第四届华杯赛复赛试题

第四届华杯赛复赛试题 1．化简：$$\frac{3.875\times\frac{1}{5}+38\frac{3}{4}\times 0.09-0.155\div 0.4}{2\frac{1}{6}+[(4.32-1.68-1\frac{8}{25})\times\frac{5}{11}-\frac{2}{7}]\div 1\frac{9}{35}+1\frac{11}{24}}$$

1.【解】原式的分子＝$\frac{31}{40}+\frac{31}{40}\times\frac{9}{2}-\frac{31}{40}\times\frac{1}{2}$＝$\frac{31}{40}\left(1+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)$＝$\frac{31}{8}$

原式的分母＝$\frac{13}{6}+\left[\left(\frac{108}{25}-\frac{42}{25}-\frac{33}{25}\right)\times\frac{5}{11}-\frac{2}{7}\right]\times\frac{35}{44}+\frac{35}{24}$

＝$\frac{13}{6}\left(\frac{33}{25}\times\frac{5}{11}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{35}{44}+\frac{35}{24}$

＝$\frac{13}{6}\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{35}{44}+\frac{35}{24}$

＝$\frac{13}{6}+\frac{11}{35}\times\frac{35}{44}+\frac{35}{24}$

＝$\frac{93}{24}$＝$\frac{31}{8}$

所以。原式等于 1。

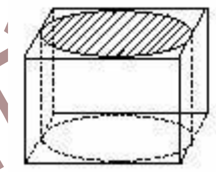
第四届华杯赛复赛试题 2．电视台要播放一部 30 集电视连续剧。如果要求每天安排播出的集数互不相等，该电视连续剧最多可以播几天？

2.【解】如果播 8 天以上，那么由于每天播出的集数互不相等，至少有 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＝36 集，

所以 30 集连续剧不可能按照要求播 8 天以上，另一方面 1＋2＋3＋4＋5＋6＋9＝30

所以最多可以播 7 天，各天播出的集数分别为 1，2，3，4，5，6，9。

第四届华杯赛复赛试题 3．一个正方形的纸盒中，恰好能放入一个体积为 628 立方厘米的圆柱体，纸盒的容积有多大？（圆周率=3.14）。



3.【解】圆柱的高与底面直径都等于正方体的边长，即 6.28＝3.14×边长×$\left(\frac{\text{边长}}{2}\right)^2$

所以(边长)^3 ＝ $\frac{6.28}{3.14}$ ×4＝8，即纸盒的容积是 8 立方厘米。

第四届华杯赛复赛试题 4．有一筐苹果，把它们三等分后还剩 2 个苹果，取出其中两份，将它们三等分后还剩 2 个；然后再取出其中两份，又将这两份三等分后还剩 2 个，问：这筐苹果至少有几个？

4.【解】如果增加 4 个苹果，那么第一次恰好三等分，而且每份比原来多 2 个苹果。第二次，第三次也是如此。第三次分成的每一份比原来多 2 个苹果，又由于第二次分成的两份苹果，总数是偶数，所以第三次分成的每一份，苹果数都是偶数，因此，第三次分成的每一份至少是 4 个苹果。第二次分成的每一份至少是 4×3÷2＝6(个)，第一次分成的每一份至少是 6×3÷2＝9(个)，从而这筐苹果至少是 9×3－4＝23(个)

【又解】如果增加 4 个苹果，那么第一次恰好三等分(每份比原来多 2 个)，第二次取两份(比原来两份多 4 个)，也恰好三等分(每份比原来多 2 个)，最后取两份(比原来两份多 4 个)，也恰好三等分。由于最后一次分，总数是偶数(因为取两份分)，所以每份也是偶数，又比原

来的每份多 2 个，所以现在每份至少是 4 个，从而上一次每份至少是 4×$\frac{3}{2}$=6(个)，再上次每份至少是 6×$\frac{3}{2}$=9(个)，最初是 9×3=27(个)，原来这筐苹果至少 27－4=23(个)。

第四届华杯赛复赛试题

5．计算：$1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+15\frac{1}{72}+17\frac{1}{90}$

