北京东城区2010—2011学年度第一学期期末教学统一检测

高三数学（理）试题

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共150分，考试时长120分钟，考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷（选择题，共40分）

一、本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若集合$P=\{x\mid x<4\},Q=\{x\mid x^2<4\}$，则 （ ）

A．$Q\subsetneq P$　　B．$P\subsetneq Q$　　C．$P\subsetneq C_UQ$　　D．$Q\subsetneq C_UP$

2．在复平面内，复数$i(i-1)$对应的点在 （ ）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知实数x,y满足$\begin{cases}x-y+1\geq 0,\\ y+1\geq 0,\\ x+y+1\leq 0,\end{cases}$那么2x-y的最大值为 （ ）

A．—3　　B．—2　　C．1　　D．2

4．已知α,β为不重合的两个平面，直线$m\subset\alpha$，那么“$m\perp\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的（ ）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．若$a=\log_{\frac{1}{3}}2,b=\log_{\frac{1}{2}}3,c=(\frac{1}{2})^{0.3}$，则 （ ）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

6．直线$ax+by+a+b=0$与圆$x^2+y^2=2$的位置关系为 （ ）

A．相交　　B．相切　　C．相离　　D．相交或相切

7．已知△ABD 是等边三角形，且 $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC},|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3}$，那么四边形 ABCD 的面积为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$\frac{9}{2}\sqrt{3}$

8．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若存在常数 $m>0$，对任意 $x\in R$，有 $|f(x)|\le m|x|$，则称 $f(x)$ 为 F 函数，给出下列函数：① $f(x)=x^2$；② $f(x)=\sin x+\cos x$；③ $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$；④ $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且满足对一切实数 x_1,x_2 均有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le 2|x_1-x_2|$．其中是 F 函数的序号为（　　）

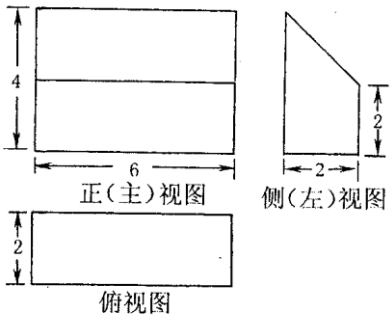
A．②④　　B．①③　　C．③④　　D．①②

第Ⅱ卷（共 10 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分

9．已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$，且 α 是第二象限角，那么 $\sin 2\alpha=$_____。

10．一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为_____。



11．在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=2$，且对任意的正整数 p，q 都有 $a_{p+q}=a_pa_q$，则 a_8 的值为_____。

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x, x>0,\\ (\frac{1}{3})^x, x\le 0,\end{cases}$ 那么不等式 $f(x)\ge 1$ 的解集为_____。

13．已知双曲线 $kx^2-y^2=1$ 的一条渐近线与直线 $2x+y+1=0$ 垂直，那么双曲线的离心 率为_____；渐近线方程为_____。

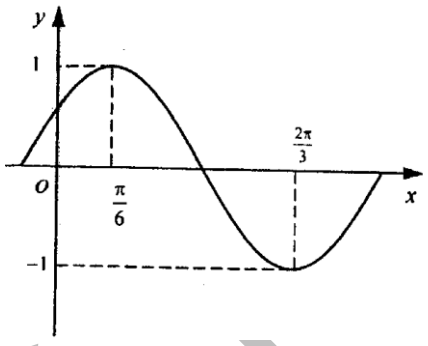
14．已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-x^2$，若在区间（0，1）内任取两个实数 p，q，且 $p\ne q$，不等式 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15．（本小题共 13 分） 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示。

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式；

（II）设 $g(x)=f(x)-\cos 2x$, 求函数 $g(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值。



16．（本小题共 13 分）已知数列 $\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+n$, 数列$\{b_n\}$满足 $b_{n+1}=2b_n-1(n\in N^*)$,且 $b_1=5.$

（I）求$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式；

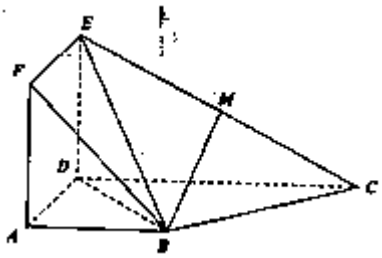
（II）设数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n,且$c_n=\frac{1}{a_n\cdot\log_2(b_n-1)}$, 证明:$T_n<\frac{1}{2}.$

