2007-2008 学年度北京市宣武区第一学期

高三年级期末质量检测（理）

一．填空题

1．$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=$_____.

2．$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项的值为_____.

3．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2(a_n-1)$，则 a_7 等于_____.

4．已知向量 a,b 满足 $|a|=1,|b|=2$，且 $a\cdot(a+b)=2$，则 a 与 b 的夹角是_____.

5．函数 $y=(\sin x-\sqrt{3}\cos x)(\cos x-\sqrt{3}\sin x)+\sqrt{3}$ 的最小正周期为_____.

6．定义在 N^* 上的函数 $f(x)$，满足 $f(1)=1$，且 $f(n+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}f(n), & n\text{为偶数}\\ f(n)+1, & n\text{为奇数}\end{cases}$，则 $f(22)=$_____.

二．选择题

7．i 是虚单位，复数 $\dfrac{2i}{1-i}$ 等于

A．1+i　　B．1-i　　C．-1+i　　D．-1-i

8．已知 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，且 $\theta\in\left(\dfrac{3}{2}\pi,2\pi\right)$，则 $\tan\theta$ 的值为

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$-\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{5}{3}$　　D．$-\dfrac{4}{3}$

9．“$x>1$”是“$\dfrac{1}{x}<1$”成立的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知 α,β．γ 是三个互不重合的平面，l 是一条直线，给出下列四个命题：

①若 $\alpha\perp\beta,l\perp\beta$，则 $l\parallel\alpha$；　　②若 $l\perp\alpha,l\parallel\beta$，则 $\alpha\perp\beta$；

③若l上有两个点到α的距离相等，则$l//\alpha$；　④若$\alpha\perp\beta,\alpha//\gamma$，则$\gamma\perp\beta$.

其中正确命题的序号是

A．①②　B．①④　C．②④　D．③④

11．函数$y=3^x$的图象与函数$y=(\frac{1}{3})^{x-2}$的图象关于

A．点（-1，0）对称　B．直线 x=1 对称

C．点（1，0）对称　D．直线 x=-1 对称

12．在北纬 45°的纬线圈上有 A．B 两地，A 地在东经 110°处，B 地在西经 160°处，设地球半径为 R，则 A．B 两地的球面距离是

A．$\frac{\pi}{2}R$　B．$\frac{\pi}{3}R$　C．$\frac{5\pi}{3}R$　D．πR

13．身穿兰．黄两种颜色衣服的各有两人，身穿红色衣服的有一人，现将这五人排成一行，要求穿相同颜色衣服的人不能相邻，则不同的排法共有

A．48 种　B．72 种　C．78 种　D．84 种

14．设定义在R上的函数$f(x)$的反函数为$f^{-1}(x)$，且对于任意的$x\in R$，都有$f(-x)+f(x)=3$，则$f^{-1}(x-1)+f^{-1}(4-x)$等于

A．0　B．-2　C．2　D．$2x-4$

三．计算题

15．在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{2},BC=1,\cos C=\frac{3}{4}$.

（1）求$\sin A$的值；

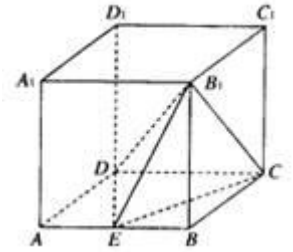
（2）求$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$的值.

16．已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=4$，公比$q\neq1$的等比数列，S_n是其前n项和，且$4a_1,a_5,-2a_3$成等差数列.

（1）求公比q的值；

（2）设 $A_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n$，求 A_n.

17．如图，在正方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 的中点.



（1）求直线 B_1C 与 DE 所成角的余弦值；

（2）求证：平面 $EB_1D \perp$ 平面 B_1CD；

（3）求二面角 E—B_1C—D 的余弦值.

18．某公园有甲．乙两个相邻景点，原拟定甲景点内有 2 个 A 班的同学和 2 个 B 班的同学；乙景点内有 2 个 A 班同学和 3 个 B 班同学，后由于某种原因，甲乙两景点各有一个同学交换景点观光.

（1）求交换后甲景点恰有 2 个 A 班同学的概率；

（2）求交换后甲景点 A 班同学数 ξ 的分布列及期望.

19．已知函数 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$（其中 $a.b.c.d.e \in R$）为偶函数，它的图象过点 $A(0,-1)$，且在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x + y - 2 = 0$.

（1）求函数 $f(x)$ 的表达式；

（2）若对任意 $x \in R$，不等式 $f(x) \le t(x^2+1)$ 总成立，求实数 t 的取值范围.

