第二届华杯赛初赛试题

第二届华杯赛初赛试题 1．“华罗庚金杯”少年数学邀请赛每隔一年举行一次．今年(1988 年)是第二届．问 2000 年是第几届？

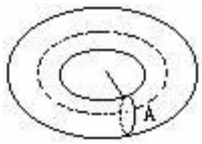
1.【解】“每隔一年举行一次”的意思是每两年举行 1 次。1988 年到 2000 年还有 2000－1988＝12 年，因此还要举行 12÷2＝6 届。1988 年是第二届，所以 2000 年是 1＋6＝8 届。

这题目因为数字不大，直接数也能很快数出来：1988、1990、1992、1994、1996、1998、2000 年分别是第二、三、四、五、六、七、八届．

答：2000 年举行第八届．

【注】实际上，第三届在 1991 年举行的，所以 2001 年是第八届．

第二届华杯赛初赛试题 2．一个充气的救生圈(如右图)．虚线所示的大圆，半径是 33 厘米．实线所示的小圆，半径是 9 厘米．有两只蚂蚁同时从 *A* 点出发，以同样的速度分别沿大圆和小圆爬行．问：小圆上的蚂蚁爬了几圈后，第一次碰上大圆上的蚂蚁？

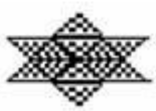


2. 【解】由于两只蚂蚁的速度相同，所以大、小圆上的蚂蚁爬一圈的时间的比应该等于圈长的比．而圈长的比又等于半径的比，即：33∶9．

要问两只蚂蚁第一次相遇时小圆上的蚂蚁爬了几圈，就是要找一个最小的时间它是大、小圆上蚂蚁各自爬行一圈所需时间的整数倍．适当地选取时间单位，使小圆上的蚂蚁爬一圈用 9 个单位的时间，而大圆上的蚂蚁爬一圈用 33 个单位的时间．这样一来，问题就化为求 9 和 33 的最小公倍数的问题了．不难算出 9 和 33 的最小公倍数是 99，所以答案为 99÷9=11．

答：小圆上的蚂蚁爬了 11 圈后，再次碰到大圆上的蚂蚁．

第二届华杯赛初赛试题 3．如右图是一个跳棋棋盘，请你算算棋盘上共有多少个棋孔？



3.【解】把棋盘分割成一个平行四边形和四个小三角形，如下图。平行四边形中棋孔数为 9×9＝81，每个小三角形中有 10 个棋孔。所以棋孔的总数是 81＋10×4＝121(个)

答：共有 121 个棋孔

第二届华杯赛初赛试题

第二届华杯赛初赛试题 4．有一个四位整数．在它的某位数字前面加上一个小数点，再和这个四位数相加，得数是 2000.81．求这个四位数．

4．【解】由于得数有两位小数，小数点不可能加在个位数之前．如果小数点加在十位数之前，所得的数是原来四位数的百分之一，再加上原来的四位数，得数 2000.81 应该是原来四位数的 1.01 倍，原来的四位数是 2000.81÷1.01＝1981．

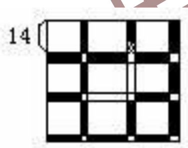
类似地，如果小数点加在百位数之前，得数 2000.81 应是原来四位数的 1.001 倍，小数点加在千位数之前，得数 2000.81 应是原来四位数的 1.0001 倍．但是（2000.81÷1.001）和（2000．81÷1.0001）都不是整数，所以只有 1981 是唯一可能的答案．

答：这个四位数是 1981．

【又解】注意到在原来的四位数中，一定会按顺序出现 8，1 两个数字．小数点不可能加在个位数之前；也不可能加在千位数之前，否则原四位数只能是 8100，大于 2000.81 了．

无论小数点加在十位数还是百位数之前，所得的数都大于 1 而小于 100．这个数加上原来的四位数等于 2000.81，所以原来的四位数一定比 2000 小，但比 1900 大，这说明它的前两个数字必然是 1，9．由于它还有 8，1 两个连续的数字，所以只能是 1981．

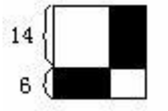
第二届华杯赛初赛试题 5．如图是一块黑白格子布．白色大正方形的边长是 14 厘米，白色小正方形的边长是 6 厘米．问：这块布中白色的面积占总面积的百分之几？



5．【解】格子布的面积是下图面积的 9 倍，格子布白色部分的面积也是图上白色面积的 9 倍，下图中白色部分所占面积的百分比是：

$$\frac{14\times14+6\times6}{20\times20}=0.58=58\%$$

答：格子布中白色部分的面积是总面积的 58%.



