2007-2008 学年度北京市宣武区第一学期期末质量检测

高三年级数学（文）

一、填空题

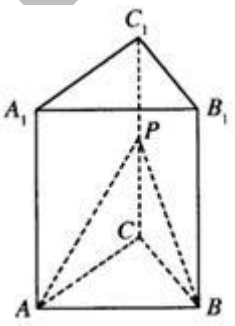
1．函数$f(x)=\sin x\cdot\cos x$的最小正周期是_____.

2．$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中常数项的值为_____.

3．数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_1+a_4=24, a_3+a_6=9$，则$a_2+a_5=$_____.

4．已知向量a,b满足$|a|=1,|b|=2$，且$a\cdot(a+b)=2$，则a与b的夹角是_____.

5．如图所示，正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面边长为 2，边底面的边AB作一截面交侧棱CC_1于P点，且截面与底面成$60°$角，则截面△PAB 的面积是_____.



6．$[x]$表示不超过x的最大整数，如[5 ，5]=5，[-5 ，5]=-6，则$[x]^2-5[x]+6\le 0$的解集是_____.

二、选择题

7．已知全集$I=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,2,3\}, B=\{3,4\}$，则$C_I(A\cap B)=$

A．{3}　　B．{4,5}　　C．{1,2,4,5}　　D．{1,2,3,4}

8．已知$\cos\theta=\frac{3}{5}$，且$\theta\in\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$，则$\tan\theta$的值为

A．$\frac{3}{4}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$-\frac{4}{3}$

9．“$x>1$”是“$\frac{1}{x}<1$”成立的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2(a_n-1)$，则$a_2=$

A．4　　B．2　　C．1　　D．-2

11．已知α,β、γ是三个互不重合的平面，l是一条直线，给出下列四个命题：

① 若$\alpha\perp\beta,l\perp\beta$，则$l//\alpha$；

② 若$l\perp\alpha,l//\beta$，则$\alpha\perp\beta$；

③ 若l上有两个点到α的距离相等，则$l//\alpha$；④若$\alpha\perp\beta,\alpha//\gamma$，则$\gamma\perp\beta$.

其中正确命题的序号是

A．①②　　B．①④　　C．②④　　D．③④

12．下列函数中，既是偶函数又在$(0,+\infty)$上单调递增的是

A．$y=x^3$　　B．$y=\cos x$　　C．$y=-x^2$　　D．$y=\ln|x|$

13．身穿兰、黄两种颜色衣服的各有两人，身穿兰色衣服的有一人，现将这五人排成一行，要求穿相同颜色衣服的人不能相邻，则不同的排法共有

A．48 种　　B．72 种　　C．78 种　　D．84 种

14．设定义在R上的函数$f(x)$的反函数为$f^{-1}(x)$，且对于任意的$x\in R$，都有$f(-x)+f(x)=3$，则$f^{-1}(x-1)+f^{-1}(4-x)$等于

A．0　　B．-2　　C．2　　D．$2x-4$

三、计算题

15．在ΔABC中，$AB=\sqrt{2},BC=1,\cos C=\frac{3}{4}$.

（1）求$\sin A$的值；

（2）求 AC.

智康1对1

16．已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=4$，公比$q\neq1$的等比数列，S_n是其前n项和，且$4a_1,a_5,-2a_3$成等差数列．

（1）求公比q的值；

（2）设$A_n=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$，求$A_n$.

17．甲盒中装有7个标号为1、2、3、4、5、6、7的小球，乙盒中装有n个标号为$1,2,3,\cdots,n$的小球，

（1）从甲盒中有放回地抽取小球3次，每次抽取一个球，求恰有两次抽取7号球的概率；

（2）现将两盒球均匀混合，从中随机抽取一个小球，若抽取的标号为n的小球的概率为$\frac{2}{13}$，求n的值．

18．已知函数$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$（其中a、b、c、d、$e\in R$）为偶函数，它的图象过点$A(0,-1)$，且在$x=1$处的切线方程为$2x+y-2=0$.

（1）求a、b、c、d、e的值，并写出函数$f(x)$的表达式；

（2）若对任意$x\in R$，不等式$f(x)\leq t(x^2+1)$总成立，求实数t的取值范围．

智康1对1

19．若 A_n 和 B_n 分别表示数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，对任意正整数 n 有 $a_n=-\frac{2n+3}{2}, 4B_n-12A_n=13n$.

