数的单调性

(1)正弦函数在每一个闭区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上都是增函数，其值从 -1 增大到 1；在每一个闭区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上都是减函数，其值从 1 减小到 -1. 所以正弦函数 $y=\sin x$ 的单调递

增区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

余弦函数在每一个闭区间$[(2k-1)\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上都是增函数，其值从$-1$增大到1；在每一个闭区间$[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$上都是减函数，其值从1减小到$-1$. 所以余弦函数$y=\cos x$的单调递增区间为$[(2k-1)\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为$[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$.

(2)函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in[0,+\infty)$（其中$A>0,\omega>0$）表示一个振动量时：

A就表示这个量振动时离开平衡位置的最大距离，通常称为这个振动的振幅；

往复振动一次所需的时间$T=\frac{2\pi}{\omega}$，称为这个振动的周期；

单位时间内往复振动的次数$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，称为振动的频率；

$\omega x+\varphi$称为相位，$x=0$时的相位φ称为初相.

(3)振幅变换

函数$y=A\sin x$，$x\in\mathbf{R}$（其中$A>0$且$A\neq1$）的图像，可以看做把正弦曲线$y=\sin x$的图像上所有的点的纵坐标伸长（当$A>1$时）或缩短（当$0<A<1$时）到原来的A倍（横坐标不变）而得到.

(4)周期变换

函数$y=\sin\omega x$，$x\in\mathbf{R}$（其中$\omega>0$且$\omega\neq1$）的图像，可以看做把正弦曲线$y=\sin x$的图像上所有的点的横坐标缩短（当$\omega>1$时）或伸长（当$0<\omega<1$时）到原来的$\frac{1}{\omega}$倍（纵坐标不变）而得到.

(5)相位变换

函数 $y=\sin(x+\varphi)$,$x\in\mathbf{R}(\varphi\neq0)$的图像,可以看做把正弦曲线 $y=\sin x$ 的图像上所有的点向左(当 $\varphi>0$ 时)或向右(当 $\varphi<0$ 时)平行移动 $|\varphi|$ 个单位长度而得到.

6. 正切函数的性质

①定义域:正切函数的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$;

②值域:正切函数的值域为 $\mathbf{R}$,$y=\tan x$ 可以取任何实数值,但没有最大值和最小值;

③周期性:正切函数是周期函数,周期是 π;

④奇偶性:由诱导公式 $\tan(-x)=-\tan x$ 知正切函数是奇函数,其图像关于原点 O 对称;

⑤单调性:正切函数在每一个开区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$ 内都是增函数.

二、例题

例 1 设 $\theta\in\mathbf{R}$,则函数 $f(\theta)=\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta$ 的值域是________.

第 4 届(1993 年)试题

解 设 $t=\sin\theta-\cos\theta$,则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1-t^2}{2}$,

$$f(\theta)=g(t)=t+\frac{1-t^2}{2}=1-\frac{1}{2}(t-1)^2,$$

由 $\theta\in\mathbf{R}$,知 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,可得 $f(\theta)\in\left[-\sqrt{2}-\frac{1}{2},1\right]$.

评析 此题采用局部换元法,设 $\sin\theta-\cos\theta=t$ 后,抓住 $\sin\theta-\cos\theta$ 与 $\sin\theta\cos\theta$ 的内在联系,将三角函数的值域问题转化为二次函数在闭区间上的值域问题,容易求解.换元过程中一定要注意新的

参数的取值范围($t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$)与 $\sin\theta-\cos\theta$ 对应，否则将会出错.

思考　一般地，在遇到题目已知和未知中含有 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的和、差、积等而求三角式的最大值和最小值的题型时，即函数形如 $f(\sin\theta\pm\cos\theta,\sin\theta\cos\theta)$ 时，经常用换元法，将其转化为在闭区间上的二次函数或一次函数进行研究.

例 2　函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图像的一条对称轴的方程是 $x=\frac{\pi}{8}$，且 $\varphi\in(0,\pi)$，则 $\varphi=$________.

第 7 届(1996 年)试题

解　因为 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{4}$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，所以

$$\sin\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi,$$

由 $\varphi\in(0,\pi)$，得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

评析　函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图像垂直于 x 轴的对称轴的方程是 $x=\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

思考　正弦型函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$(或 $|A\sin(\omega x+\varphi)|$)垂直于 x 轴的对称轴，必过函数图像的最高点或最低点(即最值点)，所有对称轴方程为 $\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. 正切型函数 $h(x)=A\tan(\omega x+\varphi)$ 没有垂直于 x 轴的对称轴；但 $g(x)=|A\tan(\omega x+\varphi)|$ 垂直于 x 轴的对称轴方程为 $\omega x+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

例 3　函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[0,1]$ 上恰好有 50 个最大值，则 ω 的取值范围是________.

第 10 届(1999 年)试题

解　设 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 是最小正周期，则 $\left(49+\frac{1}{4}\right)T=1$ 和 $\left(50+\frac{1}{4}\right)T=$

1 时,分别有 50 个和 51 个最大值点. 当 T 增加时最大值个数或不变或减少.

故 $\omega\in\left[\frac{197\pi}{2},\frac{201\pi}{2}\right)$.

评析　思考问题可从 $y=\sin x$ 在一个周期内有几个最大值点入手. 在长度为一个标准周期 2π 的区间内,在$[0,2\pi)$内只有一个最大值点 $x=\frac{\pi}{2}$,但在$\left[\frac{\pi}{2},2\pi+\frac{\pi}{2}\right]$内有两个最大值点 $x=\frac{\pi}{2}$和 $x=2\pi+\frac{\pi}{2}$,如果要出现连续的 50 个最大值,最少要包含 49 个周期的图像.

如:函数 $y=\sin x$ 在含 49 个周期的区间$\left[\frac{\pi}{2},98\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上有 50 个最大值. 在含 49 个多周期的区间$\left[0,98\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上恰好有 50 个最大值. 一般地,只有在区间$[0,a]$,$98\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant a<100\pi+\frac{\pi}{2}$上恰好有 50 个最大值. 这就让我们看清了问题的全貌.

本题问题相当于 $98\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega<100\pi+\frac{\pi}{2}$.

思考　如果区间不是从 0 开始,如将问题改为:

(1)函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$[1,2]$上恰好有 50 个最大值,则 ω 的取值范围是________.

(2)函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$(1,2]$上恰好有 50 个最大值,则 ω 的取值范围是________.

(3)函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$(1,2)$上恰好有 50 个最大值,则 ω 的取值范围是________.

应怎么求解?

为了方便起见,可用补的方法,先将区间补成从 0 开始的完整区间$[0,2]$进行思考,只要注意到端点 1,2 处是否为最大值点,而

$(0,1)$和$(1,2)$内的最大值点个数相同,不难求出 ω 的取值范围.

评析中采用的是特殊化策略,这是解题时常用的一种策略.当我们面临的是一道结构复杂或难以入手的一般化的问题时,要注意从一般退到特殊,先考察包含在一般情形中的某些比较简单的特殊问题,以便从特殊问题的研究中,拓宽解题思路,发现原来问题的解题方向或途径.

将一般问题特殊化,只要对被研究的对象添加某些限制或适当加强某些条件,就可以得到各种不同的特殊问题.在实际解题时,可从特殊值、特殊情形、特殊位置、特殊曲线、特殊数列等着手进行.

例 4　函数 $f(x)=|\tan 2x|$ 的最小正周期是(　　)

(A)2π.　　(B)π.　　(C)$\frac{\pi}{2}$.　　(D)$\frac{\pi}{4}$.

第 15 届(2004 年)试题

解　若 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则对定义域内任意的 x,均有 $f(x+T)=f(x)$成立,即

$$|\tan 2(x+T)|=|\tan 2x| \tag{1}$$

由于要求的是函数 $f(x)$的最小正周期,且四个选择支中已限定最小正周期的取值必为:$2\pi,\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}$之一,我们可按照从小到大的次序代入(1)式中检验:

当 $T=\frac{\pi}{4}$时,(1)式即$\left|\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=|\tan 2x|$,$|\cot 2x|=|\tan 2x|$不恒成立,如 $x=\frac{\pi}{6}$时,$\left|\cot\frac{\pi}{3}\right|\neq\left|\tan\frac{\pi}{3}\right|$,因此$\frac{\pi}{4}$不是$f(x)$的周期.

当 $T=\frac{\pi}{2}$时,(1)式即$\left|\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\tan 2x|$,$|\tan 2x|=|\tan 2x|$恒成立,因此$\frac{\pi}{2}$是 $f(x)$最小的正周期,故选(C).

评析　函数的周期性问题，是中学数学中的重要内容，在每年的高考和数学竞赛中此类试题都大量出现.但如何根据已知函数的特点，寻找求其最小正周期的简便方法，则是一个难点.

思考　从本题结论可见：一个函数加绝对值后，其最小正周期可能与原函数的最小正周期相同.那么，是否所有的函数加绝对值后，最小正周期都与原函数相同呢？

不一定，结果是五花八门的.下面列出两类：

(1)函数 $f(x)=|\sin x|$，它的最小正周期 π 是原函数 $g(x)=\sin x$ 的最小正周期 2π 的一半.

(2)$f(x)=\sin|x|$ 是非周期函数，但 $|f(x)|=|\sin|x||=|\sin x|$ 的最小正周期为 π.

因此，一个函数加绝对值后函数周期性的变化，要根据具体情况进行分析.

例 5　若函数 $y=|\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})-1|$ 的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$，那么正数 ω 的值是(　　)

(A)8.　　(B)4.　　(C)2.　　(D)1.

第 7 届(1996 年)试题

解　因为$-1\leqslant\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，

所以 $y=\left|\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-1\right|=1-\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$.

$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=4$，故选(B).

评析　这里是用简化法求最小正周期的.从上可见，函数 $y=|\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})-1|$ 和 $y=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})-1$ 的最小正周期相同，均为$\frac{2\pi}{|\omega|}$.

思考　复合函数 $y=|Af(\omega x+\varphi)+a|$，$A\omega\neq 0$($f$ 为 sin，cos，tan，cot 之一)的周期性如何？

当 $a\neq0$ 时,$|A\sin(\omega x+\varphi)+a|$,$|A\cos(\omega x+\varphi)+a|$ 的最小正周期均为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$;其他情形,最小正周期均为 $\frac{\pi}{|\omega|}$. 证明留给读者自行完成.

例 6　若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数,最小正周期都是 T,对于函数 $y=f_1(x)+f_2(x)$,以下判断中,正确的是(　　)

(A)最小正周期是 T.

(B)有最小正周期 t,且 $t<T$.

(C)是周期函数,但可能没有最小正周期.

(D)可能是非周期函数.

第 8 届(1997 年)试题

解　对任意实数 x,都有

$f_1(x+T)=f_1(x)$,$f_2(x+T)=f_2(x)$,

因此 $f_1(x+T)+f_2(x+T)=f_1(x)+f_2(x)$,所以 $y=f_1(x)+f_2(x)$ 是周期函数.

取 $f_1(x)=\sin x$,$f_2(x)=-\sin x$,则 $y=f_1(x)+f_2(x)=0$ 是周期函数,但没有最小正周期(任意非零常数都是它的周期),选(C).

评析　两个函数和的周期性问题,结果是非常复杂的,许多问题至今还没有解决. 一般都从周期函数的定义出发,结合举反例进行论述.

思考　下面列举两个函数和的周期性问题的一些结论:

(1)两个周期函数之和,可能是周期函数,也可能是非周期函数.

设 $f(x)=\sin x$,$g(x)=\sin\pi x$,$h(x)=1$,则两个周期函数之和 $f(x)+h(x)=\sin x+1$ 是周期函数,而

$f(x)+g(x)=\sin x+\sin\pi x$ 是非周期函数.

(2)一个周期函数与一个非周期函数的和,可能是周期函数,也可能是非周期函数.

设 $f(x)=\sin x+\sin\pi x$,$g(x)=-\sin x$,$h(x)=-2\sin x$,则

$f(x)+g(x)=\sin\pi x$ 是周期函数，$f(x)+h(x)=\sin\pi x-\sin x$ 是非周期函数.

(3)若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是周期函数，最小正周期分别是 $T_1,T_2(T_1\neq T_2)$，当 T_1/T_2 是有理数时，函数 $y=f_1(x)+f_2(x)$ 是周期函数，T_1,T_2 的最小公倍数是它的一个周期.

一般地，我们还有：

若两连续函数 $f_1(x),f_2(x)(x\in\mathbf{R})$ 的最小正周期分别为 $T_1=p\alpha,T_2=q\alpha(p,q\in\mathbf{N}^*,(p,q)=1,\alpha$ 为正实数，且 $p\neq q)$，则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 的最小正周期为 $\frac{pq\alpha}{n}(n\in\mathbf{N}^*$，且 $(n,qp)=1)$.

证：若 T^* 是 $f(x)$ 的最小正周期，则 $f(x)$ 的任何正周期必是 T^* 的正整数倍(不然的话，若 $T=nT^*+r(0<r<T^*,n\in\mathbf{N}^*)$ 是 $f(x)$ 的一个正周期，那么对定义域内任何 x，都有 $f(x)=f(x+T)=f(x+nT^*+r)=f(x+r)$，可见 r 是 $f(x)$ 的周期，这与 T^* 是 $f(x)$ 的最小正周期矛盾).

易知 $pq\alpha$ 是 $f(x)$ 的一个正周期，故 $pq\alpha=mT^*(m\in\mathbf{N}^*)$，于是 $T^*=\frac{kpq\alpha}{n}=\frac{pq\alpha}{m}$，$\therefore km=n,k\mid n$，又 $(k,n)=1$，故 $k=1$，所以 $T^*=\frac{pq\alpha}{n},(n,pq)=1$.

例 7　函数 $y=\csc x\cos 3x-\csc x\cos 5x$ 的最小正周期是(　　)

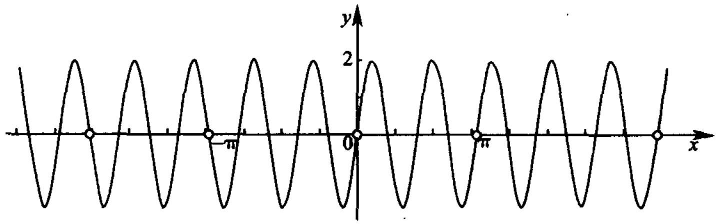
(A)$\frac{\pi}{4}$.　　(B)$\frac{\pi}{2}$.　　(C)π.　　(D)2π.

第 7 届(1996 年)试题

解由题设知

$$y=\csc x\cos 3x-\csc x\cos 5x=\csc x(\cos 3x-\cos 5x)$$
$$=\csc x[-2\sin 4x\sin(-x)]=2\sin 4x.$$

从变化结果 $2\sin 4x$ 看，周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.



但由于该函数的定义域受 $\csc x$ 的约束,为 $x\neq k\pi, x\in\mathbf{R}, k\in\mathbf{Z}$,所以最小正周期是 π,选(C).

评析　对应关系与定义域是函数的两个基本要素.一个函数的周期性,不仅与函数的对应关系有关,定义域也起着关键的作用.对应关系相同而定义域不同的两个函数,它们的周期性会有很大的差异.

