第三届华杯赛复赛试题

第三届华杯赛复赛试题 1 计算：$\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\times 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4.375\right)\div 19\frac{8}{9}}$

1.【解】原式＝$\dfrac{\frac{21}{8}-\frac{2}{3}\times\frac{33}{14}}{\left(\frac{37}{12}+\frac{35}{8}\right)\div\frac{179}{9}}$＝$\dfrac{\frac{21}{8}-\frac{11}{7}}{\frac{179}{24}\times\frac{9}{179}}$＝$\left(\frac{21}{8}-\frac{11}{7}\right)\times\frac{8}{3}=7-4\frac{4}{21}=2\frac{17}{21}$

解法二：原式＝$\dfrac{\frac{21}{8}-\frac{2}{3}\times\frac{33}{14}}{\left(\frac{37}{12}+\frac{35}{8}\right)\times\frac{179}{9}}$＝$\dfrac{\frac{21}{8}-\frac{11}{7}}{\frac{179}{24}\times\frac{9}{179}}\times\frac{56}{56}$＝$\dfrac{147-88}{21}$＝$2\frac{17}{21}$

算这个题时，要注意两点：

（1）在乘、除运算中，代分数要化为假分数，及时约分；

（2）在加、减运算中，如果分数、小数同时出现，要么都化为分数，要么都化为小数。

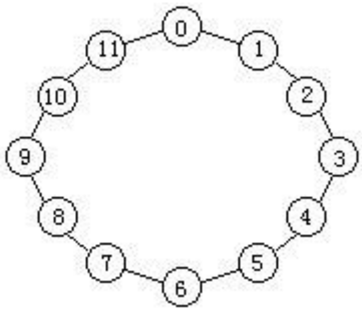
这里，还要指出：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{8}$的小数形式 0.5，0.25，0.75，0.125，0.375，0.625，0.875，一定要很熟悉，在具体计算时，可以节省时间。

第三届华杯赛复赛试题 2 某年的 10 月里有 5 个星期六，4 个星期日．问：这年的 10 月 1 日是星期几？

2.【解】10 月有 31 天，因为有 5 个星期六，只有 4 个星期日，所以 10 月 31 日是星期六．

因为 31＝4×7＋3，所以，3 日也是星期六，1 日是星期四

第三届华杯赛复赛试题 3、电子跳蚤每跳一步，可从一个圆圈跳到相邻的圆圈．现在，一只红跳蚤从标有数字“0”的圆圈按顺时针方向跳了 1991 步，落在一个圆圈里．一只黑跳蚤也从标 有数字“0”的圆圈起跳，但它是沿着逆时针方向跳了 1949 步，落在另一个圆圈里．问：这两个圆圈里数字的乘积是多少？



3.【解】电子跳蚤每跳 12 步就回到了原来位置

由于 1991＝165×12＋11

所以红跳蚤从标有数字“0”的圆圈出发，按顺时针方向跳了 1991 步时，跳到了标有数字“11”的圆圈

同理，由 1949＝162x12＋5，知道黑跳蚤从标有数字“0”的圆圈按逆时针方向跳了 162 个 12 步后跳到了标有数字“7”的圆圈，于是所求的乘积是 11×7＝77

答：乘积是 77。

第三届华杯赛复赛试题 4．173□是个四位数字．数学老师说：“我在这个□中先后填入 3 个数字，所得到的 3 个四位数，依次可被 9、11、6 整除．”问：数学老师先后填入的 3 个数字的和是多少？

4.【解】∵ 能被 9 整除的四位数的数字和是 9 的倍数，并且四位数 173□前三个数字的和是 11，

∴第一次□内只能填 7，

∴能被 11 整除的四位数的个位与百位的数字和减去十位与千位的数字和所得到的差是 11 的倍数，而 7－(1 十 3)＝3，

∴第二次□内只能填 8，

∵能被 6 整除的自然数是偶数，并且数字和是 3 的倍数. 而 173□的前 3 个数字的和是 11，

∴第三次□内只能填 4，7＋8＋4＝19。

故所求的和是 19。

第三届华杯赛复赛试题 5. 我们知道：9=3×3，16=4×4，这里，9、16 叫做“完全平方数”，在前 300 个自然数中，去掉所有的“完全平方数”，剩下的自然数的和是多少？

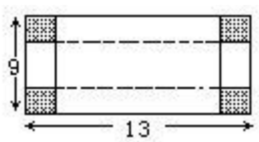
5.【解】不超过 300 的平方数，有：

1，4，9，16，25，36，49，64，81，100，121，144，169，196，225，256，289，它们的和是 1785

前 300 个自然数的和是：$1+2+3+\cdots+300=\frac{1+300}{2}\times300=45150$，

于是剩下的自然数的和 45150－1785＝43365

第三届华杯赛复赛试题 6. 如图，从长为 13 厘米，宽为 9 厘米的长方形硬纸板的四角去掉边长 2 厘米的正方形，然后，沿虚线折叠成长方体容器. 这个容器的体积是多少立方厘米？



6.【解】容器的底面积是：(13—4)×(9－4)＝45(平方厘米)，

高为 2 厘米，所以容器的体积是，45×2＝90(立方厘米)

答：容器的体积是 90 立方厘米。

第三届华杯赛复赛试题 7. 在射箭运动中，每射一箭得到的环数或者是“0”（脱靶），或者是不超过 10 的自然数. 甲、乙两名运动员各射了 5 箭，每人 5 箭得到的环数的积都是 1764，但是甲的总环数比乙少 4 环. 求甲、乙的总环数.

