第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题1．(共答题1)

粤＋image002＋image004＝10

在上面的算式中，粤、惠、州、华、罗、庚、金、杯、赛代表1～9这九个不同的数字。请给出一种填数法，使得等式成立。

1．答案不唯一，写出一个即可。如：

    9＋image002_0000＋image004_0000＝10，9＋image002_0001＋image006_0000＝10，9＋image008_0000＋image010_0000＝10，

    9＋image008_0001＋image012_0000＝10，7＋image014_0000＋image016_0000＝10， 6＋image018_0000＋image020_0000＝10，

image022_0000＋image018_0001＋6＝10均为解答。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题2．(群答题1)

    跳绳的时候，可以认为绳子的中间点在同一个圆周上运动。如果小光用0．5秒跳一个“单摇”，用0.6秒跳一个“双摇”，则跳“单摇”时绳中间点的速度和跳“双摇”时绳中间点的速度之比是多少?

(说明：“单摇”是脚离地面一次，绳子转一圈；“双摇”是脚离地面一次，绳子转两圈。)

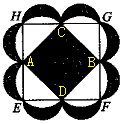
2．答案：3：5

分析：设绳中间点运动的圆周的半径为r，则绳子转一圈绳中间点运动了2πr的距离，“单摇”和“双摇”时的速度分别为image024_0000和image026_0000，所以速度之比为

image024_0001：image026_0001＝image028_0000：image030＝image032：image034＝3：5

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题3．(必答题A1)

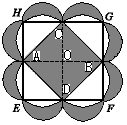
如图，阴影正方形的顶点分别是大正方形EFGH各边的中点，分别以大正方形各边的一半为直径向外作半圆，再分别以阴影正方形的各边为直径向外作半圆，形成8个“月牙形”。这8个“月牙形”的总面积为5平方厘米，问大正方形EFGH的面积是多少平方厘米?



3．答案：10

    分析：如图所示，连接AB和CD相交于O，容易由勾股定理和半圆面积公式得到三角形，ACH的面积，即得到三角形AOC的面积等于AH，HC上两个“月牙形”的面积之和。因此，这8个“月牙形”的总面积等于正方形ACBD的面积。

    由于这8个“月牙形”的总面积为5平方厘米，而正方形EFGH的面积为正方形ACBD的面积的2倍，所以正方形EFGH的面积等于10平方厘米。



**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题4．(必答题A2)

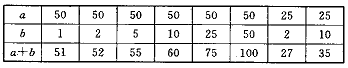
   两个自然数a，b的最小公倍数等于50，问a＋b有多少种可能的数值?

4．答案：8

    分析：因为：50=2×5image037，a，b是50的约数，它们只能取1，2，5，10，25，50。不妨设a≥b，当取a＝50时，b＝1，2，5，10，25，50；当取a＝25时，b＝2，10

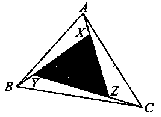
    所以，a＋b共有8种可能的不同数值。

    两个自然数a，b的最小公倍数等于50，当a≥b时，a＋b取不同数值可列表如下：



**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题5．(必答题A3)

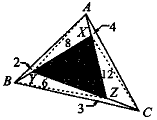
   如图所示，三角形ABC中，点X，Y，Z分别在线段AZ，BX，CY上，且YZ=2ZC，ZX＝3XA，XY＝4YB，三角形XYZ的面积等于24，求三角形ABC的面积。



5．答案：59

    分析：连接AY，CX，BZ，如图所示，由三角形XYZ的面积等于24，YZ＝2ZC，三角形XZC的面积等于12。

    又ZX＝3XA，三角形XZC的面积等于12，所以三角形AXC的面积等于4。三角形AYX的面积等于8。注意到XY＝4YB，三角形ABY的面积等于2。三角形ZBY的面积等于6，三角形CBZ的面积等于3。



    所以三角形ABC的面积＝24＋12＋4＋8＋2＋6＋3＝59。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题6．(必答题A4)

   你能在3×3的方格表(如图)中填入彼此不同的9个自然数(每个格子里只填一个数)，使得每行、每列及两条对角线上三个数的乘积都等于2005吗?若能，请填出一例，若不能，请说明理由。