$f(x)=2\sin4x, x\in\mathbf{R}$,其最小正周期是$\frac{\pi}{2}$;

$f(x)=2\sin4x, x\in\{x\mid x\neq k\pi, x\in\mathbf{R}, k\in\mathbf{Z}\}$,其最小正周期是 π;

$f(x)=2\sin4x, x\in\{x\mid x\neq0, x\in\mathbf{R}\}$,是非周期函数.

思考　熟悉周期函数的定义域特征,掌握周期函数与定义域有关的一些性质,可以帮助我们直接判断某些函数的周期性.

(1)周期函数的定义域一定是一个无限集,且至少一端无界.

(2)周期函数的定义域 D 一定具备"周期性"(即存在非零实数 T,对任意 $x\in D$,都有 $x+T\in D$).

(3)仅在有限个点没有定义的函数,必为非周期函数.

例 8　$\mathbf{R}$ 上定义的函数 $f(x)$,对任何实数 x 都有:$f(x+2)=f(x+1)-f(x)$,$f(1)=\lg3-\lg2$,$f(2)=\lg3+\lg5$,则 $f(2001)=$ __________.

第 6 届(1995 年)试题

解　因为 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1)-f(x)=-f(x-1)$,

$f(x+6)=f(x+4+2)=-f(x+4-1)=-f(x+3)=f(x)$.

$f(2001)=f(6\times 333+3)=f(3)=f(2)-f(1)=\lg 15-\lg\frac{3}{2}=1$.

评析 此题的背景 $f(x)$ 是周期函数，关键是要通过递推关系的转换，求出函数的周期.

思考 如果我们令 $a_n=f(x+n)$，则由

$f(x+2)=f(x+1)-f(x)\Leftrightarrow f(x+n+2)=f(x+n+1)-f(x+n)$,

得 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，就化归为二阶线性递推数列的周期性问题.

根据上一题的结论，由于 $f(x+2)=pf(x+1)+qf(x)\Leftrightarrow f(x+n+2)=pf(x+n+1)+qf(x+n)$，可得

设 x_1,x_2 是特征方程 $x^2=px+q$ 的两根，如果存在正整数 m 满足 $x_1^m=x_2^m=1$，则由关系式 $f(x+2)=pf(x+1)+qf(x)$ 确定的函数 $f(x)$ 为周期函数，m 是它的一个周期.

例 9 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的图像关于点 (a,b)，(c,b) 都对称 $(a\neq c)$，则

(A) $f(x)$ 是以 $|a-c|$ 为周期的函数；

(B) $f(x)$ 是以 $2|a-c|$ 为周期的函数；

(C) $f(x)$ 是以 $\frac{1}{2}|a-c|$ 为周期的函数；

(D) $f(x)$ 不是周期函数.

第 13 届(2002 年)培训题

解 因函数 $f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称，所以对任意 $x\in\mathbf{R}$，成立 $f(x)=2b-f(2a-x)$；

又函数 $f(x)$ 的图像关于点 (c,b) 对称，所以对任意 $x\in\mathbf{R}$，成立 $f(x)=2b-f(2c-x)$；于是，$f(2a-x)=2b-f[2c-(2a-x)]=2b-f(x+2c-2a)=f(x+2c-2a)$. 可见 $f(x)$ 是以 $2|a-c|$ 为周期的函数，选(B).

评析 这是关于两点对称的函数的周期性问题，关键在于正

确地进行数形之间的转换，将图像的对称信息翻译成数学符号语言.

思考　本题根据两点对称判断函数的周期性，我们可以类比思考：关于一点一线对称和关于两线对称的函数是否具有周期性？

答案是肯定的，关于一点一线对称的结论：若 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图像关于一点 $P(a,y_0)$ 成中心对称，且关于直线 $x=b(a\neq b)$ 成轴对称，则 $f(x)$ 是以 $4(b-a)$ 为周期的函数.

证　图像上任一点 $(x,f(x))$ 关于 $P(a,y_0)$ 的对称点 $(2a-x,2y_0-f(x))$ 也在图像上，即有 $f(2a-x)=2y_0-f(x)$，且 $f(b-x)=f(b+x)$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=2y_0-f(2a-x)\\&=2y_0-f[b-(b-2a+x)]\\&=2y_0-f[b+(b-2a+x)]\\&=2y_0-f(2b-2a+x)\\&=f[2a-(2b-2a+x)]\\&=f[b-(3b-4a+x)]\\&=f[b+(3b-4a+x)]\\&=f[4(b-a)+x].\end{aligned}$$

所以，$f(x)$ 是以 $4(b-a)$ 为周期的函数.

特别地，(1)若 $y_0=0$，即函数满足 $f(a+x)=-f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)(a\neq b)$ 时，$f(x)$ 是以 $4(b-a)$ 为周期的函数.

(2)当 $a=0,y_0=0$ 时，即奇函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=b\ (b\neq 0)$ 对称时，则 $f(x)$ 是以 $4b$ 为周期的函数.

注　对 a、b 之间的任一数 r，$f(x)$ 关于点 $(r,0)$ 及直线 $x=r$ 均不对称，则 $4|b-a|$ 是 $f(x)$ 的最小正周期.

关于两线对称：若函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a>b)$ 都对称，则 $f(x)$ 以 $2(a-b)$ 为周期.

证 $f[2(a-b)+x]=f[a+(a-2b+x)]$

$=f[a-(a-2b+x)]=f(2b-x)=f[b+(b-x)]$

$=f[b-(b-x)]=f(x).$

所以,$f(x)$以 $2(a-b)$为周期.

特别地,当 $b=0$ 时,即:偶函数 $f(x)$的图像若关于直线 $x=a(a\neq 0)$对称,则 $f(x)$是以 $2a$ 为周期的函数.

附录:求函数最小正周期的常用方法

求函数最小正周期的方法很多,下面举例说明一些常用的方法:

一、图像法

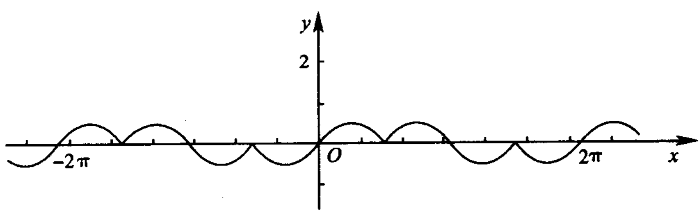
根据基本函数的图像(不一定要画出),直接写出函数的最小正周期.如上题,我们也可以作出函数的大致图像,从图像中看出其最小正周期.下面再举一例:

例 1 函数 $\sin x\cdot|\cos x|$的最小正周期是(　　)

(A)2π.　　(B)π.　　(C)$\frac{\pi}{2}$.　　(D)不存在.

第 7 届(1996 年)试题

解 画出函数的简图,



可见函数的最小正周期为 2π,选(A).

二、化简法

某些形式上较复杂的函数,可先化简,再求最小正周期.

例 2　求函数 $f_1(x)=|\sin\frac{x}{2}|\cdot|\cos\frac{x}{2}|$，$f_2(x)=\sin\frac{2x}{3}+\cos\frac{2x}{3}$的最小正周期.

解　$f_1(x)=|\sin\frac{x}{2}|\cdot|\cos\frac{x}{2}|=\frac{1}{2}|\sin x|$，$T_1=\pi$；$f_2(x)=\sin\frac{2x}{3}+\cos\frac{2x}{3}=\sqrt{2}\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{4})$，$T_2=3\pi$.

三、等周期法

理论依据是：若对于任意的 $x\in M$，都有

$$g(x+T)=g(x)\Leftrightarrow f(x+T)=f(x)$$

且函数 $f(x)(x\in M)$的最小正周期为 T，则函数 $g(x)(x\in M)$的最小正周期也为 T(证明略).

例 3　函数 $f_1(x)=|\sin\frac{x}{2}|\cdot|\cos\frac{x}{2}|$，$f_2(x)=\sin\frac{2x}{3}+\cos\frac{2x}{3}$，$f_3(x)=\arccos(\sin x)$的最小正周期分别是 T_1,T_2,T_3，则(　　)

(A) $T_1<T_2<T_3$.　　(B) $T_3<T_2<T_1$.

(C) $T_1<T_3<T_2$.　　(D) $T_3<T_1<T_2$.

第 5 届(1994 年)试题

解　前面已求得 $T_1=\pi$；$T_2=3\pi$. $f_3(x+T)=f_3(x)\Leftrightarrow\sin(x+T)=\sin x$，$T_3=2\pi$，故选(C).

下面一题留给读者思考：

例 4　以 T_1,T_2,T_3 分别表示函数 $f_1(x)=\tan\frac{x}{\sqrt{2}}$，$f_2(x)=|\cos x|$，$f_3(x)=\sin\frac{x}{3}(\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3})$的最小正周期，则(　　)

(A) $T_1<T_2<T_3$.　　(B) $T_3<T_2<T_1$.

(C) $T_2<T_1<T_3$.　　(D) $T_2<T_3<T_1$.

第 9 届(1998 年)试题，答案：(C)

四、检验法

若已知函数 $f(x)$的正周期的一个范围,则可逐个从小到大代入已知函数进行检验,所得最小的正周期即为所求,这一方法特别适用于解某些选择题.本题实际上也是用这一方法求解的.

五、奇偶函数法

依据是:在公共定义域 D 上,奇函数 $f_1(x)$的最小正周期为 T_1,偶函数 $f_2(x)$的最小正周期为 T_2,且$\frac{T_1}{T_2}=$有理数,则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$的最小正周期是 T_1、T_2 的最小公倍数.

证 由已知$\frac{T_1}{T_2}=$有理数,我们可设

$T_1=p\alpha,T_2=q\alpha$,这里 $p,q\in\mathbf{N}^*$,且$(p,q)=1,\alpha\in\mathbf{R}^+$

对于任意的 $x\in D$,有

$$\begin{aligned}f(x+pq\alpha)&=f_1(x+pq\alpha)+f_2(x+pq\alpha)\\&=f_1(x+qT_1)+f_2(x+pT_2)\\&=f_1(x)+f_2(x)=f(x),\end{aligned}$$

故 $f(x)$是周期函数,T_1,T_2 的最小公倍数 $pq\alpha$ 是它的一个周期.

再设 $T(\neq0)$是 $f(x)$的任一周期,那么对于任意的 $x\in D$,都有 $x+T\in M$,且 $f(x+T)=f(x)$,即

$$f_1(x+T)+f_2(x+T)=f_1(x)+f_2(x). \tag{1}$$

由于数集 D 是奇偶函数的定义域,必对称于原点,故也有 $-(x+T)\in D$.用$-(x+T)$替代(1)中的 x,得到

$$f_1(-x)+f_2(-x)=f_1[-(x+T)]+f_2[-(x+T)],$$

根据 $f_1(x)$、$f_2(x)$的奇偶性,由上式可得到

$$-f_1(x)+f_2(x)=-f_1(x+T)+f_2(x+T). \tag{2}$$

(1)±(2)可得到

$$f_1(x+T)=f_1(x),f_2(x+T)=f_2(x).$$

这表明 $f(x)$的周期 T 一定是 $f_1(x)$和 $f_2(x)$的公共周期.而

在 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的公共正周期中，最小的是 T_1、T_2 的最小公倍数 $pq\alpha$. 这就证明了 T_1、T_2 的最小公倍数是 $f(x)$ 的最小正周期.

根据上面结论，大量较复杂函数的最小正周期可十分方便地求出，略举数例：

例 5　求函数 $f(x)=\sqrt[5]{\sin\frac{3}{2}x}-\sqrt[5]{\cos\frac{2}{3}x}$ 的最小正周期.

解：对于任意 $T(\neq 0)$，

$$\sqrt[5]{\sin\frac{3}{2}(x+T)}=\sqrt[5]{\sin\frac{3}{2}x}\Leftrightarrow\sin\frac{3}{2}(x+T)=\sin\frac{3}{2}x,$$

$$-\sqrt[5]{\cos\frac{2}{3}(x+T)}=-\sqrt[5]{\cos\frac{2}{3}x}\Leftrightarrow\cos\frac{2}{3}(x+T)=\cos\frac{2}{3}x,$$

故奇函数 $f_1(x)=\sqrt[5]{\sin\frac{3}{2}x}$ 的最小正周期 $T_1=\frac{2\pi}{3/2}=\frac{4}{3}\pi$，偶函数 $f_2(x)=-\sqrt[5]{\cos\frac{2}{3}x}$ 的最小正周期 $T_2=\frac{2\pi}{2/3}=3\pi$，故 $f(x)$ 的最小正周期是 T_1,T_2 的最小公倍数 12π.

例 6　求函数 $f(x)=2\sin3x+3|\sin4x|$ 的最小正周期.

解：奇函数 $f_1(x)=2\sin3x$ 的最小正周期 $T_1=\frac{2}{3}\pi$，偶函数 $f_2(x)=3|\sin4x|$ 的最小正周期 $T_2=\frac{\pi}{4}$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 T_1,T_2 的最小公倍数 2π.

应用上述结论不仅可以求出奇偶函数之和的最小正周期，通过平移变换还可求出可化为奇偶函数之和的周期函数的最小正周期.

例 7　求 $f(x)=(\sin x)^{2008}+(\cos x)^{2007}$ 的最小正周期.

解：$f(\frac{\pi}{2}-x)=(\cos x)^{2008}+(\sin x)^{2007}$，易知 $f_1(x)=(\sin x)^{2007}$ 为奇函数，且 $f_1(x+T)=f_1(x)\Leftrightarrow\sin(x+T)=\sin x$，所以 $f_1(x)$ 与

$\sin x$ 周期相同，均为 $T_1=2\pi$；$f_2(x)=(\cos x)^{2008}$ 为偶函数，且 $f_2(x+T)=f_2(x)\Leftrightarrow|\cos(x+T)|=|\cos x|$，所以 $f_2(x)$ 与 $|\cos x|$ 周期相同，它们的最小正周期均为 $T_2=\pi$. 故 $f(\frac{\pi}{2}-x)$ 的最小正周期为 T_1,T_2 的最小公倍数 2π. 又 $f(x)$ 与 $f(\frac{\pi}{2}-x)$ 的最小正周期相同，故 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.

一般地，$g(x)$ 表示六个基本三角函数($\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$)之一，则 $f(x)=ag^{2n}(x)+b\cos^{2m+1}x(n,m\in\mathbf{N}^*,ab\neq 0)$ 的最小正周期为 2π.

注意：T_1,T_2 分别是 $f_1(x)(x\in D)$、$f_2(x)(x\in D)$ 的最小正周期，这里定义域 D 是公共定义域，否则结论不保证成立.

反例 设 $n\in\mathbf{Z}$，奇函数 $f_1(x)=\sin\pi x,x\neq 2n$，偶函数 $f_2(x)=\begin{cases}0,x\neq 4n\\1,x=4n\end{cases}$，则 $T_1=2,T_2=4,T_1$、T_2 的最小公倍数为 4，但 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\sin\pi x,x\neq 2n$，最小正周期 $T=2$.