20．已知集合 $A = \{x \mid x^2 + a \le |a+1| \, x, a \in R\}$.

（1）求 A；

（2）若以 a 为首项，a 为公比的等比数列前 n 项和记为 S_n，问是否存在实数 a 使得对于任意的 $n \in N^*$，均有 $S_n \in A$.若存在，求出 a 的取值范围.若不存在，说明理由。

智康1对1

参考答案

一．填空题

1．$-4-$

2．**15**

3．**128**

4．$\frac{\pi}{3}$

5．$\boldsymbol{\pi}$

6．$\frac{1}{1024}$

二．选择题

7．**C**

8．**D**

9．**A**

10．**C**

11．**B**

12．**B**

13．**A**

14．**A**

三．计算题

15．**解：（1）在△ABC 中，由** $\cos C=\frac{3}{4}$，**得** $\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

由正弦定理 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，

得： $\sin A=\frac{\sqrt{14}}{8}$．

智康1对1

（2）设 $AC=x(x>0)$，则由余弦定理：

$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C,$

得：$2=x^2+1-2x\cdot\frac{3}{4}$,得$x^2-\frac{3}{2}x-1=0$

解得 $x=2$或$x=-\frac{1}{2}$（舍去）.

$\therefore AC=2.$

$\therefore \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos<\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}>$

$=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\pi-C)$

$=1\times2\times(-\frac{3}{4})$

$=-\frac{3}{2}.$

16．解：（1）$\because 4a_1,a_5,-2a_3$成等差数列，

$\therefore 2a_5=4a_1+(-2a_3),$

$\because a_5=a_1q^4,a_3=a_1q^2,$

$\therefore 2a_1q^4=4a_1-2\cdot a_1q^2.$

$\because a_1\neq0,$

$\therefore q^4+q^2-2=0.$

$\therefore q^2=1$或$q^2=-2$(舍去)

$\because q\neq1,\therefore q=-1.$

（2）$\because S_n=\frac{4[1-(-1)^n]}{1-(-1)}=2-2\cdot(-1)^n.$

$\therefore A_n=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$

$=[2-2\cdot(-1)^1]+[2-2\cdot(-1)^2]+[2-2\cdot(-1)^3]+\cdots+[2-2\cdot(-1)^n]$

$=2n-2\cdot[(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n]$

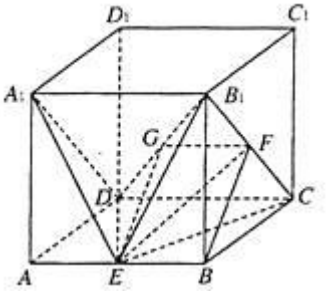
智康1对1

$$= 2n - 2\frac{-1\cdot[1-(-1)^n]}{1-(-1)}$$

$$= 2n + 1 - (-1)^n$$

17．**解法 1：（1）取 A_1D，则 $A_1D//B_1C$ 知，B_1C 与 DE 所成角即为 A_1D 与 DE 所成角**

连结 A_1E.由正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，可设其棱长为 a，



$$\text{则}A_1D = \sqrt{2}a, A_1E = DE = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore \cos\angle A_1DE = \frac{A_1D^2 + DE^2 - A_1E^2}{2\cdot A_1D\cdot DE} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

（2）取 B_1C 的中点 F，B_1D 的中点 G，连结 BF，EG，GF.

$$\because CD \perp \text{平面}BCC_1B_1, \text{且}BF \subset \text{平面}BCC_1B_1$$

$$\therefore DC \perp BF.$$

$$\text{又}\because BF \perp B_1C, CD \cap B_1C = C,$$

$$\therefore BF \perp \text{平面}B_1CD.$$

$\because$GF$\parallel\!\!\!=\frac{1}{2}CD$，BE$\parallel\!\!\!=\frac{1}{2}$CD，

$\therefore$BE$\parallel\!\!\!=$GF，$\therefore$四边形 BFGE 是平行四边形，

$\therefore$BF//GE.

$$\therefore GE \perp \text{平面}B_1CD.$$

$$\because GE \subset \text{平面}EB_1D, \therefore \text{平面}EB_1D \perp \text{平面}B_1CD.$$

（3）连结 EF.

智康1对1

$\because CD \perp B_1C, GF // CD, \therefore GF \perp B_1C.$

又$\because EG \perp$平面$B_1CD, \therefore EF \perp B_1C.$

$\therefore \angle EFG$是二面角$E-B_1C-D$的平面角.

设正方体的棱长为a,则在ΔEFG中,$GF=\frac{1}{2}a, EF=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$

$\therefore \cos\angle EFG=\frac{GF}{EF}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$\therefore$ 二面角$E-B_1C-D$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}.$

解法 2：如图建立空间直角坐标系 A—*xyz*.