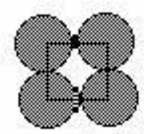
第二届华杯赛初赛试题 6．如下图是两个三位数相减的算式，每个方框代表一个数字．问：这六个方框中的数字的连乘积等于多少？

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ -\square\square\square \\ \hline 894 \end{array}$$

6．【解】因为差的首位是8，所以被减数首位是9，减数的首位是1。第二位上两数的差是9，所以被减数的第二位是9，减数的第二位是0。于是这六个方框中的数字的连乘积等于0。

答：六个方框中的数字的连乘积等于0.

第二届华杯赛初赛试题 7．如右图中正方形的边长是2米，四个圆的半径都是1米，圆心分别是正方形的四个顶点．问：这个正方形和四个圆盖住的面积是多少平方米？



7．【解】每个圆和正方形的公共部分是一个扇形，它的面积是圆的面积的四分之一.因此，整个图形的面积等于正方形的面积加上四块四分之三个圆的面积.而四块四分之三个圆的面积等于圆面积的三倍.于是整个图形的面积等于正方形的面积加上圆面积的三倍．也就是$2\times2+\pi\times1\times1\times3\approx13.42$(平方米)

答：这个正方形和四个圆盖住的面积约是13.42平方米.

第二届华杯赛初赛试题 8．有七根竹竿排成一行．第一根竹竿长1米，其余每根的长都是前一根的一半．问：这七根竹竿的总长是几米？

8．【解】 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=1\frac{63}{64}$(米).

答：七根竹竿的总长是$1\frac{63}{64}$米.

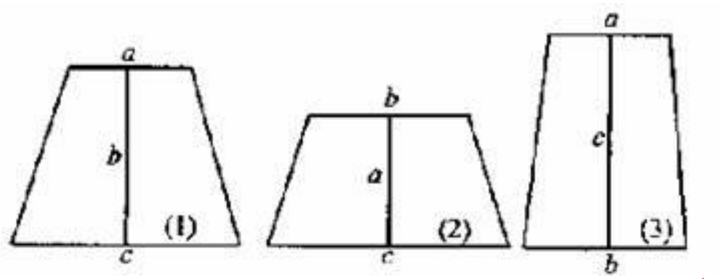
【又解】我们这样考虑：取一根2米长的竹竿，把它从中截成两半，各长1米．取其中一根作为第一根竹竿．将另外一根从中截成两半，取其中之一作为第二根竹竿．如此进行下去，到截下第七根竹竿时，所剩下的一段竹竿长为

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{64}$ （米）

因此，七根竹竿的总长度是2米减去剩下一段的长，也就是 $2-\frac{1}{64}=1\frac{63}{64}$

答：七根竹竿的总长是 $1\frac{63}{64}$ 米．

第二届华杯赛初赛试题 9．有三条线段 *A*、*B*、*C*，*a* 长2.12米，*b* 长2.71米，*c* 长3.53米，以它们作为上底、下底和高，可以作出三个不同的梯形．问：第几个梯形的面积最大(如下图)？



9．【解】梯形的面积＝(上底＋下底)×高－2．但我们现在是比较三个梯形面积的大小，所以不妨把它们的面积都乘以2，这样只须比较(上底＋下底)×高的大小就行了.我们用乘法分配律：

第一个梯形的面积的2倍是：(2.12＋3.53)×2.71＝2.12×2.7I＋3.53×2.71，

第二个梯形的面积的2倍是：(2.71＋3.53)×2.12＝2.71×2.12＋3.53×2.12，

第三个梯形的面积的2倍是：(2.12＋2.71)×3.53＝2.12×3.53＋2.7I×3.53

先比较第一个和第二个两个式子右边的第一个加数，一个是2.12×2.71，

另一个是2.71×2.12由乘法交换律，这两个积相等因此只须比较第二个加数的大小就行了，显然3.53×2.71比3.53×2.12大，因为2.71比2.12大因此第一个梯形比第二个梯形的面积大.类似地，如果比较第一个和第三个，我们发现它们右边第二个加数相等．而第一个加数

2.12×2.71＜2.12×3.53.因此第三个梯形比第一个梯形面积大.综上所述，第三个梯形面积最大.