原因何在？原因就在于求 T_1 时，$f_2(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，而不是 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的公共定义域 $D=\{x|x\neq 2n,n\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\}$，事实上，$f_2(x)(x\in D)$ 的最小正周期 $T_2=2$.

六、最小公倍数法

两个周期函数之和的最小正周期可用最小公倍数法来求，除了上面的奇偶函数之和的情形，下面再举两种情况：

(1)$A_1A_2\neq 0,\frac{\omega_1}{\omega_2}=$有理数但不等于 1 时，$f(x)=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)$ 的最小正周期是 $A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)$、$A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)$ 的最小正周期的最小公倍数.

证明 略.

(2)设 $D=\{x|x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq kT_2+\varphi,k\in\mathbf{Z}\}$，$f_1(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，最小正周期为 T_1，$f_2(x)(x\in D)$ 是周期函数，最小正周期

为 T_2，若$\frac{T_1}{T_2}$=有理数，则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)(x\in D)$的最小正周期是 T_1、T_2 的最小公倍数.

证　设 T_1、T_2 的最小公倍数为 T^*，则存在正整数 p,q，使 $T^*=pT_1=qT_2$，于是

$$\begin{aligned}&f(x+T^*)=f_1(x+T^*)+f_2(x+T^*)\\&=f_1(x+pT_1)+f_2(x+qT_2)\\&=f_1(x)+f_2(x)=f(x)\end{aligned}$$

故 $f(x)$是周期函数，T^* 是它的一个周期.

若 T 是 $f(x)$的一个周期，则对任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，即

$$f_1(x+T)+f_2(x+T)=f_1(x)+f_2(x) \tag{1}$$

若 $x_0=kT_2+\varphi,k\in\mathbf{Z}$，则必有 $x_0-T=k'T_2+\varphi,k'\in\mathbf{Z}$，(不然的话，如 $x_0-T\in D$，必有$(x_0-T)+T=x_0\in D$，这与 $x_0=kT_2+\varphi$，$k\in\mathbf{Z}$ 即 $x_0\notin D$ 矛盾).

于是 $T=x_0-(x_0-T)=(k-k')T_2=nT_2,n=k-k'\in\mathbf{Z}$，

又 $f_2(x+T)=f_2(x+nT_2)=f_2(x)$，结合(1)式，得 $x\in D$ 时有

$$f_1(x+T)=f_1(x) \tag{2}$$

下面，我们证对任意 $x_0\in\mathbf{R}-D$，(2)式也成立.

取 $x_n\in D,n=1,2,3,\cdots$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，由(2)式及 $f_1(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，得 $f_1(x_n+T)=f_1(x_n)$，两边取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_1(x_n+T)=\lim\limits_{n\to\infty}f_1(x_n)$，即 $f_1(x_0+T)=f_1(x_0)$. 由 x_0 的任意性，知对一切 $x\in\mathbf{R}-D$，(2)式也成立. 这样，(2)式对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故 T 是 $f_1(x)(x\in\mathbf{R})$的周期，所以 $T=mT_1,m\in\mathbf{Z}$，但 $m\neq0$.

综上，$T=mT_1=nT_2$，$\therefore T=kT^*,k\in\mathbf{Z}$，但 $k\neq0$. 所以 $f(x)(x\in D)$的最小正周期为 T_1、T_2 的最小公倍数 T^*.

例 8　求函数 $f(x)=\sin2x+2\cos2x+3\tan4x$ 的最小正周期.

解:定义域 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq\frac{1}{4}k\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\}$,

函数 $f_1(x)=\sin2x+2\cos2x=\sqrt{5}\sin(2x+\varphi)$,最小正周期为 $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$,

$f_2(x)=3\tan4x$ 的最小正周期 $T_2=\frac{\pi}{4}$,故 $f(x)$的最小正周期是 π 与$\frac{\pi}{4}$的最小公倍数 π.

注:一般地,$f(x)=a\sin^n(\omega_1x+\varphi_1)+b\tan^m(\omega_2x+\varphi_2)$($n$,$m\in\mathbf{N}^*$,$ab\neq0$,$\omega_1\omega_2\neq0$)的最小正周期,是函数 $g(x)=\sin^n(\omega_1x+\varphi_1)$与$h(x)=\tan^m(\omega_2x+\varphi_2)$的最小正周期 T_1(n 为奇数时,等于$\frac{2\pi}{|\omega_1|}$;n 为偶数时,等于$\frac{\pi}{|\omega_1|}$)、T_2($=\frac{\pi}{|\omega_2|}$)的最小公倍数.

第12讲 三角变换

一、基础知识

三角变换是一种重要的变形方法,在变形过程中,不仅需要熟练把握各种三角公式,还需要有化归意识和处理复杂三角式的能力.三角变换的主要策略是三看:一看角,二看函数名称,三看式子特征.三角变换的基本形式是三变:变角,变名,变式.

1.三角函数的定义域

正弦、余弦的定义域为$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R}\}$;正切、正割的定义域是$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$;余切、余割的定义域是$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 同角公式

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，　$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，　$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.

$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$，　$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$.

$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$，　$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$，　$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$.

$$\sin(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$$
$$\cos(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$$
$$\tan(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\tan\alpha(k\in\mathbf{Z})$$

3. 诱导公式

(1) $\sin(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\sin\alpha$，　$\cos(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\cos\alpha$，$(k\in\mathbf{Z})$

(2) $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.　$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$.

(3) $\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$，　$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$.

(4) $\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$，　$\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$，

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，　$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

(5) $\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$，　$\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$，

$\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$，　$\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$，

$\sin(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，　$\cos(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha)=-\sin\alpha$，

$\sin(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，　$\cos(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha)=\sin\alpha$.

以上五组诱导公式，在应用时，α 可以是任意角，但当理解其正确性时，α 均看做锐角.

4. 平面内两点间的距离公式

坐标平面内任意两点 $P(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$ 间的距离公式为 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

5. 和，差，倍，半角公式

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta.$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$

$\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}.$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}.$

正负号由$\dfrac{\alpha}{2}$所在象限的正、余弦函数确定.

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$

已知$a\sin\alpha\pm b\cos\beta=c$，$a\cos\alpha\pm b\sin\beta=d$，求$\alpha\pm\beta$型的题，应注意运用平方相加或和差化积后求得$\tan\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}$，进而利用万能公式求解.

6. 辅助角公式：

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$（其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$）

二、例题

例 1　$\tan1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan87^\circ\cdot\tan88^\circ\cdot\tan89^\circ=$

________.

第 2 届(1991 年)试题

解 由 $1^\circ=90^\circ-89^\circ, 2^\circ=90^\circ-88^\circ, \cdots, 89^\circ=90^\circ-1^\circ$及 $\tan\alpha=\cot(90^\circ-\alpha)$,得

$$\begin{aligned}&\tan1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan87^\circ\cdot\tan88^\circ\cdot\tan89^\circ\\&=\cot1^\circ\cdot\cot2^\circ\cdot\cot3^\circ\cdot\cdots\cdot\cot87^\circ\cdot\cot88^\circ\cdot\cot89^\circ\\&=\sqrt{\tan1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan87^\circ\cdot\tan88^\circ\cdot\tan89^\circ\cdot\cot1^\circ\cdot\cot2^\circ\cdot\cot3^\circ\cdot\cdots\cdot\cot87^\circ\cdot\cot88^\circ\cdot\cot89^\circ}\\&=\sqrt{\tan1^\circ\cdot\cot1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\cot2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\cot3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan87^\circ\cdot\cot87^\circ\cdot\tan88^\circ\cdot\cot88^\circ\cdot\tan89^\circ\cdot\cot89^\circ}\\&=1\end{aligned}$$

评析 根据题目中 $\tan1^\circ\cdot\tan89^\circ=\tan2^\circ\cdot\tan88^\circ=\tan3^\circ\cdot\tan87^\circ=\cdots=1$,我们用倒写相乘法,高屋建瓴,易于从整体上把握问题,这与课本中推导等差数列前 n 项和的求和公式时所用的倒写相加法一脉相承.

思考 (1)不查表,求值:$\cos^2 91^\circ+\cos^2 92^\circ+\cdots+\cos^2 180^\circ=$______.

第 2 届(1991 年)试题,答案:45.5

(2)$\tan1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan89^\circ\cdot\tan91^\circ\cdot\tan92^\circ\cdot\cdots\cdot\tan179^\circ=$________.(答案:$-1$)

例 2 用$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.则$[\sin10^\circ]+[\sin20^\circ]+[\sin30^\circ]+\cdots+[\sin2000^\circ]=$____________.

第 4 届(1993 年)试题

解 因为$[\sin10^\circ]+[\sin20^\circ]+\cdots+[\sin80^\circ]=0$,

$[\sin100^\circ]+[\sin110^\circ]+\cdots+[\sin180^\circ]=0$.

$[\sin190^\circ]+[\sin200^\circ]+\cdots+[\sin350^\circ]=-17$,

$[\sin90^\circ]=1, [\sin360^\circ]=0$.

所以$[\sin10^\circ]+[\sin20^\circ]+\cdots+[\sin360^\circ]=-16$.

同理$[\sin370^\circ]+[\sin380^\circ]+\cdots+[\sin720^\circ]=\cdots=[\sin1450^\circ]+[\sin1460^\circ]+\cdots+[\sin1800^\circ]=-16$.

$$\begin{aligned}&[\sin1810^\circ]+[\sin1820^\circ]+\cdots+[\sin2000^\circ]\\&=\{[\sin1810^\circ]+[\sin1820^\circ]+\cdots+[\sin1980^\circ]\}+\end{aligned}$$

$[\sin 1990°]+[\sin 2000°]=-1.$

$[\sin 10°]+[\sin 20°]+[\sin 30°]+\cdots+[\sin 2000°]=-16\times 5-1=-81.$

评析　关键是正确理解高斯函数$[x]$，它表示不超过实数x的最大整数，本题中由于$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，故$0\leqslant\sin x<1$时，$[\sin x]=0$；$-1\leqslant\sin x<0$时，$[\sin x]=-1$；$\sin x=1$时，$[\sin x]=1$.

思考　上面的解题过程，揭示了周期性的规律：

$[\sin(k\cdot 360°+10°)]+[\sin(k\cdot 360°+20°)]+\cdots+$

$[\sin(k\cdot 360°+360°)]=-16, k\in\mathbf{Z}.$

类似可得

$[\cos(k\cdot 360°+10°)]+[\cos(k\cdot 360°+20°)]+\cdots+$

$[\cos(k\cdot 360°+360°)]=-16, k\in\mathbf{Z}.$

例 3　锐角α,β满足条件$\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$，下列结论中正确的是(　　)

(A)$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$.　　　　(B)$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

(C)$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$.　　　　(D)$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

第 3 届(1992 年)试题

解　题给等式$\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$即

$$\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta}-\cos\beta\right)^2+\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta}-\sin\beta\right)^2=0,$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta}-\cos\beta=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta}-\sin\beta=0.$$

所以$\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，$\cos^2\alpha=\sin^2\beta$，$\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$，所以$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta$，选(D).

评析　这里是用配方法. 本题的求解方法很多，还可以用不等

式法、解方程法等.

思考 配方法是对数学式子进行一种定向变形(配成“完全平方”)的技巧,通过配方找到已知和未知的联系,从而化繁为简.何时配方,需要我们适当预测,并且合理运用“裂项”与“添项”、“配”与“凑”的技巧,从而完成配方.有时也将其称为“凑配法”.

最常见的配方是进行恒等变形,使数学式子中出现完全平方.它主要适用于:已知或者未知中含有二次方程、二次不等式、二次函数、二次代数式的讨论与求解,或者缺 xy 项的二次曲线的平移变换等问题.

配方法使用的最基本的配方依据是二项完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,将这个公式灵活运用,可得到各种基本配方形式,如:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab;$$

$$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=(a-b)^2+3ab=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2;$$

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]$$

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(a+b-c)^2-2(ab-bc-ca)=\cdots$$

结合其他数学知识和性质,相应有另外的一些配方形式,如:

$$1+\sin 2\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2;$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2,\cdots\text{等等}.$$

例 4 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=-1$,则 $\sin^{1993}\alpha+\cos^{1993}\alpha=$________.

第 4 届(1993 年)试题

解 $\sin\alpha+\cos\alpha=-1$,

两边平方可得 $\sin\alpha=0$,或 $\cos\alpha=0$,即 $\sin\alpha=-1,\cos\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=-1,\sin\alpha=0$,所以 $\sin^{1993}\alpha+\cos^{1993}\alpha=-1$.

评析 当关系式中出现 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 时,平方法是常用的有效方法.

思考 一般地,由 $\sin\alpha+\cos\alpha=t$,求 $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha(n\in\mathbf{N}^*)$,可采用递推的方法来解. 令 $u_n=\sin^n\alpha+\cos^n\alpha$,则 $u_{n+1}=\sin^{n+1}\alpha+\cos^{n+1}\alpha=tu_n+\frac{1-t^2}{2}u_{n-1}$.

例 5 已知 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}$,$0\leqslant\alpha,\beta<2\pi$,则 $\sin\alpha\sin\beta$ 的取值范围是________,$\cos\alpha\cos\beta$ 的取值范围是________.

第 11 届(2000 年)试题

解 由 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}>0$,得$\sin^2\alpha\cos^2\beta=\frac{1}{9}$,

所以$\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)=\frac{1}{9}$,于是得 $y=\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\frac{1}{9}$,

因$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$,易知 $y=\sin^2\alpha-\frac{1}{9}\leqslant\frac{8}{9}$,所以$\sin^2\alpha\sin^2\beta\leqslant\frac{8}{9}$,

$-\frac{2\sqrt{2}}{3}\leqslant\sin\alpha\sin\beta\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

同理,由$\sin^2\alpha\cos^2\beta=\frac{1}{9}$,所以$(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta=\frac{1}{9}$,

$y=\cos^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta-\frac{1}{9}$,

可得$-\frac{2\sqrt{2}}{3}\leqslant\cos\alpha\cos\beta\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

评析 此题若单纯用三角变换及不等式求解,比较麻烦,这里转换成二次函数的最值问题就简单了.

思考 本题对角度的限制 $0\leqslant\alpha,\beta<2\pi$ 是多余的,可以去掉. 但如果把限制条件改为 $0\leqslant\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$,或 $0\leqslant\alpha,\beta<\pi$,或 $0\leqslant\alpha,\beta<\frac{3\pi}{2}$,答案是不同的,原因是这些区间内正弦和余弦的取值范围发生了变化. 这些问题留给读者进一步思考.

例 6 设 $P(x_0,y_0)$为曲线$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的任意一点,要

使不等式 $x_0+y_0+c\geqslant 0$ 恒成立，则 c 的取值范围是(　　)

(A) $[4,+\infty)$.　　(B) $[-6,+\infty)$.

(C) $(-\infty,-6]$.　　(D) $(-\infty,4]$.