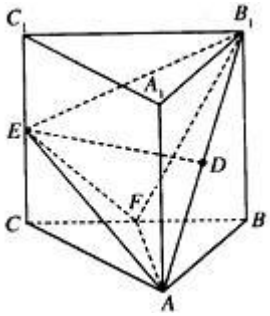
（1）求 A_n；

（2）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（3）设集合 $X=\{x\mid x=2a_n, n\in N^*\}, Y=\{y\mid y=4b_n, n\in N^*\}$，若等差数列 $\{c_n\}$ 的任一项 $c_n\in X\cap Y, c_1$ 是 $X\cap Y$ 的最大数，且 $-265<c_{10}<-125$，求 $\{c_n\}$ 的通项公式.

四、综合题

20．如图，已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，$AB=AA_1$，D、E、F 分别是 B_1A、CC_1、BC 的中点．现设 $A_1A=2a$.



（1）求证：$DE\parallel$ 平面 ABC；

（2）求证：$B_1F\perp$ 平面 AEF；

（3）求二面角 B_1-AE-F 的正切值.

智康1对1

参考答案

一、填空题

1、π　　2、**15**　　3、**15**　　4、$\frac{\pi}{3}$　　5、$2\sqrt{3}$　　6、$[2,4)$

二、选择题

7、**C**　8、**D**　9、**A**　10、**A**　11、**C**　12、**D**　13、**A**　14、**A**

三、计算题

15、**解：（1）** $\because \cos C=\frac{3}{4}, C\in(0,\pi), \therefore \sin C=\frac{\sqrt{7}}{4},$

$\because$ 在$\triangle ABC$中, $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}, \therefore \frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}, \therefore \sin A=\frac{\sqrt{14}}{8}$.

（2）设 $AC=x(x>0)$

在$\triangle ABC$中, $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C,$

$\because AB=\sqrt{2}, BC=1, \cos C=\frac{3}{4}, \therefore (\sqrt{2})^2=1+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot\frac{3}{4},$

整理后，得 $2x^2-3x-2=0.$ **解得** $x_1=2, x_2=-\frac{1}{2}$(舍去) $\therefore AC=2$

16、**解：（1）** $\because 4a_1, a_5, -2a_3$ **成等差数列，** $\therefore 2a_5=4a_1+(-2a_3),$

$\because a_5=a_1q^4, a_3=a_1q^2, \therefore 2a_1q^4=4a_1-2\cdot a_1q^2.$

$\because a_1\neq 0, \therefore q^4+q^2-2=0. \therefore q^2=1$或$q^2=-2$(舍去)

$\because q\neq 1, \therefore q=-1.$

（2） $\because S_n=\frac{4[1-(-1)^n]}{1-(-1)}=2-2\cdot(-1)^n.$

$\therefore A_n=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$

$=[2-2\cdot(-1)^1]+[2-2\cdot(-1)^2]+[2-2\cdot(-1)^3]+\cdots+[2-2\cdot(-1)^n]$

智康1对1

$$= 2n - 2\cdot[(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n]$$

$$= 2n - 2\frac{-1\cdot[1-(-1)^n]}{1-(-1)}$$

$$= 2n + 1 - (-1)^n$$

17、解：（1）恰有 2 次抽取 7 号球的概率为

$$P = C_3^2\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right) = \frac{18}{343}$$

（2）由题意，得：当$n \le 7$时，$\frac{2}{7+n} = \frac{2}{13}, \therefore n = 6$.

当$n > 7$时，有$\frac{1}{n+7} = \frac{2}{13}, \therefore n = -\frac{1}{2}$，不合题意舍去．$\therefore n = 6$.

18、解：（1）$\because f(x)$是偶函数，$\therefore f(-x) = f(x)$恒成立．

即$a(-x)^4 + b(-x)^3 + c(-x)^2 + d(-x) + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$恒成立，

$\therefore b = 0, d = 0$，即$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$.

又由图像过点$A(0,-1)$，可知$f(0) = -1$，即$e = -1$.

又$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$，由题意知函数$y = f(x)$在点$(1,0)$的切线斜率为-2，

故$f'(1) = -2$且$f(1) = 0$.