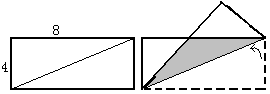


   6．答案；不能

    分析：如果能填，则填入的彼此不同的9个自然数将是2005的9个彼此不同的约数，然而2005的彼此不同的正约数只有1,5，401，2005这4个，故不能。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题7．(必答题A5)

已知长方形的长为8，宽为4，将长方形沿一条对角线折起压平，如图所示。求重叠部分(灰色三角形)的面积。



7．答案：10

分析：如图所示，因为∠EBD＝∠EDB，显然

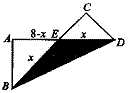
    BE＝DE，AE＝CE

设BE＝DE＝x，则

    AE＝CE＝8－x

由勾股定理得

    (8一z)image037_0000＋4image037_0001=ximage037_0002



解之得x＝5

所以，Simage045＝image047·BE·CD＝image047_0000×5×4＝10

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题8．(必答题A6)

   开始有三个数为1，1，1，每次操作把其中的一个数换成其他两数的和。问经过10次操作后所得的三个数中，最大数的最大可能值是多少?

8. 答案：144

分析：每次把三个数从小到大排序，再把前面的最小的数换成后面两个数的和，结果为{1，1，1}→{1，1，2}→{1，2，3，}→{2，3，5)→{3，5，8}→{5，8，13}→…

    经观察，最大的数构成一个斐波那契(Fibonacci)数列，开始的两个数是1，2，从第三项开始，每个数是前面两个数的和。因此为

    1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144

   经过lO次操作后，该数列中第11个数是144，即最大数的最大可能值是144。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题9．(群答题2)

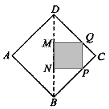
   中国古代的“黑火药”配制中硝酸钾、硫磺、木炭的比例为15∶2∶3。今有木炭50千克，要配制“黑火药”1000千克，还需要木炭多少千克?

9．答案：100

    分析：由硝酸钾，硫磺，木炭的比例为15：2：3求得，木炭所占的比例为image049，因此，配制1000千克的“黑火药”需要木炭1000×image049_0000＝150(千克)，今有木炭50千克，故还需要木炭150千克－50千克＝100千克。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题10．(群答题3)

图中的大正方形ABCD的面积是18平方厘米，灰色正方形MNPQ的边MN在对角线BD上，顶点P在边BC上，Q在边CD上。问灰色正方形MNPQ的面积是多少平方厘米?

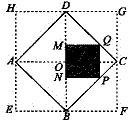


10．答案：4

    分析：连接AC交BD于O，作大正方形ABCD的外接正方形EFGH，如图所示，则正方形EFGH的面积是36平方厘米。所以，DB＝AC＝6厘米。

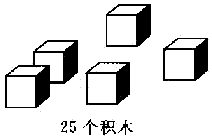
易知DM＝MQ＝MN＝NB＝2厘米

所以灰色正方形的面积是4平方厘米。



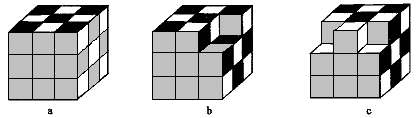
**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题11．(共答题2)

将25块边长为1的正方体积木堆放成一个几何体，如图所示，看谁堆放的几何体的表面积最小?最小的表面积是多少?(说明：这是一道现场动手操作题，每队的4名选手，既要动手，又要动脑，而且要有很好的合作精神。参赛队如果都没得到“最小表面积是54”的堆放法，就以堆放表面积最小的队为胜者。因此，本题以“看谁堆放的几何体的表面积最小?最小的表面积是多少?”来设问)



11．答案：54

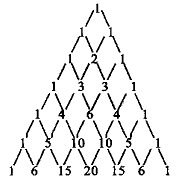
分析：25块边长为1的正方体积木堆放成一个几何体，当小积木自相重合的面最多时表面积最小。设想27块边长为1的正方体积木，其表面积为54(图a)。



    现在要去掉2块小积木成为25块，其总表面积不会减少。要使得总表面积最小，发现在一个角处去掉相邻的两块小积木时(图b)，或在两个角上各去掉一块小积木时(图C)，总表面积不变，与边长为3的立方体的表面积相等，为3×3×6＝54。所以堆放25块小积木的最小表面积是54。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题12．(必答题B1)

下图是中国古代的“杨辉三角形”，问：写在图中“网点”处所有数的和是多少?