17．（本小题共 14 分）如图，正方形 ADEF 与梯形 ABCD 所在的平面互相垂直，$AD\perp CD$, AB//CD，AB=AD=2，CD=4，M 为 CE 的中点。

（I）求证：BM//平面 ADEF；

（II）求证：平面 BDE 上平面 BEC；

（III）求平面 BEC 与平面 ADEF 所成锐二面角的余弦值。



18．（本小题共 13 分）已知函数 $f(x)=x\ln x.$

（I）求函数 $f(x)$ 在[1，3]上的最小值；

（II）若存在 $x\in[\frac{1}{e},e]$（e 为自然对数的底数，且 $e\approx 2.718$ ）使不等式 $2f(x)\geq -x^2+ax-3$ 成立，求实数 a 的取值范围。

智康1对1

19.（本小题共 13 分）设 A、B 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，椭圆的长轴长为 4，且点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 在该椭圆上。

（I）求椭圆的方程；

（II）设 P 为直线 x=4 上不同于点（4，0）的任意一点，若直线 AP 与椭圆相交于 A 的点 M，证明：ΔMBP 为锐角三角形。

20.（本小题共 14 分）已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中的元素都是正整数，且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，对任意的 $x,y\in A$，且 $x\neq y$,有 $|x-y|\geq\frac{xy}{25}$.

（I）求证：$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\geq\frac{n-1}{25}$;

（II）求证：$n\leq 9$;

（III）对于 n=9，试给出一个满足条件的集合 A。

智康1对1

高三数学参考答案(理科)

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

(1)A (2)C (3)C (4)A

(5)D (6)D (7)B (8)C

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分)

(9) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (10)36

(11)256 (12)$(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

(13)$\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\frac{1}{2}x\pm y=0$ (14)$[15,+\infty)$

注:两个空的填空题第一个空填对得 2 分,第二个空填对得 3 分.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 80 分)

(15)(共 13 分)

解:(Ⅰ)由图可得 $A=1$,$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,所以 $T=\pi$. …… 2 分

所以 $\omega=2$.

当 $x=\frac{\pi}{6}$时,$f(x)=1$,可得 $\sin(2\cdot\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$,

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. …… 5 分

所以 $f(x)$的解析式为 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. …… 6 分

(Ⅱ)$g(x)=f(x)-\cos2x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\cos2x$

$=\sin2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos2x\sin\frac{\pi}{6}-\cos2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. …… 10 分

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{3}$时,$g(x)$有最大值,最大值为 1;

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$,即 $x=0$ 时,$g(x)$有最小值,最小值为 $-\frac{1}{2}$. …… 13 分

(16)(共 13 分)

(Ⅰ)解:当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-[(n-1)^2+(n-1)]=2n$.

当 $n=1$ 时，$2n=2=a_1$.

所以 $a_n=2n$. …… 3分

由 $b_{n+1}=2b_n-1$，得 $b_{n+1}-1=2(b_n-1)$，又 $b_1-1=4\neq 0$.

所以 $\{b_n-1\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $b_n-1=(b_1-1)2^{n-1}=2^{n+1}$.

所以 $b_n=2^{n+1}+1$. …… 6分

(Ⅱ)证明：$c_n=\dfrac{1}{a_n\cdot\log_2(b_n-1)}=\dfrac{1}{2n\log_2(2^{n+1}+1-1)}$

$=\dfrac{1}{2n\log_2 2^{n+1}}=\dfrac{1}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$. …… 9分

故 $T_n=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$. …… 12分

所以 $T_n<\dfrac{1}{2}$. …… 13分

(17)(共14分)

(Ⅰ)证明：取 DE 中点 N，连结 MN，AN.

在△EDC 中，M，N 分别为 EC，ED 的中点，

所以 $MN\parallel CD$，且 $MN=\dfrac{1}{2}CD$.

由已知 $AB\parallel CD$，$AB=\dfrac{1}{2}CD$，

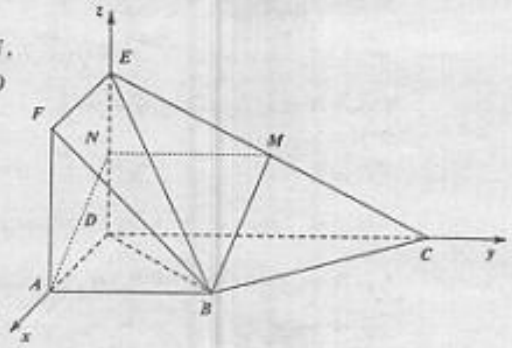
所以 $MN\parallel AB$，且 $MN=AB$.

