

第七讲

构造与论证 (一)

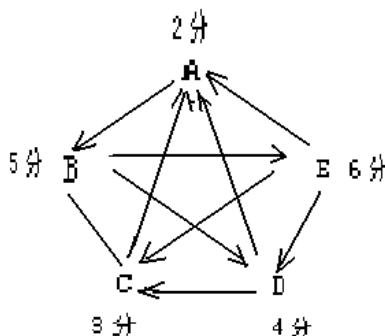


超常篇

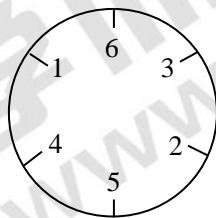
1.

(1) 我们知道 4 个队共进行了 C_4^2 场比赛, 而每场比赛有 2 分产生, 所以 4 个队的得分总和为 $C_4^2 \times 2 = 12$. 因为每一队至少胜一场, 所以得分最低的队至少得 2 分, 又要求每个队的得分都不相同, 所以 4 个队得分最少 $2+3+4+5=14 > 12$, 不满足. 即 $n=4$ 不可能.

(2) 我们知道 5 个队共进行 C_5^2 场比赛, 而每场比赛有 2 分产生, 所以 5 个队的得分总和为 $C_5^2 \times 2 = 20$. 因为每一队至少胜一场, 所以得分最低的队至少得 2 分, 又要求每个队的得分都不相同, 所以 5 个队得分最少为 $2+3+4+5+6=20$, 满足. 即 $n=5$ 有可能. 但是我们必须验证是否存在实例. 如下所示, A 得 2 分, C 得 3 分, D 得 4 分, B 得 5 分, E 得 6 分. 其中 “ $A \rightarrow B$ ” 表示 A, B 比赛时, A 胜 B ; “ $B-C$ ” 表示 B, C 比赛时, B 平 C , 余下类推.



2.



要由于每个写在圆周上的数都被用了三次, 则

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3 \times (1+2+3+4+5+6) = 63$, 即写出来的这 6 个数的平均数为 10.5, 因此 A 至少为 11. 由上图的排列方式可知 A 为 11 的情形存在, 故 A 的最小值为 11.

3. 首先每列的和最少为 0，最多是 10，每行的和最少是 0，最多是 19，所以不同的和最多也就是 0, 1, 2, 3, 4, ..., 18, 19 这 20 个。

下面我们说明如果 0 出现，那么必然有另外一个数字不能出现。

如果 0 出现在行的和中，说明有 1 行全是 0，意味着列的和至多出现 0 到 9，加上行的和至多出现 10 个数字，所以少了一种可能。

如果 0 出现在列的和中，说明在行的和中 19 不可能出现，所以 0 出现就意味着另一个数字不能出现，所以至多是 19，下面给出一种排出方法。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4.

假设任意三位数学家都没有共同会的语言，这表明每种语言至多有两人会说。即这九位数学家为 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 。由于一位数学家最多会三种语言，而每种语言至多有两人会说，所以一位数学家至多能和另外三人通话，即至少与五人语言不通。不妨设 A 不能与 B 、 C 、 D 、 E 、 F 通话。

同理， B 也至多能和三人通话，因此在 C 、 D 、 E 、 F 中至少有一人与 B 语言不通，设为 C 。则 A 、 B 、 C 三人中任意两人都没有共同语言，与题意矛盾。这表明假设不成立，结论得证。

5.

根据抽屉原理，每一列的 4 个格中，起码有两个格同色，这两个同色格的位置共有 6 种可能，而颜色共有 3 种，综合考虑颜色和位置，两个同色格的情况共有 $6 \times 3 = 18$ 种，而一共有 19 列，所以必有一种情况重复，所以至少存在一个四角同色的长方形。