第 13 届(2002 年)培训题

解 因为 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的任意一点，所以

$$\frac{(x_0-1)^2}{16}+\frac{y_0^2}{9}=1.$$

设 $x_0=1+4\cos\theta, y_0=3\sin\theta$，不等式 $x_0+y_0+c\geqslant 0$ 恒成立，即

$c\geqslant -1-4\cos\theta-3\sin\theta=-1-5\sin(\theta+\varphi)$，因为 $-1-5\sin(\theta+\varphi)\leqslant 4$，所以 $c\geqslant 4$，选(A).

评析 本来是高二的一道试题，通过三角代换，关键是根据题给曲线的内在结构：$\frac{(x_0-1)^2}{16}+\frac{y_0^2}{9}=1$ 即 $\left(\frac{x_0-1}{4}\right)^2+\left(\frac{y_0}{3}\right)^2=1$，与 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 相似，发现可用三角换元 $x_0=1+4\cos\theta, y_0=3\sin\theta$，将原问题变成了一个比较简单的含参数的最值问题.

思考 参数法是指在解题过程中，通过适当引入一些与题目研究的数学对象发生联系的新变量(参数)，以此作为媒介，再进行分析和综合，从而解决问题. 直线与二次曲线的参数方程都是用参数法解题的例证. 换元法也是引入参数的典型例子.

辩证唯物论肯定了事物之间的联系是无穷的，联系的方式是丰富多彩的，科学的任务就是要揭示事物之间的内在联系，从而发现事物的变化规律. 参数的作用就是刻画事物的变化状态，揭示变化因素之间的内在联系. 参数体现了近代数学中运动与变化的思想，其观点已经渗透到中学数学的各个分支. 运用参数法解题已经比较普遍.

参数法解题的关键是恰到好处地引进参数，沟通已知和未知之间的内在联系，利用参数提供的信息，顺利地解答问题.

“三角换元法”主要是利用已知条件 $S=x^2+y^2$ 与三角公式 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 的联系，用三角换元将代数问题转化为三角函数

值域问题.如:

(1)若 $3x^2+2y^2=2x$,则 x^2+y^2 的最大值为________.

第 9 届(1998 年)试题

解 由 $2y^2=2x-3x^2\geqslant 0$,得 $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$.

$x^2+y^2=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$.

当 $x=\frac{2}{3}$时,x^2+y^2 取得最大值,最大值为$\frac{4}{9}$.

(2)实数 x,y 适合条件 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$,则函数 $2x^2+3xy+2y^2$ 的值域是________.

第 9 届(1998 年)试题

解 由已知 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$,可设 $x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha, 1\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$,则

$$2x^2+3xy+2y^2=2r^2\cos^2\alpha+3r^2\cos\alpha\sin\alpha+2r^2\sin^2\alpha$$

$$=2r^2(1-\sin^2\alpha)+\frac{3}{2}r^2\sin 2\alpha+2r^2\sin^2\alpha=2r^2\left(1+\frac{3}{4}\sin 2\alpha\right).$$

$$2\times 1\times\left[1+\frac{3}{4}(-1)\right]\leqslant 2x^2+3xy+2y^2\leqslant 2\times 2\times\left(1+\frac{3}{4}\times 1\right),$$

所以$\frac{1}{2}\leqslant 2x^2+3xy+2y^2\leqslant 7$.

第 13 讲　正弦定理和余弦定理

一、基础知识

1. 正弦定理

(1)在一个三角形中,各边和它所对角的正弦比相等,并且都

等于该三角形的外接圆的直径，即：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

(2)正弦定理的变式

$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$.

$\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R}$.

$a\sin B=b\sin A, b\sin C=c\sin B, c\sin A=a\sin C$.

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

(3)在$\triangle ABC$中，$\sin A>\sin B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow A>B$.

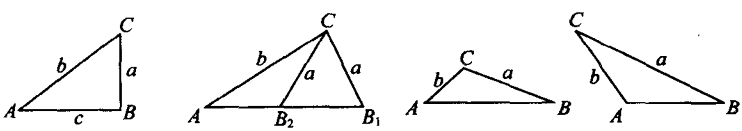
(4)正弦定理的应用

ⅰ已知两角和任意一边，求其他两边和一角；

ⅱ已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，进而可求其他的边和角.

ⅲ已知两边和其中一边的对角解斜三角形有两解或一解(见图 13-1 示).

如已知在$\triangle ABC$中，已知 a，b 和 A 时解三角形的情况.



$a=b\sin A$	$b\sin A<a<b$	$a\geqslant b$	$a>b$
一解	两解	一解	一解

图 13-1

2. 余弦定理

(1)三角形任何一边的平方，等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍，即：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

(2)余弦定理的变化形式

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

(3)余弦定理的应用

ⅰ已知三边求角.

ⅱ已知两边和它们的夹角求第三边.

3. 解斜三角形应用举例

(1)实际问题中的有关名称、术语.

①仰角和俯角:与目标视线在同一铅直平面内的水平视线和目标视线的夹角,目标视线在水平视线上方时叫做仰角,目标视线在水平视线下方时叫俯角.

②方向角:从指定方向线到目标方向线的水平角.

③方位角:从正北方向顺时针旋转到目标方向线的水平角.

(2)解斜三角形应用题的一般步骤为:首先准确理解题意,分清已知与所求;其次根据题意画出图形;最后将要求解的问题归结到一个或几个三角形中,通过合理运用正弦定理、余弦定理等有关知识建立数学模型,然后正确求解.演算过程要算法简练,计算准确,特别是要结合实际,最后作答.

(3)三角形中的有关公式

$p=a+b+c$(p 为三角形的周长);

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah_a$($h_a$ 表示 a 边上的高);

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$(r 为内切圆半径).

二、例题

例 1 如图 13-2 在凹四边形 $ABCD$ 中,$AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$BC=1$,$\angle A=\angle B=\angle C=30°$,则 D 到 AB 的距离为( )

(A)1.　　(B)$\frac{1}{2}$.　　(C)$\frac{1}{4}$.　　(D)$\frac{1}{8}$.

第 3 届(1992 年)试题

解　延长 CD 交 AB 于 E，则 $\triangle BEC$ 是等腰三角形，$\angle BEC=120°$，

因为 $\angle BEC=\angle ADE+\angle DAE=120°$，

$\angle ADE=\angle BEC-\angle DAE=90°$，

所以，$\angle ADC=90°$，则 $\triangle ADC$ 是直角三角形，由图 13-2 观察知 $\angle ACD=30°$，$\angle DAC=$

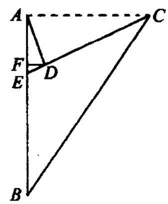


图 13-2

$60°$，于是，$\angle ACB=60°$，$\angle BAC=90°$，从而 $AC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，$AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{4}$.

作 $DF\perp AB$ 于 F，则 $\triangle ADF$ 是直角三角形，所以 $DF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{8}$. 故选(D).

评析　$\triangle BAC$ 是直角三角形，可用余弦定理证明.

事实上，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 30°=\frac{3}{4}+1-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}$，所以 $AC=\frac{1}{2}$.

因此，$\triangle BAC$ 是直角三角形，从而可知 $\angle ACB=60°$，$\angle BAC=90°$，$\angle ACD=30°$，$\angle DAC=60°$.

思考　利用正、余弦定理，对任意凹四边形 $ABCD$ 可以一般性求出 D 到 AB 的距离，留给读者研究.

例 2　$\triangle ABC$ 中，$a=2$，$B=45°$，$S_{\triangle ABC}=4$，则 $\frac{\sin^6 A+2\sin^6 B-3\sin^6 C}{a^6+2b^6-3c^6}=$________.

第 14 届(2003 年)培训题

解　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot 2c\sin 45^\circ=4$，即 $c=4\sqrt{2}$. 由余弦定理，得

$$b^2=2^2+(4\sqrt{2})^2-2\times2\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=20, b=2\sqrt{5},$$

所以$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sqrt{2}/2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{10}}$.

因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，所以$\frac{\sin^6 A}{a^6}=\frac{2\sin^6 B}{2b^6}=\frac{-3\sin^6 C}{-3c^6}$ $=\left(\frac{\sin B}{b}\right)^6=\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)^6=\frac{1}{64000}$.

评析　解三角形问题都是以三角形为载体的. 解三角形问题实质是将几何问题转化为代数问题. 要正确分析题给条件中的边角关系，依据题设条件合理设计解题程序，尤其要注意正、余弦定理的联用.

思考　将正弦定理应用于余弦定理，可得余弦定理的三角形式：

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A,$$
$$\sin^2 B=\sin^2 C+\sin^2 A-2\sin C\sin A\cos B,$$
$$\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C.$$

本题结论可推广为：

$$\frac{\lambda\sin^6 A+\mu\sin^6 B+\nu\sin^6 C}{\lambda a^6+\mu b^6+\nu c^6}=\frac{\sin^6 B}{b^6}=\frac{1}{64000}.$$

例 3　一艘轮船原定在 10 小时后从 A 点到距 A 点 80 海里处，在 A 点正东方向的 B 点，现测得有南偏西30°时速为 $4(\sqrt{3}-1)$ 海里的潮流，该轮船仍要在原定时间内到达 B 点，那么航速应提高到________海里/时，并将航向定为________.

第 11 届(2000 年)试题

解　如图 13-3 所示，潮流速度 $v_1=4(\sqrt{3}-1)$ 海里/时，方向南偏西30°，原定航速 $v_0=\frac{80}{10}=8$ 海里/时，方向正东. 由余弦定理，得

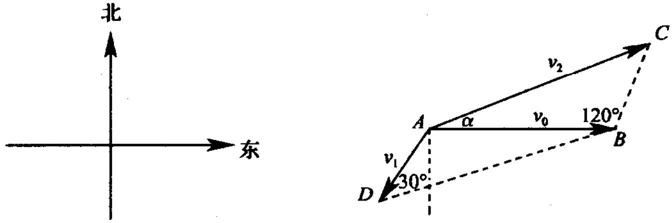


图 13-3

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120°=96$,

所以 $AC=4\sqrt{6}$. 即现在的航速为 $4\sqrt{6}$海里/时.

由正弦定理，得 $\frac{\sin\alpha}{BC}=\frac{\sin 120°}{AC}$，所以 $\sin\alpha=\frac{BC\cdot\sin 120°}{AC}=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，即 $\alpha=15°$.

评析　这是非常典型的一个航海问题，其实质是解三角形. 解题的关键是找对方位角，注意边角的合理转化，联用正、余弦定理解决问题.

思考　应用三角形知识解有关应用问题，不仅要注意三角函数的有界性，还要注意图形及实际问题的限制.

例 4　设 α,β 为锐角，且 $3\sin\alpha=2\sin\beta$, $3\cos\alpha+2\cos\beta=3$，则 $\beta+\frac{\alpha}{2}$的值为（　　）

(A)60°.　　(B)90°.　　(C)120°.　　(D)不定量.

第 14 届(2003 年)培训题

解　由 $3\sin\alpha=2\sin\beta$，得$\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{\sin\beta}{3}$，因为 α,β 都为锐角，所以可

逆用正弦定理，构造$\triangle ABC$，使$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$BC=2$，$AC=3$，

过C作CD垂直AB于D，则

$AB=AD+DB=3\cos\alpha+2\cos\beta=3$，

即$\triangle ABC$为等腰三角形，则

$\angle C=\beta$，$\alpha+2\beta=180^\circ$，$\frac{\alpha}{2}+\beta=90^\circ$，选(B).

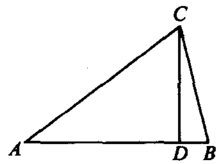


图 13-4

评析　这类问题的常规解法是先求出α，β的正、余弦值，再用二角和的三角公式求出一个三角函数值. 这里根据$\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{\sin\beta}{3}$，联想正弦定理构造三角形，使问题简捷得解.

思考　图形赋于数学问题生动具体的形象. 根据题目的结构特征，逆用正、余弦定理，可类似构造相应图形加以研究，通过图形分析，常可深入认识问题的实质，深刻了解问题条件与结论的联系，挖掘问题的隐含条件，从而得到美妙的数学思维和简捷的解题方法.

数学竞赛中的很多代数问题，一般都以实际问题为背景，而这些背景又可以由几何图形来反映，这时抽象的数量关系完全可以通过构图由它所对应的几何图形直观地表达出来，通过研究其几何特征，我们便可以根据图形的性质来解决它. 如：

(1)证明恒等式 $\cot10^\circ-4\cos10^\circ=\sqrt{3}$.

1993 年俄罗斯圣彼得堡数学竞赛试题

证　在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ABC=30^\circ$，$AC=1$，则$BC=\sqrt{3}$，$AB=2$.

延长CB至D，使$\angle ADB=10^\circ$，则$\angle DAB=20^\circ$，$CD=\cot10^\circ$.

又在$\triangle ABD$中，由正弦定理可得

$\frac{2}{\sin10^\circ}=\frac{BD}{\sin20^\circ}$，

$BD=\frac{2\sin20^\circ}{\sin10^\circ}=\frac{4\sin10^\circ\cos10^\circ}{\sin10^\circ}$

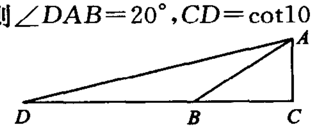


图 13-5

$=4\cos 10°$,

$\therefore \cot 10°-4\cos 10°=CD-BD=BC=\sqrt{3}$.

(2)正数 x,y,z 满足方程组

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{1}{3}y^2=25, \\ \dfrac{1}{3}y^2+z^2=9, \\ z^2+xz+x^2=16. \end{cases}$$

试求 $xy+2yz+3zx$ 的值.

第 18 届全俄中学生数学竞赛试题

分析 方程组中每个式子均是二次齐次式,联想余弦定理和勾股定理,构造三角形求解.

解 将原方程组变形为

$$\begin{cases} x^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2-2x\cdot\dfrac{y}{\sqrt{3}}\cdot\cos 150°=5^2, \\ \left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2=3^2, \\ z^2+x^2-2xz\cos 120°=4^2. \end{cases}$$

由此构造 $\triangle OAB$、Rt $\triangle OBC$, $\triangle OCA$(如图 13-6),

在 $\triangle ABC$ 中,$\because AC^2+BC^2=AB^2$,$\therefore \angle ACB=90°$,

故 $6=S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3zx)$,

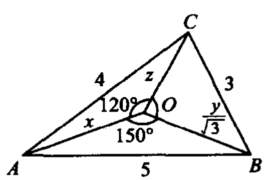


图 13-6

即 $xy+2yz+3zx=24\sqrt{3}$.

构图(解题时不一定要画出具体的图像)的关键在于敏锐的观察和合理的联想,使数、式、形巧妙地结合在一起.

第14讲 平面向量

一、基础知识

平面向量是高中数学新增加内容.向量既有大小又有方向,既能像实数一样进行加减乘除等运算,又有直观的几何意义,是沟通数与形的重要工具.借助于向量工具可以把图形的基本结构转化为向量间的关系,把图形的基本性质转化为向量的和差积商等,从而将几何问题作代数化处理.

1. 向量的有关概念

(1)向量:规定了大小及方向的量称为向量,记作$\overrightarrow{AB}$,其中 A 为向量起点(也称为始点),B 为向量终点.也可记作$\vec{a}$或用黑体字 $\boldsymbol{a}$ 表示.