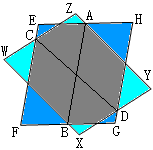
   12．答案：127

    分析：这是一道找规律的速算题。

    第1行的数是1；第2行的2个数的和是2；第3行的3个数的和是4；第4行的4个数的和是8；第5行的5个数的和是16；第6行的6个数的和是32；第7行的7个数的和是64。求和：1＋2＋4＋8＋16＋32＋64＝127。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题13．(必答题B2)

一张面积为7．17平方厘米的平行四边形纸片WXYZ放在另一张平行四边形纸片EFGH上面，如上页右图所示，得出A，C，B，D四个交点，并且AB∥EF，CD∥WX。问纸片EFGH的面积是多少平方厘米?说明理由。

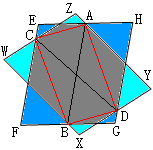


13．答案：7.17

    分析：连接AC，CB，BD，DA，如图所示，因为AB∥EF∥GH，所以ABC的面积是平行四边形AEFB面积的一半，△ABD的面积是平行四边形的AHGB面积的一半，因此四边形ACBD的面积是平行四边形EFGH面积的一半。

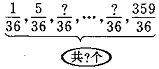
同理可证，四边形ACBD的面积也是平行四边形WXYZ面积的一半。因此，

平行四边形EFGH的面积＝平行四边形WXYZ的面积＝7.17平方厘米



**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分** 题14；(必答题B3)

小于10且分母为36的最简分数共有多少个?



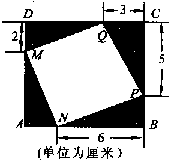
14. 答案：120个

分析：设满足题设条件的数为x，则x＝image054，其中0≤n≤9，r取小于36且与36互质的自然数1，5，7，11，13，17，19，23，25，29，31，35，共计12个。

所以，小于10且分母为36的最简分数共有lO×12＝120(个)

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题15．(必答题B4)

如图所示，如果长方形ABCD的面积是56平方厘米，那么四边形MNPQ的面积是多少平方厘米?



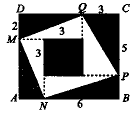
15. 答案：32.5

    分析：如图所示，过M，N，P，Q分别作长方形ABCD的各边的平行线。易知交成中间的阴影正方形的边长为3厘米，面积等于9平方厘米。

设△MQD，△NAM，△PBN，△QCP的面积之和为S，四边形MNPQ的面积等于x，则

image056

解上述方程，得2x=65，所以x=32.5平方厘米。



**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题16．(必答题B5)

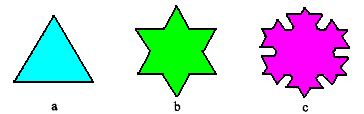
   你能用写有数字的卡片image015，image016，image017，image018，image019，image020，image021，image022排成两个自然数，使得其中的一个数是另一个数的2倍吗?如果能，请排出一例，如果不能，请说明理由。

    16．答案：不能

    分析：设一个数为a，另一个数为b，依题意a＝2b，则S＝a＋b＝2b＋b＝3b，所以3︳S。但S被3除的余数等于a＋b被3除的余数，等于a被3除的余数与b被3除的余数之和，即等于2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝44被3除的余数，但是这个余数不等于0，矛盾!所以不能用写有数字的卡片image058image059image060image061image062image063image064image065排成两个自然数，使得一个自然数是另一个自然数的2倍。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题17．(必答题B6)

从下图a那样的等边三角形开始，将三角形的每条边三等分，然后以中间的线段为边向外作新的等边三角形，如图b，得到一个“雪花六角形”。接着将“雪花六角形”的12条边的每一条三等分，仍以中间的线段为边向外作新的等边三角形，如图c，得到一个新的“雪花形”。问：图c的面积与图a的面积的比是多少?



17．答案：40：27

    分析：设图a的等边三角形的面积是l，在图b中，每条边上增加的等边三角形的面积是image067．共增加了3个等边三角形，所以图b的面积和图a的面积的比是image069。类似地，图c中外边缘增加的小等边三角形的面积是image071＝image073，共增加了12个小的等边三角形，所以图c的面积是image069_0000＋12×image073_0000＝image069_0001＋image075＝image077。

    所以，图c的面积和图a的面积比是40：27。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题18．(群答题4)

构成自然数。的所有数字互不相同，这些数字的乘积等于360。求n的最大值。

18．答案：95421

    分析：360＝2image079×3image037_0003×5＝1×2×4×5×9，所以a的最大值为95421。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题19．(群答题5)

    鹅城西湖落天鹅，一湖一对两鹅多，一湖三只三只少，共落天鹅有几多?

