



## 竞赛篇周周练答案

## 知识点:

这类问题涉及的知识面广，没有固定的模式，方法多样，解答时要认真审题，根据题目的特点，灵活地选择解法。

在日常生活和工作中，经常会遇到这样一类问题：怎样安排时间最省、怎样行走路线最短、怎样管理费用最低、怎样设计面积最大、怎样合作效率最高、怎样加工利用率最大等等，它们都可以归结为在一定条件下的最大值或最小值方面的数学问题。

针对不同的题型要采用不同的策略和方法，大致可以从下面几个方面去思考：

- (1) 极端性思想思考问题；
- (2) 利用不等式估值；
- (3) 局部调整思想；
- (4) 利用抽屉原理与容斥原理；
- (5) 枚举比较。

1. 有一类自然数，它的各个数位上的数字之和为 2012，那么这类自然数中最小的是几？

【解析】一个自然数的值要最小，首先要求它的数位最小，其次要求高位的数值尽可能地小。由于各数位上的和固定为 2012，要想数位最少，各位数上的和就要尽可能多地取 9，而  $2012 \div 9 = 223 \cdots 5$ ，所以满足条件的最小自然数为： $\underbrace{599 \cdots 9}_{223 \text{ 个 } 9}$

2. 要砌一个面积为  $72 \text{ 米}^2$  的长方形猪圈，长方形的边长以米为单位都是自然数，这个猪圈的围墙最少长多少米？

【解析】将 72 分解成两个自然数的乘积，这两个自然数的差最小的是  $9-8=1$ ，猪圈围墙长 9 米、宽 8 米时，围墙总长最少，为  $(8+9) \times 2=34$ （米）。

3. 一个布袋中有红、黄、绿三种颜色的小球各 10 个，这些小球的大小均相同，红色小球上标有数字“4”，黄色小球上标有数字“5”，绿色小球上标有数字“6”。小明从袋中摸出 8 个球，它们的数字和是 39，其中最多可能有多少个球是红色的？

【解析】假设摸出的 8 个球全是红球，则数字之和为  $(4 \times 8 =) 32$ ，与实际的和 39 相差 7，这是因为将摸出的黄球、绿球都当成是红球的缘故。用一个绿球换一个红球，数字和可增加  $(6 - 4 =) 2$ ，用一个黄球换一个红球，数字和可增加  $(5 - 4 =) 1$ 。为了使红球尽可能地多，应该多用绿球换红球，现在  $7 \div 2 = 3 \dots 1$ ，因此可用 3 个绿球换红球，再用一个黄球换红球，这样 8 个球的数字之和正好等于 39。所以要使 8 个球的数字之和为 39，其中最多可能有  $(8 - 3 - 1 =) 4$  个是红球。

4. 60 个苹果要分给一群小朋友，每一个小朋友所分得的苹果数都要不一样，要使小朋友的苹果数的乘积最大。问：应该怎么分？

【解析】拆数问题。小朋友越多，乘积越大，因为和一定，所以每人分得尽量小。

因为  $2+3+4+\dots+10=54$ ，所以还差 6 个苹果，所以最多的 4 人分别加 1，即：2,3,4,6,7,8,9,10, 11

【答案】2,3,4,6,7,8,9,10,11

5. 13 个非 0 的自然数和为 100，问其中偶数最多有多少个，最少有多少个？

【解析】(1) 因为偶数的和为偶数，13 个数总和也为偶数，所以有偶数个奇数，从而有奇数个偶数。

因为  $2+4+\dots+18=90$ ，有 9 个偶数，但是因为  $1+3+5+7=16$ ，所以找不到 4 个奇数和为 10，所以不满足

$2+4+\dots+14=56$ ，有 7 个偶数，不难找到 1, 3, 5, 7, 9, 19 这 6 个奇数和为 44，所以最多 7 个偶数。

(2) 同理，偶数要最少，奇数就要最多，且奇数个数为偶数个，所以：

$1+3+5+\dots+15=64$ ，有 8 个奇数，不难找到 2, 4, 6, 8, 16 这 5 个偶数和为 36，所以偶数最少有 5 个。