$\therefore 4a + 2c = -2$且$a + c - 1 = 0$，可得$a = -2, c = 3$.

$\therefore f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$.

（2）由$f(x) \le t(x^2+1)$恒成立，且x^2+1恒大于 0，可得$\frac{-2x^4+3x^2-1}{x^2+1} \le t$恒成立．

令$g(x) = \frac{-2x^4+3x^2-1}{x^2+1}$，设$x^2+1 = m$，则$m \ge 1$，

$$\therefore g(x) = \frac{-2x^4+3x^2-1}{x^2+1} = \frac{-2m^2+7m-6}{m} = 7 - 2\left(m + \frac{3}{m}\right) \le 7 - 4\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}$$

智康1对1

$=7-4\sqrt{3}$（当且仅当$m=\sqrt{3}$时，“=”号成立）.

$\therefore g(x)$的最大值为$7-4\sqrt{3}$，

故实数t的取值范围是$[7-4\sqrt{3},+\infty)$.

19、解：（1）$\because a_1=-\frac{5}{2},a_n-a_{n-1}=-\frac{2n+3}{2}+\frac{2(n-1)+3}{2}=-1(n\geq 2)$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以$-\frac{5}{2}$为首项，-1 为公差的等差数列，

$\therefore A_n=\frac{n\left(-\frac{5}{2}-\frac{2n+3}{2}\right)}{2}=-\frac{n(n+4)}{2}$.

（2）由$4B_n-12A_n=13n$，得$B_n=\frac{13n+12A_n}{4}=-\frac{6n^2+11n}{4}$.

$\therefore b_n=B_n-B_{n-1}=-\frac{6n^2+11n}{4}+\frac{6(n-1)^2+11(n-1)}{4}=-\frac{12n+5}{4}(n\geq 2)$.

而当$n=1$时，$B_1=b_1=-\frac{12\times 1+5}{4}=-\frac{17}{4}$.

$\therefore b_n=-\frac{12n+5}{4}$.

（3）对任意$n\in N^*,2a_n=-2n-3,4b_n=-12n-5=-2(6n+1)-3$，

所以$Y\subset X$，即$X\cap Y=Y$.

$\because c_1$是$X\cap Y$中的最大数，$\therefore c_1=-17$.

设等差数列$\{c_n\}$的公差为d，则$c_{10}=-17+9d$.

$\because -265<-17+9d<-125$，$\therefore -27\frac{5}{9}<d<-12$，

$\because\{4b_n\}$是一个以-12 为公差的等差数列，

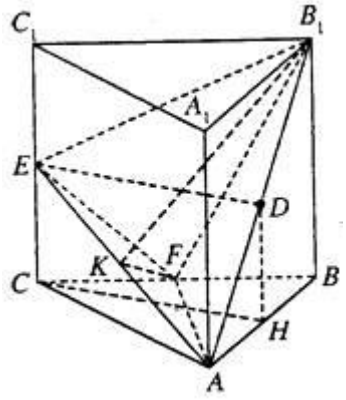
$\therefore d=-12m(m\in N^*),\therefore d=-24$，

智康1对1

$\therefore c_n = 7 - 24n (n \in N^*)$.

四、综合题

20、**解法 1：（1）取 AB 的中点 H，连结 DH**



$\because DH /\!/ \frac{1}{2} B_1B, CE /\!/ \frac{1}{2} B_1B, \therefore DH /\!/ CE.$

$\therefore$ **四边形 CHDE 为平行四边形.**

$\therefore DE /\!/ CH.$

$\because CH \subset$ 平面$ABC, DE \not\subset$ 平面$ABC,$

$\therefore DE /\!/$ 平面ABC

（2）在等腰 $Rt\Delta ABC$中$, AC = AB, \angle BAC = 90^0, F$为$BC$中点$, \therefore AF \perp CB.$

又∵直三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中，平面 ABC⊥平面 CBB_1C_1，

且平面 ABC∩平面 CBB_1C_1=CB，

∴AF⊥平面 CBB_1C_1，

又$\because B_1F \subset$平面$CBB_1C_1, \therefore AF \perp B_1F$.

由题设，CE=a，则$CF = \sqrt{2}a, FB = \sqrt{2}a, C_1E = a$，

$B_1B = 2a, C_1B_1 = 2\sqrt{2}a$.

