

第三届华杯赛决赛一试试题

第三届华杯赛决赛一试试题 1. 计算： $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$

1. 【解】原式 = $\frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{7} - \frac{1}{9}) + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{9} - \frac{1}{11}) =$

$$\frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{11}) = \frac{5}{11}$$

第三届华杯赛决赛一试试题 2. 说明：360 这个数的约数有多少个？这些约数的和是多少？

2. 【解】 $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

所以 360 有 $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$ 个约数

约数的和是

$$(1+2+2^2+2^3) \times (1+3+3^2) \times (1+5) = 1170$$

第三届华杯赛决赛一试试题 3. 观察下面数表（横排为行）：

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}; \\ \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \\ \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \\ \frac{5}{1}; \frac{4}{2}; \frac{3}{3}; \frac{2}{4}; \frac{1}{5}; \\ \dots \end{array}$$

$\frac{1991}{1949}$

根据前 5 行数所表达的规律，说明 $\frac{1991}{1949}$ 这个数位于由上而下的第几行？在这一行中，它位于由左向右的第几个？

3. 【解】我们先注意，第一行的每个数的分子、分母之和等于 2，第二行的每个数的分子、分母之和等于 3，…，第五行的每个数的分子、分母之和等于 6。由此可看到一个规律，就是每行各数的分子、分母之和等于行数加 1。

其次，很明显可以看出，每行第一个数的分母是 1，第二个数的分母是 2，…，即自左起第几个数的分母就是几。

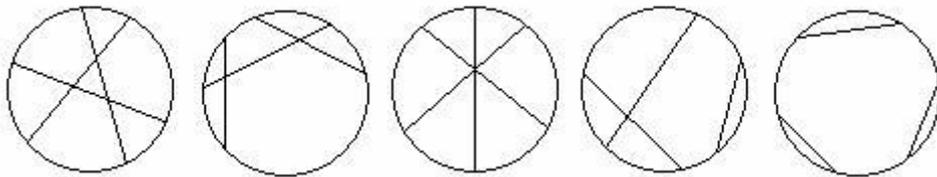
 $\frac{1991}{1949}$

因此， $\frac{1991}{1949}$ 所在的行数等于 $1991 + 1949 - 1 = 3939$ 。而在第 3939 行中， $\frac{1991}{1949}$ 位于自左至右第 1949 个。

 $\frac{1991}{1949}$

第三届华杯赛决赛一试试题 4. 将一个圆形纸片用直线划分成大小不限的若干小纸片，如果要分成不少于 50 个小纸片，至少要画多少条直线？请说明。

4. 【解】我们来一条一条地画直线。画第一条直线将圆形纸片划分成 2 块。画第二条直线，如果与第一条直线在圆内相交，则将圆形纸片划分成 4 块（增加了 2 块），否则只能划分成 3 块。类似地，画第三条直线，如果与前两条直线都在圆内相交，且交点互不相同（即没有 3 条直线交于一点），则将圆形纸片划分成 7 块（增加了 3 块），否则划分的块数少于 7 块。下图是画 3 条直线的各种情形



由此可见，若希望将纸片划分成尽可能多的块数，应该使新画出的直线与原有的直线都在圆内相交，且交点互不相同。这时增加的块数等于直线的条数。这样划分出的块数，列表如下：

直线条数 纸片最多划分成的块数

$$1 \quad 1+1$$

$$2 \quad 1+1+2$$

$$3 \quad 1+1+2+3$$

$$5 \quad 1+1+2+3+4$$

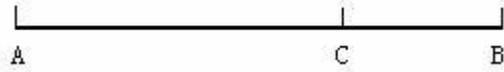
$$5 \quad 1+1+2+3+4+5$$

不难看出，表中每行右边的数等于1加上从1到行数的所有整数的和。因为 $1+1+2+3+\dots+10=56$ ， $1+1+2+3+\dots+9=46$ ，可见第9行右边还不到50，而第10行右边已经超过50了。

答：至少要画10条直线。

第三届华杯赛决赛一试试题 5. 某校和某工厂之间有一条公路，该校下午2点钟派车去该厂接某劳模来校作报告，往返需用1小时。这位劳模在下午1点钟便离厂步行向学校走来，途中遇到接他的汽车，更立刻上车驶向学校，在下午2点40分到达。问：汽车速度是劳模步行速度的几倍？

5. 【解】我们先画一个图如下，其中A是学校，B是工厂，C是汽车和劳模相遇的地点。

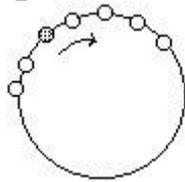


汽车从A到B往返需1小时，即从A到B需30分钟，汽车从A到C往返用了40分钟，即从A到C需20分钟，从而从C到B需

$30-20=10$ (分钟)。因为汽车到达C点是2点20分，所以劳模从B到C共用

$60+20=80$ (分钟)，从而汽车速度是劳模步行速度的 $8(=80\div 10)$ 倍。

第三届华杯赛决赛一试试题 6. 在一个圆周上放了1枚黑色的和1990枚白色的围棋子(如右图)。一个同学进行这样的操作：从黑子开始，按顺时针方向，每隔一枚，取走一枚。当他取到黑子时，圆周上还剩下多少枚白子？



6. 【解】由于 1990 是偶数，在第一圈操作中，一共取走 $\frac{1990}{2} = 995$ 枚白子，其中最后取的是黑子前面的一个子（即反时针方向第一个子）。这时还剩下 995 枚白子，下一次取走黑子后面一个子（即顺时针方向第一个）。由于 995 是奇数，第二圈操作最后取的仍是黑子前面的一个子，共取走 $\frac{995+1}{2} = 498$ 枚白子，还剩下 497 枚白子。类似地，第三圈操作取走 $\frac{497+1}{2} = 249$ 枚白子，还剩下 248 枚白子。由于 248 是偶数，第四圈操作最后取走黑子，这时圆周

上只剩下 $\frac{248}{2} = 124$ 枚白子

答：圆周上只剩下 124 枚白子。

重庆e度论坛

重庆e度论坛