(2)向量的模:向量$\overrightarrow{AB}$的长度也叫做向量的模,记作$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$.

(3)特殊向量:

①零向量

长度为零的向量,记作 $\mathbf{0}$,零向量的方向不确定,是任意的.

②单位向量

长度等于 1 个单位长度的向量称为单位向量.

(4)向量间的关系:

①相等向量

长度相等且方向相同的向量叫做相等向量,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作:$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

规定所有的零向量都相等.

②平行向量(也称共线向量)

方向相同或相反的非零向量叫做平行向量.如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是非零向

量且方向相同或相反(向量所在直线平行或重合),则可记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$.

规定零向量与任一向量平行.任一向量都与它自身是平行向量.

任一组平行向量都可移到同一条直线上,所以平行向量也叫共线向量.

2. 向量的运算

(1)向量的加减法运算:

利用三角形法则和平行四边形法则.

特殊位置关系的两向量的和:

ⅰ.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

ⅱ.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,当 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$ 时,向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.

ⅲ.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 方向都不相同,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

ⅳ.一般地有 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(2)向量的数乘

向量的数乘即实数与向量的积.实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$.

①$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

②设 λ,μ 为实数,则

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(3)向量的数量积

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 θ,我们把数量积 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积,或点积),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

规定零向量与任一向量的数量积为 0.

3. 向量的坐标表示

(1)平面向量基本定理

如果$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是同一平面内的两个不共线的向量,那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$,有且只有一对实数对 λ_1,λ_2,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

不共线的向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$叫做这个平面内所有向量的一组基底.这两个基底是不惟一的,只要是平面内不共线的两个向量就可以.

(2)向量坐标表示

若 i,j 分别是平面直角坐标系内与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量,则 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$,则 x 叫 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标,y 叫 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

(3)向量坐标公式

若有 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

(4)平面向量的坐标运算

①若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$.

②若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,$\lambda\in\mathbf{R}$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y)$.

(5)向量平行与垂直的坐标表示

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$为非零向量,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

4. 线段的定比分点公式

①若$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,设 $P_1(x_1,y_1)$、$P(x,y)$、$P_2(x_2,y_2)$,则有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的定比分点坐标公式为:$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{cases}(\lambda\neq-1)$.

特别地,当 $\lambda=1$ 时,得到中点坐标公式:$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$

②$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$.

③定比分点的向量公式：

设 P_1，P_2 是直线 l 上的两点，点 P 是 l 上不同于 P_1，P_2 的任意一点，$\overrightarrow{OP_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OP_2}=\boldsymbol{b}$，$P$ 分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成比为 λ，则$\overrightarrow{OP}=\frac{\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$. 特别地当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{OP}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$.

④三角形重心坐标公式

若 $G(x,y)$ 为$\triangle ABC$ 的重心，且 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，则有$\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.\end{cases}$

⑤平面内两点间距离公式$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 特别地 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$（$O$ 是原点）.

5. 平移

(1)图形平移的概念

设 F 是坐标平面内的一个图形，将 F 上所有的点按照同一方向移动同样的长度，得到图形 F'，这一过程叫做图形的平移.

平移会使点的位置、图形的位置发生改变，而图形的形状、大小没有改变.

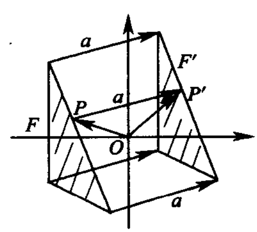


图 14-1

(2)平移公式

设 $P(x,y)$是图形 F 上的任意一点，它在平移后的图像 F'上的对应点为 $P'(x',y')$——可以看出：一个平移实质上是一个向量.

设$\overrightarrow{PP'}=(h,k)$,即:$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}$,所以$\begin{cases}x'=x+h\\ y'=y+k\end{cases}$,这就是点的平移公式.其中$\overrightarrow{PP'}=(h,k)$叫做平移向量.

二、例题

例1　若A、B、C是平面内的任意三点,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$(　　)

(A)$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2)$.　　(B)$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2)-\overrightarrow{BC}^2$.

(C)$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2$.　　(D)$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2)$.

第14届(2003年)试题

解　取特殊点.取$A(0,0)$,$B(1,0)$,$C(2,0)$,则

$\overrightarrow{AB}=(1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(2,0)$,$\overrightarrow{BC}=(1,0)$,$\overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2=1$,$\overrightarrow{AC}^2=|\overrightarrow{AC}|^2=4$,$\overrightarrow{BC}^2=|\overrightarrow{BC}|^2=1$,

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2+0\times0=2$,依次代入四个选项

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2)=\frac{1}{2}(1+4-1)=2$,

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2)-\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{2}(1+4)-1=\frac{3}{2}$,

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2=1+4-1=4$,

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2)=\frac{1}{2}(1+4)=\frac{5}{2}$.

因此选(A).

评析　题设A、B、C是平面内的任意三点,我们选取三个特殊点,将特殊情形下的结果计算出来,排除不符的选项.最后剩下的一个选择项就是正确答案.对于结论是一般性的选择题,这是简单高效的一种求解方法.

思考　1.如果将此题改成证明题,那么,我们可用如下证法:

证　设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为α，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha$

由余弦定理，得

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\alpha$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2)=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2)$

$=\frac{1}{2}[|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\alpha)]$

$=\frac{1}{2}\times2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\alpha=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2. 构造实例和反例是解决一般性数学问题的基本方法之一. 构造实例就是举一个例子说明一个命题可以为真. 而为了说明一个命题不真，常常选择一个符合题设条件但命题结论不成立的例子，这个过程称为构造反例. 选择特殊值或利用极端情形，常常是构造反例的出发点. 上面选的三个特殊点，同时起到了实例和反例的作用. 类似地可解决：

判断如下试题：

(1)如图 14-2，EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线，则在向量$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$、$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$、$\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})$中，与$\overrightarrow{EF}$相等的向量的个数是(　　)

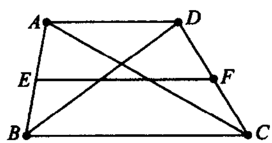


图 14-2

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

第 15 届(2004 年)试题，答案：(D)

(2)在以下关于向量的命题中，不正确的是(　　)

(A)若向量 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，向量 $\boldsymbol{b}=(-y,x)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(B)四边形 $ABCD$ 是菱形的充要条件是$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$.

(C)点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，则$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$

(D)$\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CA}$的夹角等于 $180°-A$.

第 13 届(2002 年)试题,答案:(C)

解 (1)因为向量 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,$\boldsymbol{b}=(-y,x)$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-xy+xy=0$,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,(A)正确.

(2)四边形 $ABCD$ 是菱形,其对边平行且四边相等,于是 $AB/\!/CD$,且 $AB=CD$,$AD=AB$,即$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$.

反过来,若在四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$,

即有 $AB/\!/CD$,且 $AB=CD$,$AD=AB$,所以四边形 $ABCD$ 是菱形,故(B)正确.

(3)表达式明显错误,$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$ 左边是向量,而右边是数量.

(4)在$\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CA}$的夹角,即为 CA 的延长线与 AB 所成的角,即为 $180°-A$,所以(D)正确.

因而选(C).

例 2 如图 14-3,点 D、Q、P 分别在$\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 上,CD 与 PQ 交于点 E,已知 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{CD}=n\overrightarrow{CE}$.又设$\overrightarrow{CA}=x\overrightarrow{CP}$,$\overrightarrow{CB}=y\overrightarrow{CQ}$,试求:$y$ 关于 x 的函数 $y=f(x)$,并指出函数的定义域和值域.

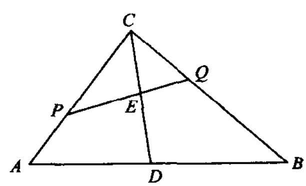


图 14-3

第 15 届(2004 年)备选题

解 设$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,由题设条件,易知

$x>1$,$y>1$,$m>1$,$n>1$,于是

$$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{x}\boldsymbol{a},\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{y}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{m}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=-\frac{1}{m}\boldsymbol{a}+\frac{1}{m}\boldsymbol{b},$$

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{n}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})$

$=\frac{1}{n}(\boldsymbol{a}-\frac{1}{m}\boldsymbol{a}+\frac{1}{m}\boldsymbol{b})=\frac{m-1}{nm}\boldsymbol{a}+\frac{1}{nm}\boldsymbol{b}.$

$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CP}=\left(\frac{m-1}{nm}-\frac{1}{x}\right)\boldsymbol{a}+\frac{1}{nm}\boldsymbol{b},$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{CP}=-\frac{1}{x}\boldsymbol{a}+\frac{1}{y}\mathbf{b}.$

因为 P、Q、E 三点共线，可设$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PQ}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则

$$\begin{cases}\dfrac{m-1}{mn}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\lambda}{x},\\ \dfrac{1}{nm}=\dfrac{\lambda}{y}.\end{cases}$$

消去 λ 得所求函数为

$$y=f(x)=(1-m)x+mn.$$

由 $x>1$，$y>1$ 可确定函数的定义域为$\left(1,\frac{mn-1}{m-1}\right)$.

又函数$f(x)$是区间$\left(1,\frac{mn-1}{m-1}\right)$上的减函数，所以函数 $f(x)$的值域为$(1,mn-m+1)$.

评析　这是以向量知识为载体的几何题.用向量解几何问题的一般思路是：先把已知的结论表示成向量的形式，再通过向量的运算来证明，可以有效地揭示平面图形的位置或数量关系，由定性研究变为定量研究，是数形结合思想的深化与提高.

思考　向量具有二重性，一方面具有“形”的特点，另一方面又具有一套优良的运算性质，因此，对于某些几何命题的抽象的证明，自然可以转化为向量的运算问题来解决.

需要注意的是：设 $P(x,y)$，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则 P 分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比为 $\lambda_1=\frac{x-x_1}{x_2-x}$，$P$ 分$\overrightarrow{P_2P_1}$所成的比为 $\lambda_2=$

$\frac{x-x_2}{x_1-x}$，P_1 分$\overrightarrow{P_2P}$所成的比为 $\lambda_3=\frac{x_1-x_2}{x-x_1}$. 一般情况下，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ 是不等的，因此应用公式时一定要分清起点、分点与终点.

例 3　已知 O 为坐标原点，向量$\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\overrightarrow{OC}=(2,8)$，$\overrightarrow{AB}=(-3\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$(\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq0)$，则$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=$________.

第 15 届(2004 年)培训题

解　如图 14-4，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2,0)+(-3\sqrt{3},3)=(2-3\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2,8)-(2,0)=(0,8)$，

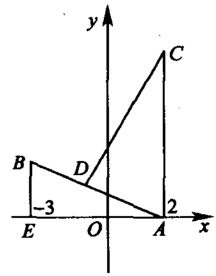


图 14-4

作 $BE\perp x$ 轴于 E 点，则易知 $|\overrightarrow{EA}|=3\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{EB}|=3$，所以$\angle BAE=30°$. 由于$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$(\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq0)$，可知点 D 在线段 AB 上，又 $AC\perp x$ 轴，所以$\angle CAD=60°$. 在直角三角形 ACD 中，$|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\times8=4$.

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle CAD=8\times4\cos60°=16$.

评析　本题的关键是数形结合，求出$\angle CAD=60°$. 用向量方法处理几何问题，是我们学习向量的目的之一，也是向量知识应用的一个重要方面. 向量有良好的运算性质，已内化了一些几何结构，对于处理某些几何问题十分简洁方便，易于将抽象的逻辑推理转化为简便易行的向量运算.

思考　用向量知识解决平几中一些平行，垂直及夹角问题，常用的解题程式：

(1)选择平面内两个不共线的向量为基底；

(2)用基底表示有关向量;

(3)按要求进行必要的运算.

利用向量方法解决几何问题,目的是充分利用向量的运算性质,使几何问题代数化.

例 4　在平面凸四边形 $ABCD$ 中,点 E 和 F 分别在 AD 和 BC 上,且 $\overrightarrow{DE}=\lambda\,\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CF}=\lambda\,\overrightarrow{FB}$ $(\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1)$,用 λ, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\overrightarrow{EF}=$ ________.

第 14 届(2003 年)试题

解　在平面凸四边形 $ABCD$ 中,

$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{DC}$,　(1)

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}$,　(2)

将 $\overrightarrow{DE}=\lambda\,\overrightarrow{EA}=-\lambda\,\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FC}=-\lambda\overrightarrow{FB}$,代入(1)式得

$-\lambda\,\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}-\lambda\,\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DC}$,(3)

(3)+(2)×λ,得

$(1+\lambda)\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DC}+\lambda\,\overrightarrow{AB}$

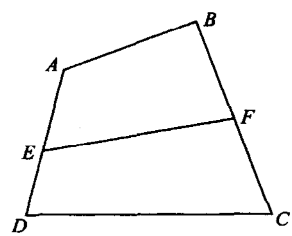


图 14-5

因为 $\lambda\neq-1$,所以 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{\overrightarrow{DC}+\lambda\,\overrightarrow{AB}}{1+\lambda}(\lambda\neq-1)$.

评析　根据向量的一个基本性质:封闭折线按同一方向的向量和为零.本题先列出关系式(1)、(2),再利用已知条件求出答案.求解向量的问题,一定要熟练掌握向量的有关性质.

思考　本题的结果从结构上看与定比分点公式一样,这启发我们思考:

(1) $|\overrightarrow{EF}|=\dfrac{|\overrightarrow{DC}|+\lambda|\overrightarrow{AB}|}{1+\lambda}(\lambda\neq-1)$?

当 $\overrightarrow{DC}/\!/\overrightarrow{AB}$ 时结论显然成立.那么当 $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ 不平行时,结论怎么样,留给读者自行探索.

当 A, B 重合时, $|\overrightarrow{EF}|=\dfrac{|\overrightarrow{DC}|}{1+\lambda}(\lambda\neq-1)$,这是三角形中已证明

的结论.

(2)本题的结论可类比推广到空间中.

(3)你发现过与本题的结论类似的其他结论吗?

第15讲 整数问题

一、基础知识

1. 设 a,b,c 均为非零整数,

a,b 的最大公约数,记作(a,b). 如$(12,18)=6$.

a,b 互质,记作$(a,b)=1$.

a 可整除 b,记作 $a|b$,如 $12|36$.

(1)若$(a,b)=1$,且 $a|bc$,则 $a|c$.

(2)若$(a,b)=1$,且 $a|c$,$b|c$,则 $ab|c$.

(3)若 p 为素数,且 $p|ab$,则 $p|a$ 或 $p|b$.

2. 整系数二元一次不定方程 $ax+by=c$ 有整数解的充要条件是$(a,b)|c$.

3. 若$(a,b)=1$,(x_0,y_0)是整系数二元一次不定方程 $ax+by=c$ 的一组整数解,则方程的一切整数解可以表示为

$$\begin{cases}x=x_0+bt,\\ y=y_0-at.\end{cases}(t\in\mathbf{Z})$$

二、例题

例 1 一密码员设计了给自然数编码的一种方法:先把此自然数表示成 5 进制,然后将 5 进制表示中出现的数字与集合$\{V,W,$

$X,Y,Z\}$的元素建立一个一一对应，按照此对应他发现三个递增的相邻的十进制自然数被编成 VYZ,VYX,VVW，则被编成 $VWXYZ$ 的数的十进制表示的是__________.