7.【解】∵每人的环数的积=1764≠0，

∴两人每箭射中的环数里没有“0”和“10”.

∵每箭射中的环数都是 1764 的因子，而：1764=1×2×2×3×3×7×7，

并且环数是不超过 10 的自然数∴必有两箭是 7 环，其它 3 箭的环数是 1•2•2•3•3 因子。

如果最小的因子是 1，那么，另外两个因子是 4、9 或者是 6、6；

如果最小的因子是 2，那么，另外两个因子是 2，9 或者是 3、6；

如果最小的因子是 3，那么，另外两个因子是 3、4。

因此，两人 5 箭的环数有 5 种可能：

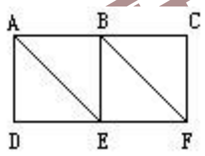
7，7，1，4，9，和=28；
7，7，1，6，6，和=27；
7，7，2，2，9，和=27；
7，7，2，3，6，和=25；
7，7，3，3，4，和=24；

∵甲、乙的总环数相差 4，甲的总环数少，

∴甲的总环数是 24，乙的总环数是 28。

答：甲、乙的总环数分别是 24、28。

第三届华杯赛复赛试题 8．下图中有 6 个点，9 条线段．一只甲虫从 A 点出发，要沿着某几条线段爬到 F 点．行进中，同一个点或同一条线段只能经过 1 次．这只甲虫最多有多少种不同的走法？

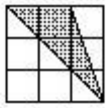


8.【解】从 A 点出发，经过的第一条线段，有 3 种可能：(1)AB；(2)AE；(3)AD

在每一种可能情形下，各有 3 种走法．所以，一共有 3×3=9 种走法．

答：共有 9 种走法．

9. 下图中的正方形被分成9个相同的小正方形，它们一共有16个顶点(共同的顶点算一个)，以其中不在一条直线上的3个点为顶点，可以构成三角形．在这些三角形中，与阴影三角形有同样大小面积的有多少个？



第三届华杯赛复赛试题 9.【解】设原正方形的边长是3.所求的三角形可分两种情形：

(1)三角形的一边长2，这边上的高是3这时，长为2的边只能在原正方形的边上，

这样的三角形有2×4×4＝32(个)；

(2)三角形的一边长3，这边上的高是2，这时，长为3的边是原正方形的一边或平行于一边的分割线其中，

与(1)重复的三角形不再算入，这样的三角形有8×2＝16(个)

因此，所求的三角形共48个(包括图中开始给出的三角形)．

第三届华杯赛复赛试题 10．已知：$S=\dfrac{1}{\dfrac{1}{1980}+\dfrac{1}{1981}+\dfrac{1}{1982}+\cdots+\dfrac{1}{1991}}$，求：$S$的整数部分．

10.【解】$\dfrac{1}{1980}+\dfrac{1}{1981}+\dfrac{1}{1982}+\cdots+\dfrac{1}{1991}<12\times\dfrac{1}{1980}=\dfrac{1}{165}$

并且$\dfrac{1}{1980}+\dfrac{1}{1981}+\dfrac{1}{1982}+\cdots+\dfrac{1}{1991}>12\times\dfrac{1}{1991}=\dfrac{12}{1991}$

∴S>165并且s<$\dfrac{1991}{12}=165\dfrac{11}{12}$

即S的整数部分是165

第三届华杯赛复赛试题 11．今年，祖父的年龄是小明的年龄的 6 倍．几年后，祖父的年龄将是小明的年龄的 5 倍．又过几年以后，祖父的年龄将是小明的年龄的 4 倍．求：祖父今年是多少岁？

11．【解】祖父的年龄比小明的年龄大，两人的年龄差是不变的．

因为今年祖父的年龄是小明的年龄的 6 倍．

所以年龄差是小明年龄的 5 倍，从而年龄差是 5 的倍数．

同理，由“几年后，祖父的年龄是小明的年龄的 5 倍”、“又过几年以后，祖父的年龄是小明的年龄的 4 倍”，知道年龄差是 4、3 的倍数，所以，年龄差是：5×4×3＝60 的倍数。而 60 的倍数是：60，120，…，合理的选择是 60，于是，今年小明的年龄是 60÷5＝12(岁)，祖父的年龄是 12×6＝72(岁)．

答：祖父今年是 72 岁

【又解】 设今年小明 x 岁，那么今年祖父 $6x$ 岁。y 年后，祖父的年龄是小明的年龄的 5 倍，所以 $5(x+y)=6x+y$ 即 $x=4y$ ， 又过 z 年以后，祖父的年龄是小明的年龄的 4 倍，