(说明：惠州别称“鹅城”，城中的西湖是著名风景区，由丰、鳄、平、菱、南5个湖区组成。题意是说：一个湖区落一对天鹅多两只天鹅，一个湖区落三只天鹅少三只天鹅，问共落有多少只天鹅?)

19．答案：12只

    分析：

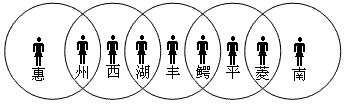
    方法一：(算术法)由“一湖一对两鹅多”，知天鹅数是2的倍数；由“一湖三只三只少”，知天鹅数是3的倍数。又(2，3) ＝1，可知天鹅数是6的倍数：6，12，18，24，…验算得：共落有12只天鹅。

    方法二：(代数法)设天鹅数为x只，落在Y个湖中。则2y＋2＝3y－3，

解得y＝5，则x＝2y＋2＝2×5＋2＝12，即共落天鹅12只。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题20．(共答题3)

编号为1～9的九位小朋友，胸前都别着一个汉字，依次为：惠、州、西、湖、丰、鳄、平、菱、南，如图所示站在五个圆的标志中，且每个圆中的小朋友的编号的和均为13，请指出别着“丰”字的小朋友的编号最大是几？



20．答案：8

    分析：易知

    惠＋州＋西＋湖＋丰＋鳄＋平＋菱＋南＝45    ①

    惠＋2×州＋西＋2×湖＋丰＋2×鳄＋平＋2×菱＋南＝13×5＝65    ②

    ②－①得：

    州＋湖＋鳄＋菱＝20

    又    湖＋丰＋鳄=13

若“丰”＝9，则只能

    湖＋鳄＝1＋3

此时由③得

    州＋菱＝20－1－3＝16

    但州、菱都小于9，所以

    州＋菱≤8＋7＝15

    矛盾!所以“丰”不等于9，“丰”的最大可能值等于8。事实上，惠＝4，州＝9，西＝1，湖＝3，丰＝8，鳄＝2，平＝5，菱＝6，南＝7，合乎要求。所以“丰”的最大值等于8。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题21．(抢答题1)

   13位同学参加某项赈灾捐款，每人的捐款数均为整数元。马小虎很快计算出他们的平均捐款数为64．96元，可惜百分位的数字有误。问：这13位同学的捐款总数是多少元?

21. 答案：844

    分析：设这13位同学的捐款总数为x元，则

    64.90＜image082＜64.99

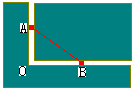
    所以

    843.7＜x＜844.87

    由于x为整数，所以x＝844元。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题22．(抢答题2)

右图中的两个滑块A，B由一个连杆连接，分别可以在垂直和水平的滑道上滑动。开始时，滑块A距O点20厘米，滑块B距O点15厘米。问；当滑块A向下滑到O点时，滑块B滑动了多少厘米?

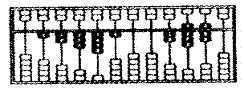


22．答案：10 ．

    分析：由ABimage037_0004＝A0image037_0005＋OBimage037_0006＝20image037_0007＋15image037_0008＝25image037_0009，可知连杆的长度等于25厘米。当滑块A向下滑到O点时，滑块B距O点的距离是25厘米，故滑块B滑动了25－15＝10(厘米)。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题23．(抢答题3)

算盘上一左一右列出了两个十进位的数，左边的是个7位数，右边的是个4位数，如图所示，问左边的数除以右边的数的商是多少?

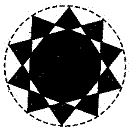


  23. 答案：430

    分析：左、右边的数分别为12341×10image037_0010，287×10，两数之比为43×10image085＝43×10＝430．

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题24．(抢答题4)

如图所示，圆周上的十个点将圆周十等分，连接间隔两个点的等分点，共得出圆的十条弦，它们彼此相交，构成各种几何图形。请回答：图中共有多少个平行四边形?