第 13 届(2002 年)培训题

解 设与 V,W,X,Y,Z 对应的数字为 p,q,r,s,t，则 $p,q,r,s,t\in\{0,1,2,3,4\}$.

由于递增的三个相邻自然数被编成 VYZ,VYX,VVW，所以

$$\begin{cases}25p+5s+t=25p+5s+r-1,\\25p+5s+r=25p+5p+q-1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}t=r-1,\\5(p-s)=r-q+1.\end{cases}$$

因为被编成 VYX,VVW 的自然数是递增的，所以 $p>s$. 知 $5|r-q+1$，$r-q+1>0$，所以 $r-q+1=5$，$p-s=1$，所以 $r=4$，$q=0$，$t=3$. 于是

$p,s\in\{1,2\}$，所以，$p=2$，$s=1$.

被编成 $VWXYZ$ 的数用十进制表示的数是 $2\times5^4+0\times5^3+4\times5^2+1\times5+3=1358$.

评析 通过自然数编码这一载体，本题将整数的五进制与十进制表示方法和对应思想，以及解简单的不定方程的技巧融于一体，求解过程实际上是一种破解密码的过程.

思考 掌握不定方程的一些技巧，对解答这一类问题是很有益的. 本题容易推广到其他进制与十进制的问题，不具体写出了.

例 2 设 $2003=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为两两不相等的非负整数，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ ________.

第 14 届(2003 年)试题

解 用排序法. 不妨设 $a_1>a_2>\cdots>a_n$，由于 $2^{10}<2003<2^{11}$，故 $a_1=10$，$2^{a_2}+2^{a_3}+\cdots+2^{a_n}=2003-2^{a_1}=979$，类似地由 $2^9<979<2^{10}$，得 $a_2=9$；依次类推，得 $a_3=8$，$a_4=7$，$a_5=6$，$a_6=4$，$a_7=1$，$a_8=0$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=45$.

评析 本题的背景是自然数的二进制表示问题. 上面的结论

$$2003=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^1+2^0,$$

说明 2003 可用二进制表示为:$2003=(11111010010)_2$.

思考 (1)可以将 2003 表示为三、四进制表示的数:$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$为两两不相等的非负整数,且

$2003=3^{a_1}+3^{a_2}+\cdots+3^{a_n}+a_{n+1}$,

$2003=4^{a_1}+4^{a_2}+\cdots+4^{a_n}+a_{n+1}$.(留给读者思考)

(2)为了求出两两不相等的非负整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,我们先设 $a_1>a_2>\cdots>a_n$,将它们排序,这种通过把所要讨论的元素依某种顺序排列起来以完成解题的思想,称为排序原则.

如果一个数学问题中涉及到一批可以比较大小的元素(如:实数、线段、角、面积等),题设中并没有规定它们之间的大小顺序.解题时,我们将其按某种顺序关系(如本题实数的大小、线段的长短等)依次排列起来,对问题的解决常常是有益的.

对于几何中一些抽象的元素,如 n 个点,本身并无明显的顺序可循,要把它们排列起来,就要借助某种辅助手段:如任意作一条直线后,就可按这 n 个点到此直线的距离的大小排列起来;也可以作一条以某点 A 为端点的射线,将这 n 个点分别与 A 相连,得到 n 个角,然后依这 n 个角的大小把点依次排列.

要注意的是,赋予所考虑对象某种顺序是有条件的:它不能使所讨论的问题失去一般性.

例 3 函数 $y=f(x)$中的 x 与 $f(x)$都是正整数,并且对于任意的正整数 x,都有

$f(x)+f(x+2)\leqslant 2f(x+1)$,$f(x)<2000$,

求证 存在正整数 m,使得当 $x\geqslant m$ 时,$f(x)$是常数.

第 11 届(2000 年)试题

解 (1)假设存在正整数 t,使 $f(t)>f(t+1)$,那么 $f(t+2)\leqslant 2f(t+1)-f(t)\leqslant f(t+1)$.

同理可得

$$f(t)>f(t+1)>\cdots>f(t+n)>\cdots$$

因为对于任意的 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\in\mathbf{N}^*$. 所以

$$f(t)\geqslant f(t+1)+1\geqslant f(t+2)+2\geqslant\cdots\geqslant f(t+n)+n\geqslant\cdots.$$

设 $f(t)=k$，则 $k=f(t)\geqslant f(t+k)+k$，得 $f(t+k)\leqslant 0$，这与 $f(x)\in\mathbf{N}^*$ 矛盾. 所以假设不成立，即对于任意 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\leqslant f(x+1)$.

(2)如果对于任意的 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\neq f(x+1)$，那么由(1)可知

$$f(1)<f(2)<\cdots<f(n)<\cdots,$$

$$f(1)\leqslant f(2)-1\leqslant\cdots\leqslant f(n)-n+1\leqslant\cdots$$

又 $f(1)\in\mathbf{N}^*$，所以 $f(2000)\geqslant f(1)+1999\geqslant 2000$，这与已知的 $f(x)<2000$ 矛盾. 因此总存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $f(m)=f(m+1)$.

由已知 $f(m+2)\leqslant 2f(m+1)-f(m)=f(m+1)$，而(1)中已证明 $f(m+2)\geqslant f(m+1)$，从而

$$f(m+1)=f(m+2)=f(m+3)=f(m+4)=f(m+5)=\cdots$$

故对于 $x\geqslant m$ 时，$f(x)=f(m)$是常数.

评析 要证明当 $x\geqslant m$ 时，$f(x)$是常数. 这里进行反面思考：从否定 $f(x)$不是常数入手，否定假设存在正整数 t，使 $f(t)>f(t+1)$，从而有 $f(t)<f(t+1)$，进而导出与已知矛盾的结论. 使问题顺利得解.

思考 反面思考是一种间接的解题策略. 当我们面临的问题从正面难以入手时，要及时改变思考问题的角度，不妨从问题的反面进行思考，以便化难为易解出原题. 反面思考从习惯思路相反的方向去思考问题和分析问题，常用的途径有：顺推有困难时，可以考虑逆推；直接求解有困难时，可以考虑间接求解；直接证明有困难时，可以考虑间接证明；肯定命题有困难时，可以考虑否定命题.

例 4 方程 $(x^2-x-1)^{x+2}=1$ 的整数解的个数是( )

(A)1. (B)3. (C)4. (D)5.

第 7 届(1996 年)试题，第 10 届(1999 年)试题

解 所求解集为如下三个问题的整数解集的并集

$x^2-x-1=1$；$\begin{cases}x^2-x-1=-1\\ x\text{ 偶数}\end{cases}$；$\begin{cases}x^2-x-1\neq 0\\ x+2=0\end{cases}$

解集依次为$\{-1,2\}$；$\{0\}$；$\{-2\}$，选(C).

评析　形如$[f(x)]^{g(x)}=1$的方程求整数解，必须讨论如下一些情形：

$\begin{cases}f(x)=1,\\ g(x)\text{有意义},\end{cases}$ $\begin{cases}f(x)=-1,\\ g(x)\text{是偶数},\end{cases}$ $\begin{cases}f(x)\neq 0,\\ g(x)=0.\end{cases}$

思考　形如$[f(x)]^{g(x)}=-1$的方程求整数解，只须讨论情形：
$\begin{cases}f(x)=-1,\\ g(x)\text{是奇数}.\end{cases}$

下面有二个与上类似的问题，留给读者思考.

(1)我国在使用公元纪年的同时，也一直沿用我国古代创立的干支纪年法，如甲午战争中的甲午，辛亥革命中的辛亥就是年份的名称. 干支中的干是天干的简称，是指：甲乙丙丁戊己庚辛壬癸；支是地支的简称，是指：子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥. 在纪年时，同时分别从甲、子开始，不改变各自的顺序，循环往复下去. 已知公元2001年是辛巳年，那么下一个辛巳年是公元____年，距公元2001年最近的甲子年是公元____年.

第12届(2001年)试题，答案：2061；1984.

(2)已知函数$f(n)=k$，k是循环小数$0.\dot{9}1827364\dot{5}$的小数点后的第n位数字，则$\underbrace{f\{f\cdots f[f(1)]\}}_{1996\text{个}f}$的值为(　　)

(A)9.　　(B)7.　　(C)3.　　(D)4.

第7届(1996年)试题，答案：(D)

例5　(1)坐标为整数的点称为整点. 由x轴、直线$x=3$与抛物线$y=x^2$围成的区域(含边界)内的整点数是(　　)

(A)11.　　(B)14.　　(C)17.　　(D)18.

第9届(1998年)山西、江西、天津赛区试题

解 区域内横坐标分别为 0,1,2,3 的整点分别有 1,2,5,10 个,故共有 18 个,选(D).

(2)在平面直角坐标系内,坐标都是整数的点叫整点. 在以(0,0)、(n,n)、$(2n,0)$($n\in\mathbf{Z}^+$)为顶点的三角形内有________个整点.

第 2 届(1991 年)试题

解 因为题设整点在三角形内,不包括周界上的点,先分析 $n=1,2,3,\cdots$的情形:$n=1$ 时,0 个;$n=2$ 时,1 个;$n=3$ 时,2 个;…. 所以共有$(n-1)^2$ 个整点.

评析 整点(也称为格点)问题,是数学竞赛中经常出现的一种题型. 常涉及到整点的计数,整点的存在性,整点多边形与面积,整点的染色等. 这类问题求解难度较大,解决它们要用到整数的性质及数论、组合几何、图论等知识. 求解这类问题的关键,是对问题进行正确的分类.

解题时常用到整数的如下一些性质:

性质 1 任一整点 P 关于整点 A 的对称点 Q 也是整点.

性质 2 若平行四边形有三个顶点为整点,则另一顶点也为整点.

性质 3 整点多边形(指顶点都是整点的多边形)的面积必为整数或半整数(指形如$\frac{n}{2}$的数,这里 n 是整数).

思考 (1)由 x 轴、直线 $x=n$ 与抛物线 $y=x^2$ 围成的区域(含边界)内的整点数是多少?

由于区域内横坐标分别为 k 的整点分别有 k^2+1 个,因此可求出整点数公式为$\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6)$.

(2)整点多边形的整点数和面积是否有关系?能否用整点数估算整点多边形的面积?

结论是成立的.

(Pick 定理)设整点多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内部的整点数为 p,边界

上的整点数为 q，则整点多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积为 $p+\frac{q}{2}-1$.

下面仅给出整点三角形时的证明，一般情形，可用数学归纳法证明，略去.

证明 整点三角形依其形状可分为三类：

第一类：有两条边分别平行于坐标轴，此时$\triangle ABC$是直角三角形(如图 15-1 所示)，

这一类$\triangle ABC$可用平行于坐标轴的矩形"箍"起来，且矩形至少一个顶点与三角形顶点重合.

第二类：只有一条边平行于坐标轴，这类三角形又分锐角三角形和钝角三角形两种(如图 15-2，图 15-3 所示)，

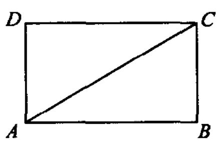


图 15-1

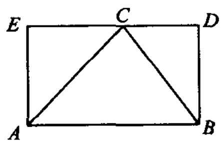


图 15-2

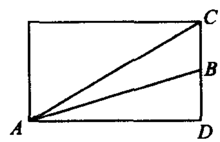


图 15-3

如图 15-2 所示，$\triangle ABC$面积$=\triangle BCD$面积$+\triangle ACE$面积；

如图 15-3 所示，$\triangle ABC$面积$=\triangle ADC$面积$-\triangle ADB$面积.

这样第二类三角形都可以转化为第一类三角形加以研究.

第三类：三条边皆不平行于坐标轴，这时又可分为如下两种情况：

如图 15-4 所示，$\triangle ABC$面积$=$矩形$ADEF$面积$-\triangle ACF$面积$-\triangle ADB$面积$-\triangle BEC$面积，

如图 15-5 所示，$\triangle ABC$面积$=\triangle ADC$面积$-\triangle ABD$面积$-\triangle BCD$面积，

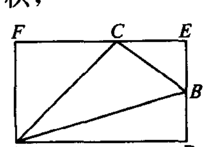


图 15-4

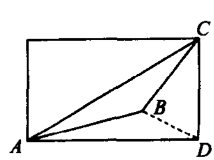


图 15-5

于是第三类三角形也可以转化为第一类三角形加以研究.

综合以上，我们只要对第一类三角形证明结论成立，就可以推出第二类、第三类也成立(讨论细节留给读者完成).

如图15-1，设AB，BC及AC内部分别有a，b和c个整点，A，B，C都是整点，则容易求出$AB=a+1$，$BC=b+1$，

所以，$2S_{\triangle ABC}=$矩形$ABCD$的面积$=(a+1)(b+1)=ab+a+b+1$.

由所设知，ab恰好等于矩形内部的整点数，即

$ab=\triangle ABC$内部的整点数$+\triangle ACD$内部的整点数$+AC$内部的整点数$=2p+c$. 又A，B，C都是整点，所以$q=a+b+c+3$.

$2S_{\triangle ABC}=2p+a+b+c+1=2p+q-2$，$\triangle ABC$的面积为$p+\frac{q}{2}-1$.

(3)我们还可以把整点的概念推广：如果$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n维(元)有序数组，且$x_1,x_2,\cdots,x_n$中的每一个数都是整数，则称$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个n维整点(整点又称格点).

如果对所有的n维整点按每一个x_i的奇偶性来分类，由于每一个位置上有奇、偶两种可能性，因此共可分为$2\times2\times\cdots\times2=2^n$个类. 这是对$n$维整点的一种分类方法. 当$n=3$时，$2^3=8$，此时可以构造命题："任意给定空间中9个整点，求证它们之中必有两点存在，使连接这两点的直线段的内部含有整点". 这就是1971年的美国普特南数学竞赛题. 在$n=2$的情形，也可以构造如下的命题："平面上任意给定5个整点，则它们连线段中点为整点"的4个命题中，为真命题的是：

(A)最少可为0个，最多只能是5个.

(B)最少可为0个，最多可取10个.

(C)最少为1个，最多为5个.

(D)最少为1个，最多为10个.

(答案(D))

例6 自然数k的各位数字和的平方记为$f_1(k)$，且$f_n(k)=$

$f_1[f_{n-1}(k)]$,则 $f_n(11)(n\in\mathbf{N}^*)$的值域为(　　)

(A)$\mathbf{N}^*$.　　　　(B)5.

(C)$\{4,16,49,169,256\}$.　　　　(D)$\{2,4,7,13,16\}$.

第 14 届(2003 年)试题

解　因为 $f_1(11)=(1+1)^2=4$;$f_2(11)=f_1(4)=4^2=16$;$f_3(11)=f_1(16)=(1+6)^2=49$;$f_4(11)=f_1(49)=(4+9)^2=169$;$f_5(11)=f_1(169)=(1+6+9)^2=256$;$f_6(11)=f_1(256)=(2+5+6)^2=169$;…,下面就陷入 169～256 的循环圈,所以 $f_n(11)(n\in\mathbf{N}^*)$的值域为$\{4,16,49,169,256\}$,选(C).