答：第三个梯形面积最大.

第二届华杯赛初赛试题 10．有一个电子钟，每走 9 分钟亮一次灯，每到整点响一次铃．中午 12 点整，电子钟响铃又亮灯．问：下一次既响铃又亮灯是几点钟？

10．【解】因为电子钟每到整点响铃，所以我们只要考虑哪个整点亮灯就行了．从中午 12 点起，每 9 分钟亮一次灯，要过多少个 9 分钟才到整点呢？由于 1 小时＝60 分钟，这个问题换句话说就是：9 分钟的多少倍是 60 分钟的整数倍呢？即求 9 分和 60 最小公倍数．9 和 60 的最小公倍数是 180．这就是说，从正午起过 180 分钟，也就是 3 小时，电子钟会再次既响铃又亮灯．

答：下一次既响铃又亮灯时是下午 3 点钟．

第二届华杯赛初赛试题 11．一副扑克牌有四种花色，每种花色有 13 张，从中任意抽牌．问:最少要抽多少张牌，才能保证有 4 张牌是同一花色?

11．【解】每种花色各选 3 张，一共 12 张，可见抽 12 张牌不能保证有 4 张牌是同一花色的.

如果抽 13 张牌，由于花色只有 4 种，其中必有一种多于 3 张，即必有 4 张牌同一花色.

答：至少要抽 13 张牌，才能保证有四张牌是同一花色的.

第二届华杯赛初赛试题 12．有一个班的同学去划船．他们算了一下，如果增加一条船，正好每条船坐 6 人；如果减少一条船，正好每条船坐 9 人．问：这个班共有多少同学？

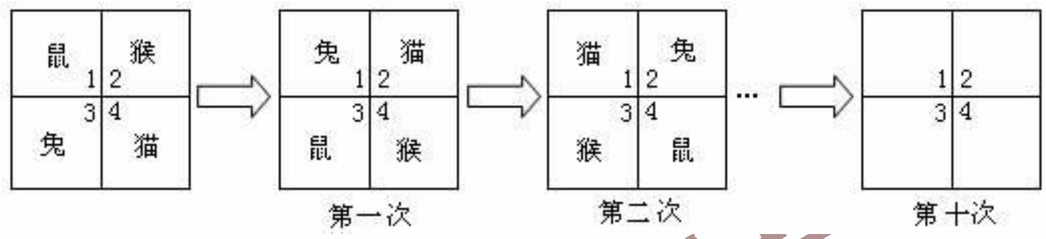
12．【解】先增加一条船，那么正好每条船坐 6 人.然后去掉两条船，就会余下 6×2＝12 名同学，改为每条船 9 人，也就是说，每条船增加 9－6＝3 人,正好可以把余下的 12 名同学全部安排上去，所以现在还有 12÷3＝4 条船，而全班同学的人数是 9×4＝36 人

【又解】由题目的条件可知，全班同学人数既是 6 的倍数，又是 9 的倍数，因而是 6 和 9 的公倍数．6 和 9 的最小公倍数是 18．如果总数是 18 人，那么每船坐 6 人需要有 18÷6＝3 条船，而每船坐 9 人需要 18÷9＝2 条船，就是说，每船坐 6 人比每船坐 9 人要多一条船．但由题目的条件，每船坐 6 人比每船坐 9 人要多用 2 条船．可见总人数应该是 18×2＝36.

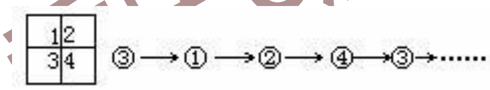
答：这个班共有 36 个人

第二届华杯赛初赛试题 13． 四个小动物换座位．一开始，小鼠坐在第 1 号位子，小猴坐在第 2 号，小兔坐在第 3 号，小猫坐在第 4 号．以后它们不停地交换位子．第一次上下两排交换．第二次 是在第一次交换后再左右两排交换．第三次再上下两排交换．第四次再左右两

排交换……这样一直换下去．问：第十次交换位子后，小兔坐在第几号位子上？（参看 下图）



13．【解】根据题意将小兔座位变化的规律找出来．



可以看出：每一次交换座位，小兔的座位按顺时针方向转动一格，每 4 次交换座位，小兔的座位又转回原处．知道了这个规律，答案就不难得到了．第十次交换座位后，小兔的座位应该是第 2 号位子．