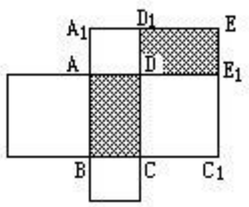
5.【解】原式＝(1＋3＋5＋7＋9＋11＋13＋15＋17)＋$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}\right)$

$=\frac{9\times18}{2}+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right]$

$=81+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$

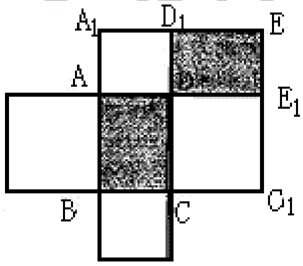
$=81\frac{2}{5}$

第四届华杯赛复赛试题 6．长方形 *ABCD* 周长为 16 米，在它的每条边上各画一个以该边为边长的正方形，已知这四个正方形的面积和是 68 平方米，求长方形 *ABCD* 的面积



6.【解】如图，将A_1D_1向右延长，C_1E_1向上延长，交于 E 点，那么正方形A_1BC_1E的面积。等于长方形 ABCD 周长一半的平方，即 64 平方厘米。长方形 ABCD 与D_1DE_1E DCC_1E_1是全等的，而正方形A_1ADD_1与DCC_1E_1的面积之和，等于题中已给的四个正方形面积和的一半，即$\frac{1}{2}$×68＝34 平方厘米。64－34＝30 平方厘米应等于长方形 ABCD 面积的 2 倍。

所以 ABCD 的面积是$\frac{1}{2}$×30＝15 平方厘米。



第四届华杯赛复赛试题 7. “华罗庚”金杯少年数学邀请赛，第一届在 1986 年举行，第二届在 1988 年举行，第三届是在 1991 年举行，以后每 2 年举行一届。第一届“华杯赛”所在年份的各位数字和是：A1＝1＋9＋8＋6＝24。

前二届所在年份的各位数字和是：A2=1＋9＋8＋6＋1＋9＋8＋8=50

问：前 50 届“华杯赛”所在年份的各位数字和 A50＝？

7.【解】按所给的规律，前 50 届在 20 世纪内有 7 次赛事，在 21 世纪内有 43 次赛事。

在 20 世纪内，已知 A2＝50，其余 5 届年份各位数字的和是:5×(1＋9＋9)＋(1 十 3＋5＋7＋9)＝95＋25＝120

从而 A_7＝A_2＋120＝170

在 21 世纪内的前 45 届年份的数字和是:2×45＋(1＋2＋3＋…＋8)×5＋(1＋3＋5＋7＋9)×9＝495，

前 43 届年份的数字和是:495－2－8－7－2－8－9＝459

于是 A_{50}＝170＋459＝629。

第四届华杯赛复赛试题 8．将自然数按如下顺次排列：

1 2 6 7 15 16 …

3 5 8 14 17 …

4 9 13 …

10 12 …

11 …

在这样的排列下，数字 3 排在第二行第一列，13 排在第三行第三列，问：1993 排在第几行第几列？

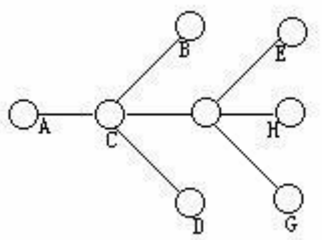
8.【解】奇数斜行中的数由下向上递增，偶数斜行中的数由上向下递增。

第 n 斜行中最大的数是 $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$

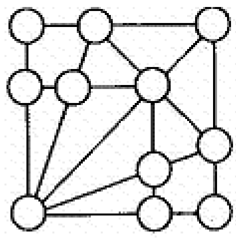
第 62 斜行中最大的数是 $\frac{1}{2}\times62\times63=1953$。第 63 斜行中最大的数是 1953＋63＝2016。所以 1993 位于第 63 斜行。第 63 斜行中数是由下向上递增，左边第一位数字是 1954，因此，1993 位于第 63 斜行由上向下数第(1993－1954＋1)＝40 位，即原阵列的第(63－40＋1)＝24 行，第 40 列。