则 A（0，0，0），B（2*a*，0，0）,C(0，2*a*，0)

A_1（0，0，2*a*），B（2*a*，2，2*a*），C_1（0，2*a*，2*a*）

（1）取 AB 的中点 H，连结 CH.

$\because E(0,2a,a), D(a,0,a), H(a,0,0)$

$\therefore \vec{CH}=(a,-2a,0), \vec{ED}=(a,-2a,0),$

$\therefore CH // DE. \because CH \subset$平面$ABC,$

而$DE \not\subset$平面$ABC.$

$\therefore DE //$面ABC

(1) $\because B(2a,0,0), C(0,2a,0),$

$\therefore F(a,a,0).$

$\because \vec{B_1F}=(-a,a,-2a), \vec{EF}=(a,-a,-a), \vec{AF}=(a,a,0).$

$\therefore \vec{B_1F}\cdot\vec{EF}=(-a)\cdot a+a\cdot(-a)+(-2a)\cdot(-a)=0,$

$\vec{E_1F}\cdot\vec{AF}=(-a)\cdot a+a\cdot a+(-2a)\cdot 0=0,$

$\therefore B_1F \perp EF, B_1F \perp AF.$

$\because EF \cap AF=F,$

$\therefore B_1F \perp$平面$AEF.$

（3）设平面 AB_1E 的一个法向量为$m=(x,y,z)$

$\vec{AB_1}=(2a,0,2a), \vec{AE}=(0,2a,a),$

$m\cdot\vec{AB_1}=2ax+2az=0, m\cdot\vec{AE}=2ay+az=0,$

$\therefore \begin{cases} x=-z. \\ y=-\frac{1}{2}z. \end{cases}$ 令$z=a$,则$m=(-a,-\frac{1}{2}a,a).$

智康1对1

由于平面 AEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{B_1F}=(-a,a,-2a)$,

故设 $\overrightarrow{B_1F}$ 与 m 所成角为 θ.

$$\therefore \cos\theta=\frac{B_1\vec{F}\cdot m}{|B_1\vec{F}|\cdot|m|}=\frac{a^2-\frac{1}{2}a^2-2a^2}{\sqrt{6}a\cdot\frac{3}{2}a}=-\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

由于平面 AB_1E 与平面 AEF 所成的二面角为锐二面角，

$$\therefore \text{二面角}B_1-AE-F\text{的平面角的余弦值为}\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\therefore \text{二面角}B_1-AE-F\text{的正切值为}\sqrt{5}.$$

18．解：（1）甲乙两景点各有一个同学交换后，甲景点恰有两个 A 班同学有下面几种情况：

①互换是是 A 班同学，此时甲景点恰好有两个 A 班同学的事件记为 A_1，

则 $P(A_1)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_4^1\cdot C_5^1}=\frac{1}{5}$.

②互换的是 B 班同学，此时甲景点恰好有两个 A 班同学的事件记为 A_2，

则 $P(A_2)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_4^1\cdot C_5^1}=\frac{3}{10}$

故甲景点恰有两个 A 班同学的概率 $P=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$.

（2）设交换后甲景点内 A 班同学数为 ξ，则 $P(\xi=1)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_4^1\cdot C_5^1}=\frac{3}{10}$.

$P(\xi=2)=\frac{1}{2}$; $P(\xi=3)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_4^1\cdot C_5^1}=\frac{1}{5}$.

因而 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

$E\xi=\frac{3}{10}\times1+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{5}\times3=\frac{19}{10}$.

19．解：（1）$\because f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$ 恒成立.

即$a(-x)^4+b(-x)^3+c(-x)^2+d(-x)+e=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$恒成立，

$\therefore b=0,d=0$，即$f(x)=ax^4+cx^2+e$.

又由图像过点$A(0,-1)$，可知$f(0)=-1$，即$e=-1$.

又$f'(x)=4ax^3+2cx$，由题意知函数$y=f(x)$在点$(1,0)$的切线斜率为-2，

故$f'(1)=-2$且$f(1)=0$.

$\therefore 4a+2c=-2$且$a+c-1=0$. 可得$a=-2,c=3$.

$\therefore f(x)=-2x^4+3x^2-1$.

（2）由$f(x)\le t(x^2+1)$恒成立，且x^2+1恒大于0，可得$\dfrac{-2x^4+3x^2-1}{x^2+1}\le t$恒成立.