   24. 答案：5

    分析：连接圆周上的十个等分点的“对径点”，共连接出5条直径，每条直径是一个平行四边形的较长的那条对角线，与一个平行四边形对应。因此图中共有5个平行四边形。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分** 题25．(抢答题5)

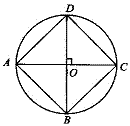
圆上的100个点将该圆等分为100段等弧，随意将其中的一些点染成红点，要保证至少有4个红点是一个正方形的4个顶点，问：你至少要染红多少个点?

  25. 答案：76

    分析：如图所示：圆的一对直径AC，BD互相垂直时，则ABCD恰是一个正方形。反过来，如果圆上的四点A，B，C，D恰是一个正方形ABCD的4个顶点，则对角线AC，BD恰是该圆的一对互相垂直的直径。

    圆上的100个点将该圆等分为100段等弧，恰有25对互相垂直的直径，由互相垂直的直径的4个端点恰可构成25个不同的正方形。最不利的情形是：每对互相垂直的直径的4个端点中染红3个点，则总计在圆的100个

等分点中染红了75个点，其中任意的4个红点都不是一个正方形的4个顶点。这时，我们只要再染一个红点，即染76个红点，而76＝3×25＋1，就必定会出现一个正方形的4个顶点都是红点，因此，要保证至少有一个正方形的4个顶点为红点，至少要将这100个等分点中的76个点染成红点。



**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题26．(抢答题6)

用数字1，2，3，4，5，6填满一个6×6的方格表，如右图所示，每个小方格只填其中的一个数字。将每个2X 2正方格内的四个数字的和称为这个2×2正方格的“标示数”。问能否给出一种填法，使任意两个“标示数”均不相同?如果能，请举出一例；如果不能，请说明理由。



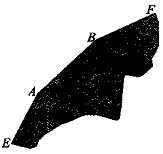
    26．答案：不能

    分析；每个2×2正方格内的四个数字的和最大是24，最小是4，从4至24共有21个不同的数值，但是在6×6的方格表中，共有25个不同的2×2的正方格，也就是有25个“标示数”，由25＞21，根据抽屉原理，必有两个“标示数”相同。

**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题27．(共答题4(操作))

   一个考古发现的正多边形残片，如图所示：只用一副学生三角板和一支铅笔为工具，请你判定这个正多边形的边数。

(说明：所给正多边形残片中的∠EAB＝∠ZFBA＝∠165°，需要选手动手去量)



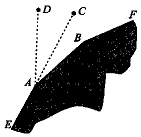
    27. 答案：24

    分析：利用一副学生用的三角板和一支铅笔，可以量得∠EAB＝90°＋45°＋30°＝165°

    由(n一2)×180°＝n×165°得n＝24

    或如图所示，延长EA到C，用等腰直角三角板画∠BAD＝45°，再用另一只三角板的较小的锐角量得∠CAD＝30°，∴∠BAC＝45°－30°＝15°。

由n×15°＝360°，解得n=24。



**第10届华罗庚金杯少年数学邀请赛口试试题10分**题28．(群答题6)

下面的两条横幅：

    中华少年 杯赛联谊 切磋勾股

    炎黄子孙 惠州弘志 振兴中华

每个字代表一个小于25的非零自然数，不同的字代表不同的数，相同的字代表相同的数。已知这些字代表的34个数的平均值是12丧。问“中华”两个字代表的自然数之和的最大值是多少?

    28．答案：46

    分析：这些字代表的24个自然数的平均值是12image089＝image091，则这24个数的和为302。如果24个汉字分别代表1至24，其总和是

    1＋2＋3＋…23＋24＝image093＝300，

    因为302－300＝2，“中华”两字各出现了2次，其他字都只出现一次。必有其中一个“中华”由于代替了另外两个不同的汉字，使得总和增加2。

    设x和y分别代表“中”和“华”，所代替的两字为u，v，应当有：

    x＋y＝2＋u＋v．

    要使想x＋y最大，只要使u＋v最大。

    x＋y≤23＋24—47

    u＋v≤47＋2—45

    若x＋y＝47，只能取x＝24，y＝23，或z＝23，y＝24．这时u＋v＝45，只有u＝23，v＝22，或u＝24，v=21，会出现y＝u的情况，所以x＋y＝47不能达到。再看x＋y＝46，可取x＝24，y＝22。由u＋v＝44，可取u＝21，v＝23。

可见x＋y＝46可以达到。

    所以，“中”与“华”所代表的自然数之和的最大值是46。