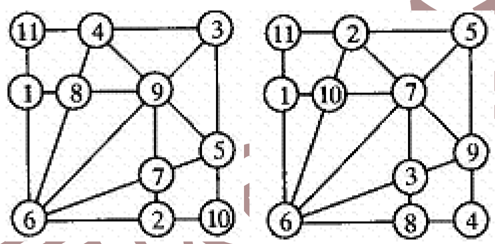
答：1993 排在第 24 行，第 40 列。

第四届华杯赛复赛试题 9．在下图中所示的小圆圈内，试分别填入 1、2、3、4、5、6、7、8 这八个数字，使得图中用线段连接的两个小圆圈内所填的数字之差（大数字减小数字）恰好是 1、2、3、4、5、6、7 这七个数字。



9.【解】填法很多，下图就是一种：





第四届华杯赛复赛试题 10. $1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+7^7+8^8+9^9$ 除以 3 的余数是几？为什么

10. 3^3、6^6、9^9除以 3，余数是 0，所以只须看表达式 $1^1+2^2+4^4$十 $5^5+7^7+8^8$除以 3 余 1

第四届华杯赛复赛试题 11. *A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F*六个选手进行乒乓球单打的单循环比赛（每人都与其他选手赛一场），每天同时在三张球台各进行一场比赛，已知第一天 *B* 对 *D*，第二天 *C* 对 *E*，第三天 *D* 对 *F*，第四天 *B* 对 *C*，问：第五天 *A* 与谁对阵？另外两张球台上是谁与谁对阵？

11.【解】第二天 B 不能对 A，否则 B 对 A。D 对 F 与第三天 D 对 F 矛盾，所以应当 B 对 F、A 对 D。

第三天 B 也不能对 A，否则 C 对 E 与第二天 c 对 E 矛盾，应当 B 对 E(不能 B 对 C，与第四天矛盾)，A 对 C，第四天 B 对 C，D 对 E，所以第五天 B 对 A，D 对 C，E 时 F。

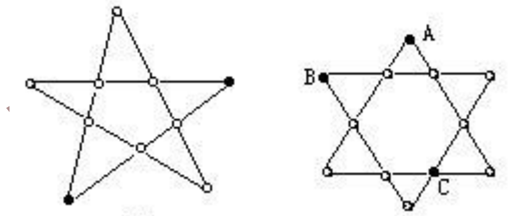
第四届华杯赛复赛试题 12. 有一批长度分别为 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 和 11 厘米的细木条，它们的数量都足够多，从中适当选取 3 根本条作为三条边，可围成一个三角形。如果规定底边是 11 厘米长，你能围成多少个不同的三角形？

12.【解】一个三角形，任何两条边的长度之和，比余下的一条边长。在本题中，设底边是 11 厘米的三角形其余二边分别是 a 及 b，则必有 11<a+b 此外，为确切起见，可设 a≤6，于是(a，b)的可能的值便有

(11，11)；(10，10)，(10，11)；(9，9)，(9，10)，(9，11)；(8，8)，(8，9)，(8,10)，(8，11)；(7，7)，(7，8)，(7，9)，(7，10)，(7，11)；(6，6)，(6，7)，(6，8)，(6，9)，(6，10)，(6，11)；(5，7)，(5，8)，(5，9)，(5，10)(5，11)；(4，8)，(4，9)，(4，10)，(4，11)；(3，9)，(3，10)，(3，11)；(2，10)，(2，11)；(1，11)共 36 种

答：能围成 36 个不同的三角形。

第四届华杯赛复赛试题 13．把下图 a 中的圆圈任意涂上红色或蓝色。问：有无可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数？请说明理由。



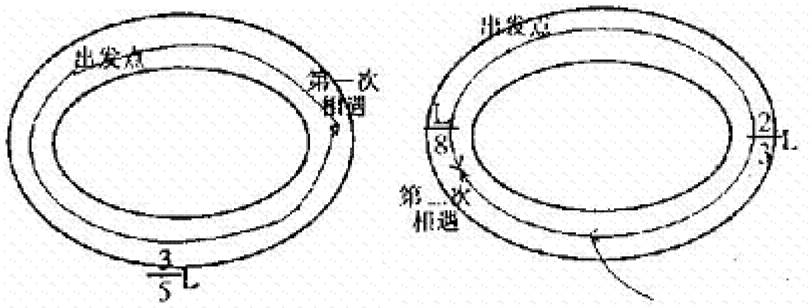
图a　　图b

13．【解】假设每条线上红圈都是奇数个，那么 5 条线上的红圈数相加仍是奇数。

但另一方面，5 条线上的红圈数相加时，由于每一个圈都在两条线上，因而都被计算了 2 次，从而相加的总和应当是偶数两方面的结果矛盾，所以不可能使同一条线上的红圈数都是奇数。