答：第十次交换座位后，小兔坐在第 2 号位子．

第二届华杯赛初赛试题 14．用 1、9、8、8 这四个数字能排成几个被 11 除余 8 的四位数？

14．【解】用 1、9、8、8 可排成 12 个四位数，即 1988，1898，1889，9188，9818，9881，8198，8189，8918，8981，8819，8891

它们减去 8 变为 1980，1890，1881，9180，9810，9873，8190，8181，8910，8973，8811，8883

其中被 11 整除的仅有 1980，1881，8910，8811，即用 1、9、8、8 可排成 4 个被 1 除余 8 的四位数，即 1988，1889，8918，8819．

【又解】什么样的数能被 11 整除呢？一个判定法则是：比较奇位数字之和与偶位数字之和，如果它们之差能被 11 除尽，那么所给的数就能被 11 整除，否则就不能够．

现在要求被 11 除余 8，我们可以这样考虑：这样的数加上 3 后，就能被 11 整除了．所以我们得到“一个数被 11 除余 8”的判定法则：将偶位数字相加得一个和数，再将奇位数字相加再加上 3，得另一个和数，如果这两个和数之差能被 11 除尽，那么这个数是被 11 除余 8 的数；否则就不是．

要把 1、9、8、8 排成一个被 11 除余 8 的四位数，可以把这 4 个数分成两组，每组 2 个数字．其中一组作为千位和十位数，它们的和记作 A；另外一组作为百位和个位数，它们之和加上 3 记作 B．我们要适当分组，使得能被 11 整除．现在只有下面 4 种分组法：

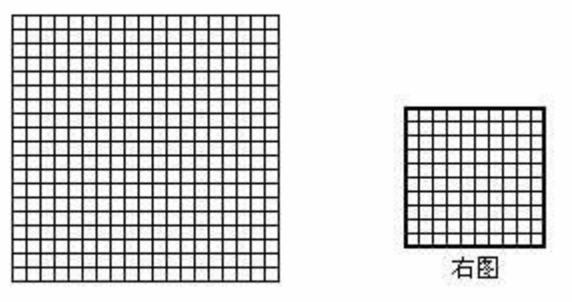
	偶位	奇位
(1)	1，8	9，8
(2)	1，9	8，8
(3)	9，8	1，8
(4)	8，8	1，9

经过验证，第（1）种分组法满足前面的要求：$A=1+8$，$B=9+8+3=20$，$B-A=11$ 能被 11 除尽．但其余三种分组都不满足要求．

根据判定法则还可以知道，如果一个数被 11 除余 8，那么在奇位的任意两个数字互换，或者在偶位的任意两个数字互换，得到的新数被 11 除也余 8．于是，上面第（1）分组中，1 和 8 中任一个可以作为千位数，9 和 8 中任一个可以作为百位数．这样共有 4 种可能的排法：1988，1889，8918，8819．

答：能排成 4 个被 11 除余 8 的数

第二届华杯赛初赛试题 15．如下图是一个围棋盘，它由横竖各 19 条线组成．问：围棋盘上有多少个右图中的小正方形一样的正方形？

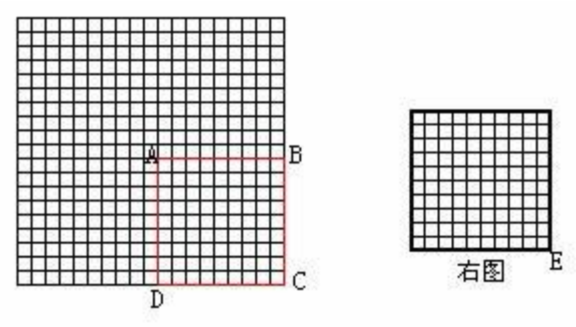


15．【解】我们先在右图小正方形中找一个代表点，例如右下角的点 E 作为代表点．然后将小正方形按题意放在围棋盘上，仔细观察点 E 应在什么地方．通过观察，不难发现：

（1）点 E 只能在棋盘右下角的正方形 $ABCD$（包括边界）的格子点上．

（2）反过来，右下角正方形 $ABCD$ 中的每一个格子点都可以作为小正方形的点 E，也只能作为一个小正方形的点 E．

这样一来，就将“小正方形的个数”化为“正方形 *ABCD* 中的格子点个数”了．很容易看出正方形 *ABCD* 中的格子点为 $10\times10=100$ 个．



答：共有 100 个。