评析　本题的背景是“数字黑洞”,所谓数字黑洞系指某些整数经过反复的特定运算最终归一或归于某个循环圈的情形.

思考　重复某些数字运算都会产生类似有趣数字黑洞现象.如:

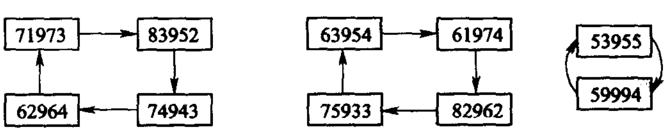
(1)卡布列克运算

任给一个四位数(其各位数字不完全相同),先将它依数字大小顺序排成一个新的四位数,然后减去这个四位数的倒序,如此称为一步卡布列克运算.将每步运算所得的数差再反复重复上述运算,经有限步后结果必为 6174.

比如:$2126\to6221-1226=4995\to9954-4599=5355\to5553-3555=1998\to9981-1899=8082\to8820-0288=8532\to8532-2358=6174$,

倘若接着运算下去,其结果依然为 6174.

而五位数的卡布列克运算经有限步骤后进入下面三种循环之一:



至于六位数的卡布列克运算经有限步骤后或为 549945,或为 631764 或进入下面循环:

$$\begin{tikzcd} \boxed{851742} \arrow[r] & \boxed{750843} \arrow[r] & \boxed{840852} \arrow[r] & \boxed{860832} \arrow[d] \\ \boxed{420876} \arrow[u] & & \boxed{642654} \arrow[ll] & \boxed{862632} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

更高位数的卡氏运算也有规律，这里不多谈了.

(2)角谷游戏

二次大战期间，美国一个叫叙古拉的小镇流传一种数字游戏，后来它被传到欧洲，且在那儿风靡一时；尔后又被日本人角谷带到了日本，人称“角谷游戏”. 内容是这样的：

任给一个自然数，若它是偶数则将它除以 2；若它是奇数，则将它乘以 3 再加 1. 反复重复这种运算，经有限步之后其结果必为 1.

顺便讲一句：这个貌似简单的结论至今未能给出严格证明，尽管有人利用电子计算机对 $1\sim7\times10^{11}$ 的所有整数核验无一例外.

(3)数字平方、立方和

将任一自然数的各位数字平方求和，再对所求之和重复上述运算，经有限步骤后结果或为 1，或进入下面的循环：

$$\begin{tikzcd} 58 \arrow[r] & 89 \arrow[r] & 145 \arrow[r] & 42 \arrow[r] & 20 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 16 \arrow[r] & 37 \arrow[lllllll, bend left] \end{tikzcd}$$

对于求数字立方和运算（步骤同上），由于所给自然数 n 的不同，运算结果也不一样（有 9 种），然而其“命运”却是殊途同归：进入“黑洞”（见下表）.

数字立方和运算结果表

所给自然数 n 的类型	运算结果
$3k$	153
$3k+1$	1,370,136 $\rightleftarrows$ 244,919 $\rightleftarrows$ 1459, 250—133—55,127—352—160,
$3k+2$	371,407

对于上述运算过程中发现的等式

$1^3+5^3+3^3=153$，$3^3+7^3+0^3=370$，

$3^3+7^3+1^3=371$，$4^3+0^3+7^3=407$，

人们将这四个数誉以“水仙花数”的美称.

第16讲　抽屉原理及其他

一、基础知识

1. 抽屉原理

“抽屉原理”最先是由19世纪的德国数学家迪里赫莱(Dirichlet)运用于解决数学问题的，所以又称“迪里赫莱原理”，也有称“鸽巢原理”，“重叠原则”. 这个原理可以简单地叙述为“把10个苹果，任意分放在9个抽屉里，则至少有一个抽屉里含有两个或两个以上的苹果”. 这个道理是非常明显的，但应用它却可以解决许多有趣的问题，并且常常得到一些令人惊异的结果. 抽屉原理是国际国内各级各类数学竞赛中的重要内容，它的内容可以用形象的语言表述为：把 m 个东西任意分放进 n 个空抽屉里($m>n$)，那么一定有一个抽屉中至少放进了2个东西.

抽屉原理有如下几种情形.

抽屉原理①：把 $n+1$ 件东西任意放入 n 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有两件东西.

抽屉原理②：把 m 件东西放入 n 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里至少有$\left[\frac{m}{n}\right]$(表示不超过$\frac{m}{n}$的最大整数)件东西.

抽屉原理③：如果有无穷件东西，把它们放在有限多个抽屉

里，那么至少有一个抽屉里含无穷件东西.

2. 对策问题

它要求在给定的规则要求前提下，采取策略以战胜对手，获得最佳效果. 解对策问题的关键，是要找出游戏过程中的临胜策略和平衡状态，以不变应万变，让对方总是处于平衡状态，直到自己达到临胜状态.

3. 染色问题

染色问题实质上是通过染色对问题进行分类，再研究其性质.

4. 算法问题

算法是有步骤地解决某一类问题的程序. 新的数学课程十分重视算法的教学，已把计算机算法融入各个相关的部分. 数学问题与计算机科学相结合，渗透信息技术与算法思想的试题正成为数学竞赛与高考试题的新亮点. 算法是中国数学的强项.

二、例题

例 1　设函数 $f(n)=k$，其中 n 是自然数，k 是无理数 $\pi=3.1415926535\cdots$ 小数点后第 n 位的数字，并且规定 $f(0)=3$，记

$$F_n=\underbrace{f\{f\{f\cdots f\{f}_{10\text{个}f}(n)\}\cdots\}\}$$

求证：$F[f(1990)+f(5)+f(13)]=F[f(1990)f(5)f(13)]$.

第 1 届(1990 年)试题

解　由题意知，对任意 n，$f(n)=k$ 是一个定义在非负整数集，取值在 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 上的函数.

设 $f_2(n)=f[f(n)]$，$f_3(n)=f[f_2(n)]$，$f_k(n)$ 表示 f 的 k 次复合.

则 $f_k(n)$ 是定义在 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 上，且在 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 内取值的函数.

依次取值情况列表如下：

$f_1(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_2(n)$	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
$f_3(n)$	1	1	5	1	9	3	4	2	9	1
$f_4(n)$	1	1	9	1	3	1	5	4	3	1
$f_5(n)$	1	1	3	1	1	1	9	5	1	1
$f_6(n)$	1	1	1	1	1	1	3	9	1	1
$f_7(n)$	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1
$f_8(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_9(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_{10}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

于是,对任意非负整数 n,都有

$$F_n=\underbrace{f\{f\{f\cdots f\{f}_{10\text{个}f}(n)\}\cdots\}\}=1$$

由于 $f(1990)+f(5)+f(13)$ 和 $f(1990)f(5)f(13)$ 都是非负整数,所以

$$F[f(1990)+f(5)+f(13)]=F[f(1990)f(5)f(13)]$$

评析 列表法是给出函数的一种方法,讨论 $f_1(n)$ 时我们没有具体研究 n 和 $f_1(n)$ 的关系,直接列出

$f_1(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

这给解题带来了方便.本题的背景是周期函数列问题.

思考 本题可以将“函数 $f(n)=k$”,改为“$f(n+1)=k$”,结论不变.

也可以引申到高维的情形,如二维:

设函数 $f(n,m)=10k+t$,其中 n,m 是自然数,k,t 是无理数 $\pi=3.1415926535\cdots$小数点后第 n,m 位的数字,并且规定 3 表示小数点后 0 位的数字,记

$$f_p(n,m)=\underbrace{f\{f\{f\cdots f\{f}_{p\text{个}f}(n,m)\}\cdots\}\}$$

$f_k(n,m)$是定义在$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\cdots,99\}$上，且在$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\cdots,99\}$内取值的函数，则$\{f_p(n,m)\}$是周期函数列.

根据抽屉原理，$f_{101}(n,m)=f_q(n,m)(1\leqslant q\leqslant 100)$. 于是

$f_{k+101-q}(n,m)=f_k(n,m)$，即$\{f_p(n,m)\}$是周期函数列，$101-q$是它的一个周期.

例 2　任给 1001 个绝对值小于 1 的实数，证明：其中必有两个实数 x,y，能使下面的不等式成立：

$$\sin\frac{499\pi}{1000}<xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}<1$$

第 2 届(1991 年)试题

证明　将 1001 个绝对值小于 1 的实数看做是区间$(0,\pi)$上 1001 个不同角的余弦值，将区间$(0,\pi)$分为 1000 个长度为$\frac{\pi}{1000}$的彼此不相交的子区间：

$$\left(0,\frac{\pi}{1000}\right],\left(\frac{\pi}{1000},\frac{2\pi}{1000}\right],\left(\frac{2\pi}{1000},\frac{3\pi}{1000}\right],\cdots,\left(\frac{999\pi}{1000},\pi\right).$$

根据抽屉原理，1001 个在区间$(0,\pi)$上的角分属于这 1000 个子区间，其中必有两个角 $\alpha,\beta(\alpha>\beta)$落在同一子区间中，即其差在 0 与$\frac{\pi}{1000}$之间，则 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{1000}$，于是，

$$\cos 0>\cos(\alpha-\beta)>\cos\frac{\pi}{1000}$$

由于 $\cos 0=1,\cos\frac{\pi}{1000}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{1000}\right)=\sin\frac{499\pi}{1000}$,

而这两个角的余弦对应着 1001 个实数中的 2 个实数 x,y，则由 $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$, 得 $\sin\frac{499\pi}{1000}<\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta<1$，即：

$\sin\frac{499\pi}{1000}<xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}<1$.

评析 本题应用了抽屉原理.应用抽屉原理解题的基本思路是:利用抽屉原理把范围缩小,使之能在一个特定的小范围内考虑问题,使问题变得简单而明确.根据不同问题的自身特点,洞察问题本质,先要弄清楚对那些元素分类,再找出分类的规律,即构造抽屉.如何利用题中已知条件构造出与题设密切相关的“抽屉”,是用抽屉原理解题的关键,也是难点.

思考 抽屉原理的内容简明朴素,易于接受,它在解决数学问题中有重要的作用.如:1958 年 6/7 月号的《美国数学月刊》上有这样一道题目:

证明 在全世界所有人中任选六个人,其中一定有三个人,他们之间或者互相认识,或者互相不认识.

证明 从 6 个人中任一个人记为 A,则其余 5 个同 A 或者认识,或者不认识,据抽屉原理:其中必有三个人同 A 认识,或者不认识;

若有三个人同 A 认识,则这三个人或者互不认识,则结论成立.或者有两个人相互认识,则这两个人同 A 三人互相认识.

若有三个人同 A 不认识,则这三个人或者互相认识,则结论成立,或者有两个人互不认识,则这两个人同 A 三人互不认识.结论成立.

这个问题也可以用如下方法简单明了地证出:

在平面上用 6 个点 A、B、C、D、E、F 分别代表参加集会的任意 6 个人.如果两人以前彼此认识,那么就在代表他们的两点间连成一条红线;否则连一条蓝线.考虑 A 点与其余各点间的 5 条连线 $AB,AC,\cdots,AF$,它们的颜色不超过 2 种.根据抽屉原理可知其中至少有 3 条连线同色,不妨设 AB,AC,AD 同为红色.如果 BC,BD,CD 这 3 条连线中

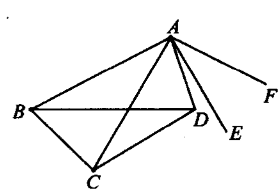


图 16-1

有一条(不妨设为 BC)也为红色，那么三角形 ABC 是一个红色三角形，A、B、C 代表的 3 个人以前彼此相识：如果 BC、BD、CD 这 3 条连线全为蓝色，那么三角形 BCD 是一个蓝色三角形，B、C、D 代表的 3 个人以前彼此不相识. 不论哪种情形发生，都符合问题的结论.

六人集会问题是组合数学中著名的拉姆塞定理的一个最简单的特例，这个简单问题的证明思想可用来得出另外一些更深刻的结论. 这些结论构成了组合数学中的重要内容——拉姆塞理论. 从六人集会问题的证明中，我们又一次看到了抽屉原理的应用.

六人集会问题拓广　十七个科学家，其中每一个和其他所有的人都通信. 在他们的通信中，只讨论三个题目，而且每两个科学家之间只讨论一个题目. 求证：至少有三个科学家相互之间在讨论同一个题目.

证明　在 17 位科学家中任选一位，记为 A，则 A 至少与其余 16 位科学家中的$\left[\frac{16-1}{3}\right]+1=6$ 位科学家讨论同一题目，记为题目 1，若这 6 位科学家中有两位科学家在讨论题目 1，则结论成立；若这 6 位科学家都不讨论题目 1，则他们只能讨论另外两题目，据抽屉原理：他们中至少有 3 位科学家在讨论同一题目. 从而知结论也成立.

抽屉原理这一最简单的思维方式，常常结合几何、整除、数列和染色等问题出现，在解题过程中却可以演变出很多奇妙的变化和颇具匠心的运用.

例 3　已知函数 $f(x)=a\sin^2 x+b\sin x+c$，其中 a、b、c 是非零实数，甲、乙两人做一游戏：他们轮流确定系数 a、b、c(如甲令 $b=1$，乙令 $a=-2$，甲再令 $c=3$)后，如果对于任意实数 x，$f(x)\neq 0$，那么甲得胜；如果存在实数 x，使 $f(x)=0$，那么乙得胜. 甲先选数，他是否有必胜策略？为什么？如果 a、b、c 是任意实数，结论如何？为什么？

第 8 届(1997 年)试题

解　(1)如果 a、b、c 是非零实数,那么甲有必胜策略:甲先选 $b=1$,不论乙选 a 或 c,甲总可再选 c 或 a,使 $1-4ac<0$,从而方程无解.

(2)如果 a、b、c 可以是任意实数,那么策略:

若甲先选 a 或 b,乙可选 $c=0$,这时 $x=0$ 必是方程 $f(x)=0$ 的根.

若甲先选 c,$c=0$ 时显然方程有解 $x=0$,乙胜.这不可取.

$c\neq0$,则乙可选 $a=-c$,这时 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)=(a-b-a)(a+b-a)=-b^2\leqslant0$

所以 $f(x)=0$ 必有 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内的实根,即甲不论再选 b 为何值,乙总能获胜.

评析　这是以游戏活动的形式出现的对策问题.这类问题首先要看清题目,正确理解.层层深入分析问题,设计获胜策略.

思考　在设计的问题情景中,游戏规则是可以变化的.如改为:如果对于任意实数 x,$f(x)>0$,那么甲得胜;如果存在实数 x,使 $f(x)<0$,那么乙得胜.