令$g(x)=\dfrac{-2x^4+3x^2-1}{x^2+1}$，设$x^2+1=m$，则$m\ge 1$，

$\therefore g(x)=\dfrac{-2x^4+3x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{-2m^2+7m-6}{m}=7-2\left(m+\dfrac{3}{m}\right)\le 7-4\sqrt{m\cdot\dfrac{3}{m}}$

$=7-4\sqrt{3}$（当且仅当$m=\sqrt{3}$时，“=”号成立）.

$\therefore g(x)$的最大值为$7-4\sqrt{3}$，

故实数t的取值范围是$[7-4\sqrt{3},+\infty)$.

20．**解：**(1)由$x^2+a\le|a+1|\,x,a\in R$,

得$\begin{cases}a+1\ge 0,\\ x^2-(a+1)x+a\le 0,\end{cases}$ $\begin{cases}a+1<0\\ x^2+(a+1)x+a\le 0.\end{cases}$

$\therefore a>1$时,$a\le x\le a$.

$-1\le a\le 1$时,$a\le x\le 1$.

$a<-1$时,$-1\le x\le -a$.

$\therefore$当$a>1$时,$A=\{x\,|\,1\le x\le a\}$;

$-1\le a\le 1$时,$A=\{x\,|\,a\le x\le 1\}$;

$a<-1$时,$A=\{x\,|\,-1\le x\le -a\}$.

（2）①当$a\ge 1$时,$A=\{x\,|\,1\le x\le a\}$.

而当$n=2$时,$S_2=a+a^2$.

若$S_2\in A$,则$1\le a+a^2\le a$.

得$\begin{cases}a^2+a-1\ge 0,\\ a^2\le 0,\\ a\ge 1\end{cases}$

此不等式组的解集为空集.

若$a\ge 1$时,不存在满足条件的实数a.

②当$0<a<1$时,$A=\{x\mid a\le x\le 1\}$.

而$S_n=a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a}{1-a}(1-a^n)$是关于 **n** 的增函数.

且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-a}$,故$S_n\in[a,\frac{a}{1-a})$.

故对任意的$n\in N^*$,要使$S_n\in A$,只需a满足$\begin{cases}0<a<1,\\ \frac{a}{1-a}\le 1.\end{cases}$

解得$0<a\le\frac{1}{2}$.

③当$a<-1$时,$A=\{x\mid -1\le x\le -a\}$.

显然$S_1=a\notin A$,故不存在实数a满足条件.

④当$a=-1$时,$A=\{x\mid -1\le x\le 1\}$.

$S_{2n-1}=-1$,$S_{2n}=1$,适合.

⑤当$-1<a<0$时,$A=\{x\mid a\le x\le 1\}$.

$S_{2n+1}=S_{2n-1}+a_{2n}+a_{2n+1}=S_{2n-1}+a^{2n}+a^{2n+1}$

$=S_{2n-1}+a^{2n}(1+a)$

智康1对1

$\because a^{2n}>0,1+a>0,$

$\therefore a^{2n}(1+a)>0,$

$\therefore S_{2n+1}>S_{2n-1}.$

又$\because S_{2n+1}-S_{2n}$

$S_{2n+2}=S_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n+2}$

$=S_{2n}+a^{2n+1}+a^{2n+2}$

$=S_{2n}+a^{2n+1}(1+a),$

$\because a^{2n+1}=a^{2n}\cdot a<0,1+a>0,$

$\therefore a^{2n+1}(1+a)<0,$

$\therefore S_{2n+2}<S_{2n}$

又$\because S_{2n+1}-S_{2n}$

$=\frac{a(1-a^{2n+1})}{1-a}-\frac{a(1-a^{2n})}{1-a}$

$=\frac{a}{1-a}(a^{2n+1}-1+a^{2n})$

$=\frac{a}{1-a}(a^{2n}-a^{2n+1})$

$=\frac{a^{2n+1}(1-a)}{1-a}$

$=a^{2n+1}<0,$

$\therefore S_{2n+1}<S_{2n}.$

而$S_2=S_1+a^2>S_1.$

故$S_1<S_3<S_5<S_7<\cdots<S_{2n+1}<\cdots<S_{2n}<S_{2n-2}<\cdots<S_4<S_2.$

故对任意的$n\in N^*$，要使$S_n\in A$，

只需$\begin{cases}S_2\in A,\\S_1\in A,\end{cases}$即$\begin{cases}-1<a<0,\\a+a^2\le 1,\\a\ge a,\end{cases}$

解得$-1<a<0.$

综上所述，a 的取值范围是

$\{a\mid 0<a\le\frac{1}{2}$或$-1\le a<0\}.$

智康1对1