所以 $4(x+y+z)=6x+y+z$ 即 $2x=3y+3z$

∵祖父今年 $6x$ 岁，

∴ $6x\leqslant100$ $x\leqslant\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}$

又∵$x=4y$ ∴$x\geqslant4$

由 $4\leqslant x\leqslant16\frac{2}{3}$ 及 x＝4y，知 x 可能是 4，8，12，16．

又从 2x＝3y＋3z，即 $y+z=\frac{2}{3}x$，知 x 是 3 的倍数，所以 x＝12，于是 6x＝72。

第三届华杯赛复赛试题 12．某个班的全体学生进行了短跑、游泳、篮球三个项目的测试，有 4 名学生在这三个项目上都没有达到优秀，其余每人至少有一个项目达到优秀，这部分学生达到优秀的项目、人数如下表：

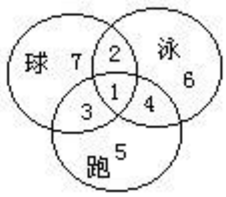
短跑	游泳	篮球	短跑、游泳	游泳、篮球	篮球、短跑	短跑、游泳、篮球
17	18	15	6	6	5	2

求这个班的学生数.

12.【解】4＋17＋18＋15 中有两项达到优秀的学生被算了 2 次，应当从统计中去掉 1 次，成为 4＋17＋18＋15－6－6－5

但其中三项达到优秀的人，开始被算了 3 次，然后又被去掉 3 次，所以还应将这部分人数加进来，即全班人数是：4＋17＋18＋15－6－6－5＋2＝39

【又解】先求至少有一个项目达到优秀的学生人数，看下面这个图：



图中时三个圆圈分别代表短跑、游泳、篮球达到优秀的学生人数，其中的

“1”表示三个项目都优秀的人数，是：2；

“2”表示篮球、游泳达到优秀，但短跑没有达到优秀的人数，是：6－2＝4；

“3”表示篮球、短跑达到优秀，但游泳没有达到优秀的人数，是：5－2＝3；

“4”表示游泳、短跑达到优秀，但篮球没有达到优秀的学生数，是：6－2＝4；

“5”表示只有短跑一项达到优秀的人数，是：17－（2＋3＋4）＝8；

“6”表示只有游泳一项达到优秀的人数，是：18－（2＋4＋4）＝8；

“7”表示只有篮球一项达到优秀的人数，是：15－（2＋4＋3）＝6，

∴只有一个项目达到优秀的人数是：2＋4＋3＋4＋8＋8＋6＝35

还有 4 个人在三个项目上未达到优秀，所以全班学生数是 35＋4＝39

答：这个班有 39 名学生。

第三届华杯赛复赛试题 13．恰好能被 6、7、8、9 整除的五位数有多少个？

13．【解】6、7、8、9 的最小公倍数是 504；五位数中，最小的是 10000，最大的是 99999：

$$\because \frac{10000}{504}=19\frac{424}{504},\ \frac{99999}{504}=198\frac{20}{504}$$

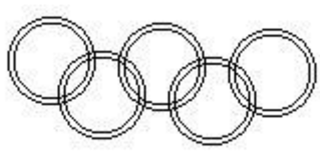
∴五位数中，能被 504 整除的有 198－19＝179(个)

答：有 179 个

第三届华杯赛复赛试题 14．计算：1－3＋5－7＋9－11＋…－1999＋2001

14．【解】原式＝1＋(5－3)＋(9－7)＋(13－11)＋…＋(2001－1999)＝1＋2×500＝1001．

第三届华杯赛复赛试题 15．五环图由内圆直径为 8，外圆直径为 10 的五个圆环组成，其中两两相交的小曲边四边形(阴影部分)的面积都相等．已知五个圆环盖住的总面积是 112.5，求每个小曲边四边形的面积（圆周率 π 取 3.14）．



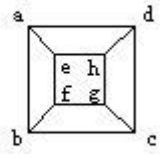
15．【解】每个圆环的面积是 π（5^2-4^2）＝9π．

如果五个圆环彼此没有重合的部分，则它们的总面积是：5×9π ＝45π，

因为五环盖住的总面积是 132.5，所以每个小曲边四边形的面积是 $\frac{45\pi-132.5}{8}=\frac{8.8}{8}$ ＝1.1

答：每个小曲边四边形的面积是 1.1。

第三届华杯赛复赛试题 16．下图中 8 个顶点处标注的数字：a、b、c、d、e、f、g、h，其中的每一个数都等于相邻三个顶点处数的和的 1/3，求：$(a+b+c+d)-(e+f+g+h)$ 的值．



16.【解】由题设条件知道

$a=\frac{b+e+d}{3}$，$b+e+d=3a$（1）

$b=\frac{c+f+a}{3}$，$c+f+a=3b$（2）

$c=\frac{d+g+b}{3}$，$d+g+b=3c$（3）

$d=\frac{a+h+e}{3}$，$a+h+e=3d$（4）

（1）＋（2）＋（3）+（4），是 $2(a+b+c+d)+(e+f+g+h)=3(a+b+c+d)$

就是 $e+f+g+h=a+b+c+d$

∴所求的值是 0。