$\therefore B_1E^2 = C_1E^2 + B_1C_1^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2,$

$EF^2 = CE^2 + CF^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2, B_1F^2 = BF^2 + B_1B^2 = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2,$

$\therefore B_1E^2 = EF^2 + B_1F^2, \therefore \angle B_1FE = 90°. \therefore B_1F \perp EF.$

智康1对1

又$\because EF \cap AF = F, \therefore B_1F \perp$平面 AEF.

（3）在平面 B_1EA 内，作$B_1K \perp AE$，垂足为 K，连结 KF.

则$KF \perp AE. \therefore \angle B_1KF$为二面角 B_1—AE—F 的平面角.

$\because$在 Rt△AFE 中，$AF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}a, EF = \sqrt{3}a$，

$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$，

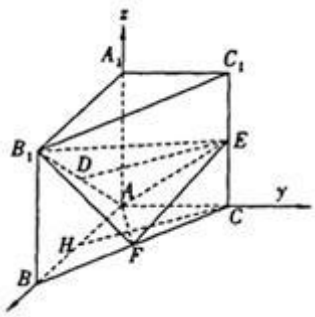
$\therefore KF = \frac{EF \cdot AF}{AE} = \frac{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{2}a}{\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}a$

$\tan \angle B_1KF = \frac{B_1F}{KF} = \frac{\sqrt{6}a}{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}a} = \sqrt{5}$

$\therefore$在 Rt△B_1FK 中，.

即二面角 B_1—AE—F 的平面角的正切值为$\sqrt{5}$.

解法 2：如图建立空间直角坐标系$A-xyz$，则



$A(0,0,0), B(2a,0,0), C(0,2a,0), A_1(0,0,2a)$，

$B_1(2a,0,2a), C_1(0,2a,2a)$.

（1） 取AB的中点 H，连结 CH.

$\because E = (0,2a,a), D(a,0,a), H(a,0,0)$，$\therefore \overline{CH} = (a,-2a,0), \overline{ED} = (a,-2a,0)$，

$\therefore CH // DE. \because CH \subset$平面 ABC，

而$DE \not\subset$平面ABC，

∴ DE // 平面 ABC.

（2）∵ $B(2a,0,0),C(0,2a,0)$. ∴ $F(a,a,0)$，

∵ $\overrightarrow{B_1F}=(-a,a,-2a),\overrightarrow{EF}=(a,-a,-a),\overrightarrow{AF}=(a,a,0)$

∵ $\overrightarrow{B_1F}=(-a,a,-2a),\overrightarrow{EF}=(a,-a,-a),\overrightarrow{AF}=(a,a,0),$

∵ $\vec{B_1F}\cdot\vec{EF}=(-a)\cdot a+a\cdot(-a)+(-2a)\cdot(-a)=0,$

$\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AF}=(-a)\cdot a+a\cdot a+(-2a)\cdot 0=0,$ ∴B$_1$F⊥EF，B$_1$F⊥AF.

∵EF∩AF=F.∴B$_1$F⊥平面 AEF.

（3）设平面 AB$_1$E 的一个法向量为 $m=(x,y,z)$

∵ $\overrightarrow{AB_1}=(2a,0,2a),\overrightarrow{AE}=(0,2a,a)$，∴ $m\cdot\overrightarrow{AB_1}=2ax+2az=0,m\cdot\overrightarrow{AE}=2ay+az=0$，

∴ $\begin{cases}x=-z.\\ y=-\frac{1}{2}z.\end{cases}$ 令 $z=a$，则 $m=(-a,-\frac{1}{2}a,a)$.

由于平面 AEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{B_1F}=(-a,a,-2a)$，

故设 $\overrightarrow{B_1F}$ 与 m 所成角为 θ.

∴ $\cos\theta=\frac{\vec{B_1F}\cdot m}{|\vec{B_1F}|\cdot|m|}=\frac{a^2-\frac{1}{2}a^2-2a^2}{\sqrt{6}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

由于平面 AB$_1$E 与平面 AEF 所成的二面角为锐二面角.

∴二面角 B$_1$—AE—F 的平面角的余弦值为 $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

∴二面角 B$_1$—AE—F 的正切值为 $\sqrt{5}$.