第四届华杯赛复赛试题 14．甲、乙二人在同一条椭圆形跑道上作特殊训练：他们同时从同一地点出发，沿相反方向跑，每人跑完第一圈到达出发点后立即回头加速跑第二圈，跑第一圈时，乙的速度是甲速度的 $\frac{2}{3}$，甲跑第二圈时速度比第一圈提高了 $\frac{1}{3}$，乙跑第二圈时速度提高了 $\frac{1}{5}$。已知甲、乙二人第二次相遇点距第一次相遇点 190 米，问：这条椭圆形跑道长多少米？

14．【解】



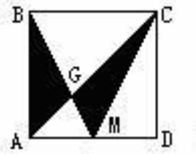
让我们画两个示意图(上图)，并设一开始时甲的速度是 a，于是乙的速度便是 $\frac{2}{3}$a。再设跑道长是 L，则甲、乙第一次相遇点，按甲前进方向距出发点为 $\frac{3}{5}L$。甲跑完第一圈，乙跑了 $\frac{2}{3}L$，乙再跑余下的 $\frac{1}{3}L$，甲已折返，且以 a(1＋$\frac{1}{3}$)＝$\frac{4}{3}$a 的速度跑，所以在乙跑完第一圈时，甲已折返跑了 $\frac{2}{3}L$，这时，乙折返并以 $\frac{2}{3}$a(1 ＋$\frac{1}{5}$)＝$\frac{4}{5}$a 的速度跑着。从这时起，甲、乙速度之比是 $\frac{4}{3}$a÷$\frac{4}{5}$a＝$\frac{5}{3}$，即 5∶3。所以在二人第二次相遇时，甲跑了余下的 $\frac{L}{3}$ 的 $\frac{5}{8}$，而乙跑了它的 $\frac{3}{8}$，即第二次相遇时距出发点 $\frac{3}{8}\times\frac{L}{3}=\frac{L}{8}$。可见两次相遇点间的距离是

($\frac{3}{5}-\frac{1}{8}$)L＝190(米)，即 $\frac{19}{40}L$ ＝190(米)，

L＝400(米)

答：跑道长为 400 米

第四届华杯赛复赛试题 15．下图中的正方形 *ABCD* 的面积为 1，*M* 是 *AD* 边上的中点。求图中阴影部分的面积。



15.【解】需要利用 AM∥BC 时，△GAM 与△GCB 的边对应成比例。

即 $\frac{GA}{GC}=\frac{GM}{GB}=\frac{AM}{CB}=\frac{1}{2}$，

于是 $\frac{S_{\triangle GCM}}{S_{\triangle GAM}}=\frac{GC}{GA}=2$，$\frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle GAM}}=\frac{GB}{GM}=2$。

因为正方形 ABCD 的边长为 1。所以

$S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

从而 $S_{\triangle GCM}=\frac{2}{3}S_{\triangle ACM}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$，

$S_{\triangle GAB}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABM}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$。

$S_{阴影}=S_{\triangle GCM}+S_{\triangle GAB}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

即阴影部分的面积是 $\frac{1}{3}$。

第四届华杯赛复赛试题 16．四个人聚会，每人各带了 2 件礼品，分赠给其余三个人中的二

人，试证明：至少有两对人，每对人是互赠过礼品的。

华杯赛第四届复赛

16.【解】将这四个人用4个点表示，如果两个人之间送过礼，就在两点之间连一条线。由于每人送出2件礼品，图中共有8(＝4×2)条线。由于每人的礼品都分赠给2个人，所以每两点之间至多有2(＝1＋1)条线。四点间，每两点连一条线，一共6条线，现在有8条线，说明必有两点之间连了2条线，还有另外两点(有一点可以与前面的点相同)之间也连了2条线，这就是要证明的结论。

【注】有6种袜子，每种不超过2只，如果取出8只，那么必有2种袜子各2只。这与本题实质上是一回事。