例 4　长方体的长、宽、高分别是 1990m,1991m,1992m,把它剖分为 $1990\times1991\times1992$ 个棱长为 1m^3 的正方体,每个正方体看做一个房间,两个房间如果有一个公共面,则称它们是相邻的,在其中一个房间里关着一只小鸟,当管理员打开相邻的一个房间后,小鸟就飞入新的房间.这只小鸟有记忆能力,总不飞入它曾经住过的房间,现有甲、乙两个孩子,轮番打开与小鸟居住的房间相邻的房间,让小鸟搬家,每人每次只允许打开一个新的房间让小鸟飞入,设甲先打开第一个房间.规定胜负的标准是:谁不能让小鸟搬家,谁就失败.问:甲、乙两人谁有必胜的策略?这个人应当怎么办才能保证自己胜利?如果长方体长、宽、高分别是 1991m,1992m,1993m,情况又怎样?如果长方体长、宽、高分别是 1989m,1991m,1993m,情况又怎样?

第 3 届(1992 年)试题

解　首先,棱长为整数的长方体,只要有一条棱长是偶数,该长方体就可以完全分割为由两个相邻的小正方体联在一起的 $1\times 1\times 2$ 的小块(完全分割的意思是说用 $1\times 1\times 2$ 的小块可以不重迭,不留洞地拼合成原来的长方体,见图 16-2).

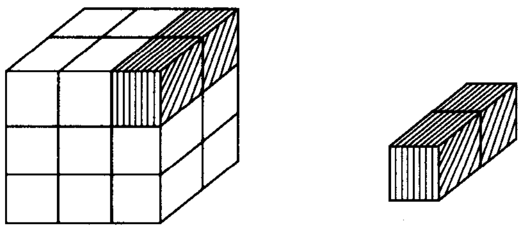


图 16-2

因为 $1990\times 1991\times 1992$ 的棱长中含有偶数,所以该长方体可以被 $1\times 1\times 2$ 的小块完全分割.设小鸟最初在某个 $1\times 1\times 2$ 的小块中的一个小正方体房间内,甲只要打开同一个 $1\times 1\times 2$ 的小块的另一个房间,让小鸟飞入,则乙只能去寻找一个新的小块中的一个房间,只要乙找到了可以让小鸟搬家的房间,甲就打开与乙刚找到的房间处在同一个 $1\times 1\times 2$ 的小块上的另一个房间,以后,乙只能再找新的小块,…,只要乙能让小鸟搬家,则甲一定能让小鸟搬家.由于房间数目有限,所以甲最终获胜.

同理,如果长方体是 $1991\times 1992\times 1993$ 的情形,甲最终也有获胜策略.

如果长方体是 $1989\times 1991\times 1993$ 的情形,先对长方体被剖分的小正方体间隔染色(如图 16-3 所示).并指出,图 16-3 中有色的小正方体数目比无色的小正方体数目多 1.容易看出,去掉任何一个有色小正方体后,剩下的小正方体有 $1989\times 1991\times 1993-1$ 个,它们可实现被 $1\times 1\times 2$ 的小块的完全分割.

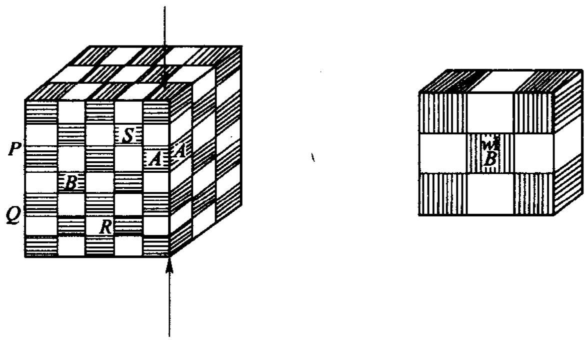


图 16-3

这只要分两种情况来看,如果去掉了跨棱的一个染色的小正方体(例如图 16-3 左),则箭头所指的那一串自然可被 $1\times1\times2$ 的小块完全分割.除去这一串外,其余的长方体是由至少一条边长为偶数的三个长方体拼成的,因此也可以被 $1\times1\times2$ 的小块完全分割,如果去掉的那个有色小正方体不是跨棱的,例如图 16-3 左中的 B,只要把 B 的四周($PQRS$ 所围的小正方体)取出来(见图 16-3 右),除 B 外,此图中的 8 个小正方体显然可被 $1\times1\times2$ 的小块分割,原长方体除去图 16-3 右的这块长方体后,又可看成几个至少有一条边长是偶数的长方体拼成的,这表明:去掉任一个有色小正方体后,其余的小正方体可被 $1\times1\times2$ 的小块完全分割,由此不难得出:

若小鸟最初在有色的房子里,乙(后打开门的那个人)有必胜策略.

若小鸟最初在无色的房子里,甲(先打开门的那个人)有必胜策略.

评析 我们可以从简单情形着手,寻找必胜的对策.

当房子只有 1 间时,小鸟已在里面,甲已没有房子让小鸟搬家,乙必胜;

如图 16-4，当房子只有 2 间时，小鸟已在里面一间，甲能让小鸟搬家搬到留下的一间，乙已没有房子让小鸟搬家，甲必胜；

如图 16-5，当房子只有 3 间时，小鸟已在里面一间，有两种情况：

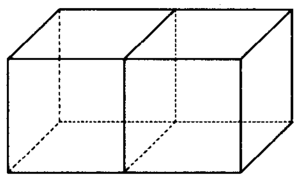


图 16-4

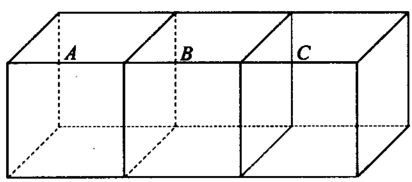


图 16-5

如果小鸟住的是两边的房子 A 或 C 时，甲、乙两人各打开一间（BC 或 BA）后，甲已没有房子让小鸟搬家，乙必胜；

如果小鸟住的是中间的房子 B，甲能让小鸟搬家搬到相邻的一间房子（A 或 C），尽管还有一间空房子，但由于 A 或 C 不相邻，所以乙已没有房子让小鸟搬家，甲必胜；

当房子只有 4 间时，小鸟已在里面一间，有两种情况：

若房间是上下层叠式的（图 16-6 的左图），甲、乙两人各打开一间后，甲能让小鸟搬家搬到留下的一间，乙已没有房子让小鸟搬家，甲必胜；

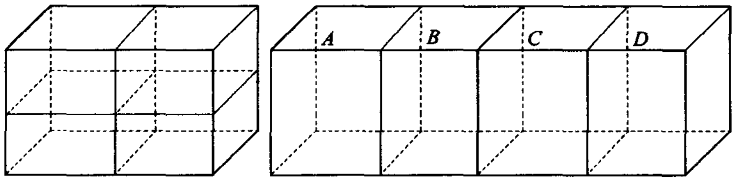


图 16-6

若房间是并列式的(图 16-6 右图),

如果小鸟住的是两边的房子 A 或 D 时,甲、乙两人各打开一间(BC 或 CB)后,甲还有一间房子让小鸟搬家,乙已没有房子让小鸟搬家,甲必胜;

如果小鸟住的是中间的房子 B(或 C),甲能让小鸟搬家搬到相邻的一间房子 A(或 D),尽管还有二间空房子,但由于不相邻,所以乙已没有房子让小鸟搬家,甲必胜.

从上分析可见,当房间数为偶数间时,甲必胜.而房间数为奇数间时,甲,乙都有获胜可能性.

对这些简单情形的分析,有助于我们对一般情况的研究,体现了从特殊到一般的思想方法.

思考 这是对策问题,关键是找到一种策略,使自己处于获胜状态.当不要求房间相邻时,我们可得出一般性结论:

当房间总数为奇数间时,甲有必胜的策略;

当房间总数为偶数间时,乙有必胜的策略.

由于分割成的是棱长为 1m^3 的正方体,设长方体的体积为 $a\text{m}^3$,则当 a 为正奇数时,甲有必胜的策略;当 a 为正偶数时,乙有必胜的策略.

例 5 用四个边长分别为 $a,b,c(a>b>c>0)$ 的锐角三角形可以拼成一个四面体,把拼成的任何一个四面体的各棱用红、黄、蓝三色染色,每条棱染一色,每种色染两条棱.考虑一切经过这样染

色的四面体.如果经过适当转动,两个染色四面体完全重合,并且重合的对应棱同色时,称这样的两个四面体是同一染色类.问:所有这样的染色四面体可分为几种染色类?

第 4 届(1993 年)试题

解 所构成的四面体对棱长度相等,如图 16-7 中 $|AB|=|CD|$,$|AC|=|BD|$,$|CB|=|AD|$,从四面体外部看,任何一个表面三角形三条边都包含 a,b,c 三种长度,按它们的配置顺序看,可分为两类:一类是边长为 a,b,c 的三边按顺时针方向排布;另一类是按逆时针方向排布.如果有两个四面体分别属于这两类,那么无论如何转动,这两个四面体都不全重合.因此,只要把 a,b,c 三边按顺时针方向排布的染色四面体的染色类数弄清楚了,就可以把这个数乘上 2,得到全部染色类的数目.

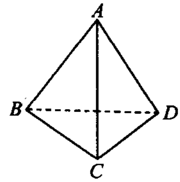


图 16-7

以下设 a,b,c 顺次按顺时针方向排布,按染色方法分,可分成三种不同方式:

①三组对棱对应同色,即图 16-7 中 AB 与 CD 同色,AC 与 BD 同色,BC 与 AD 同色.容易看出,只要一个顶点处的三条棱所占的三种颜色确定后,整个四面体的染色也就确定了.

这种方式下,有 $3\times2\times1=6$ 类.

②恰有一组对棱同色,设长为 a 的对棱同色,就是说:长为 a 的对棱同色时,可划分为 3 个染色类.同理,长为 b,长为 c 的对棱同色也是这样,在这种染色方式下,共可划分 $3\times3=9$ 类.

③任何两条对棱都异色,这时有且仅有一个三角形,它的三边是三种不同颜色.设$\triangle ABC$ 中,BC 染了红色,CA 染了黄色,AB 染了蓝色.这时,只要 AD 染色确定后,整个四面体的染色就确定了.AD 可染黄色,也可染蓝色.这样形成的两个染色四面体不同类.因此,这种染色方式下,有 $3\times2\times1\times2=12$ 类.

综上分析,考虑 a,b,c 按逆时针方向排布的四面体,共有$(6+9+12)\times 2=54$ 类.

评析 问题之所以很快得以解决,乃源于我们从问题的“变”中看到了“不变”,通过分类,将问题改述为一个(或几个)较为简单的小问题,这样解决了这些小问题,就已经有了原始问题的答案或者容易找出原始问题的答案;对较小问题的解答作一些小小的改变就可以得到原问题的完整答案,正是数学中“分类讨论”的思想方法.

染色问题有时也以标号或赋值的形式出现,即在方格或结点处标上“+”“-”号,或赋予值$+1,-1$.

思考 用黄、蓝两种的染色颜色,每边只染一种形式得到的图称为 2 色图. 2 色图中不一定含有三边同色的三角形(简称为单色三角形).

如图 16-8 右中的 2 色图中(实线与虚线各代表一种颜色)就不含单色三角形.

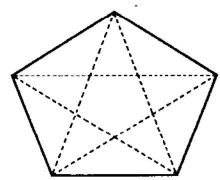


图 16-8

但可以证明:由 $n(n\geqslant 6)$ 边形的 n 条边和对角线组成的 2 色图中,一定含有单色三角形.

这个问题还可以推广到用 k 种颜色染色的问题,有兴趣的读者可参考这方面的专门书籍,这里不再展开.

例 6 小明喜爱运用计算机编程研究数学问题. 有一次,他将 2008 个数 $1,2,3,\cdots,2008$ 编程输入计算机,并让计算机随机地分成两组,每组 1004 个数,再将其中一组按由小到大的顺序排列,得到 $a_1,a_2,\cdots,a_{1004}$;另一组按由大到小的顺序排列,得到 $b_1,b_2,\cdots,b_{1004}$. 然后编程让计算机求代数式 $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_{1003}-b_{1003}|+|a_{1004}-b_{1004}|$ 的值. 经过多次随机分组并分别求对应代数式的值,他发现所得结果居然一样. 你认为所有随机分组的对应代数式的结果总是这个值吗? 如果是,请说明理由并求出这

个值；如果不是，请你再列举几个可能的值.

第 14 届(2003 年)备选题

解　所有随机分组的对应代数式的结果总是这个值，说明如下：

首先要证明对于每一个 i，1004.5 在 a_i 与 b_i 之间.

设 A 组中有 $t(0\leqslant t\leqslant 1004)$ 个数小(或大)于 1004.5，则 B 组中必也恰有 t 个数大(或小)于 1004.5，根据 A 组和 B 组的排列方式，1004.5 总是在 a_i 与 b_i 之间，所以

$$|a_i-b_i|=|a_i-1004.5|+|1004.5-b_i|.$$

于是，

$$\begin{aligned}&|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_{1003}-b_{1003}|+|a_{1004}-b_{1004}|\\=&|1-1004.5|+|2-1004.5|+\cdots+|2007-1004.5|+\\&|2008-1004.5|\\=&1003.5+1002.5+\cdots+0.5+0.5+1.5+\cdots+1002.5+\\&1003.5\\=&(1003.5+0.5)+(1002.5+1.5)+\cdots+(1.5+1002.5)+\\&(0.5+1003.5)\\=&1004\times1004=1008016.\end{aligned}$$

评析　算法是有步骤地解决某一类问题的程序. 新的数学课程十分重视算法的教学，已把计算机算法融入各个相关的部分. 数学问题与计算机科学相结合，渗透信息技术与算法思想的试题正成为竞赛试题的新亮点.

那么本题的算法是怎么想出来的呢？从特殊到一般，2008 个数太多了，我们先取 1,2,3,4 四个数试一试. 可以发现，不论 A 组和 B 组的数如何排列，结果都是 $3+4-2-1=5$. 据此可猜测：答案为 $1005+1006+\cdots+2008-1-2-\cdots-1004$. 取中间两数的平均数 $\frac{1004+1005}{2}=1004.5$，即可发现内含不变关系：1004.5 总是在 a_i

与 b_i 之间,所以

$$|a_i-b_i|=|a_i-1004.5|+|1004.5-b_i|,$$

从而使问题顺利获得了解决.

思考　如果将 2008 个数 1,2,3,…,2008 改为 2008 个不同的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2007},x_{2008}(x_1<x_2<\cdots<x_{2007}<x_{2008})$,采用同样的操作方式,最后的结果是什么?

注意到 $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_{1003}-b_{1003}|+|a_{1004}-b_{1004}|$

$$\begin{aligned}&=|1-1004.5|+|2-1004.5|+\cdots+|2007-1004.5|+\\&\quad|2008-1004.5|\\&=-1-2-\cdots-1004+1005+1006+\cdots+2008\\&=(1005-1)+(1006-2)+\cdots+(2008-1004)\\&=1004\times1004=1008016.\end{aligned}$$

我们就恍然大悟了,总是在 a_i 与 b_i 之间的数是 $\frac{x_{1004}+x_{1005}}{2}$,最后的结果是 $\sum_{i=1005}^{2008}x_i-\sum_{i=1}^{1004}x_i$.

［General Information］
书名＝历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解　高一
作者＝周国镇主编
页数＝174
SS号＝11683559
出版日期＝2006年1月

前言

目录