所以四边形 $ABMN$ 为平行四边形.

所以 $BM\parallel AN$.

又因为 $AN\subset$ 平面 $ADEF$，且 $BM\not\subset$ 平面 $ADEF$，

所以 $BM\parallel$ 平面 $ADEF$. …… 4分



(Ⅱ)证明：在正方形 $ADEF$ 中，$ED\perp AD$.

又因为平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $ADEF\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $ED\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $ED\perp BC$.

在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB=AD=2$，$CD=4$，可得 $BC=2\sqrt{2}$.

在△BCD 中，$BD=BC=2\sqrt{2}$，$CD=4$，所以 $BC\perp BD$.

所以 $BC\perp$ 平面 BDE.

又因为 $BC\subset$ 平面 BCE，

所以平面 $BDE\perp$平面 BEC. …… 9分

(Ⅲ)解:由(Ⅱ)知 $ED\perp$平面 $ABCD$,且 $AD\perp CD$.

以 D 为原点,DA,DC,DE 所在直线为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系.

$B(2,2,0)$,$C(0,4,0)$,$E(0,0,2)$.

平面 $ADEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BEC 的一个法向量,

因为 $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{CE}=(0,-4,2)$,

所以 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\-4y+2z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$,得 $y=1$,$z=2$.

所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$ 为平面 BEC 的一个法向量.

设平面 BEC 与平面 $ADEF$ 所成锐二面角为 θ.

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{1\cdot\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以平面 BEC 与平面 $ADEF$ 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. …… 14分

(18)(共13分)

解:(Ⅰ)由 $f(x)=x\ln x$,可得 $f'(x)=\ln x+1$. …… 2分

当 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

所以函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增.

又 $f(1)=\ln 1=0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值为 0. …… 6分

(Ⅱ)由题意知,$2x\ln x\geqslant -x^2+ax-3$,则 $a\leqslant 2\ln x+x+\dfrac{3}{x}$.

若存在 $x\in[\dfrac{1}{e},e]$ 使不等式 $2f(x)\geqslant -x^2+ax-3$ 成立,

只需 a 小于或等于 $2\ln x+x+\dfrac{3}{x}$ 的最大值.

设 $h(x)=2\ln x+x+\dfrac{3}{x}(x>0)$,则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}+1-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{(x+3)(x-1)}{x^2}$.

当 $x\in[\dfrac{1}{e},1)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;

当 $x\in(1,e]$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增.

由 $h(\dfrac{1}{e})=-2+\dfrac{1}{e}+3e$,$h(e)=2+e+\dfrac{3}{e}$,$h(\dfrac{1}{e})-h(e)=2e-\dfrac{2}{e}-4>0$,

可得 $h(\dfrac{1}{e})>h(e)$.

所以,当 $x\in[\dfrac{1}{e},e]$ 时,$h(x)$ 的最大值为 $h(\dfrac{1}{e})=-2+\dfrac{1}{e}+3e$.

故 $a \leq -2+\frac{1}{e}+3e$. …… 13 分

(19)(共 13 分)

(Ⅰ)解:由题意 $2a=4$,所以 $a=2$.

所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

又点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上,可得 $b^2=1$.

所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …… 4 分

(Ⅱ)证明:由(Ⅰ)知 $A(-2,0)$,$B(2,0)$.

设 $P(4,t)(t\neq 0)$,$M(x_M,y_M)$.

则直线 PA 的方程为:$y=\frac{t}{6}(x+2)$.

由 $\begin{cases} y=\frac{t}{6}(x+2), \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 得 $(9+t^2)x^2+4t^2x+4t^2-36=0$.

因为直线 PA 与椭圆相交于异于 A 的点 M,

所以 $-2+x_M=\frac{-4t^2}{9+t^2}$,所以 $x_M=\frac{-2t^2+18}{9+t^2}$.

由 $y_M=\frac{t}{6}(x_M+2)$,得 $y_M=\frac{6t}{9+t^2}$.

所以 $M(\frac{-2t^2+18}{9+t^2},\frac{6t}{9+t^2})$.

从而 $\overrightarrow{BM}=(-\frac{4t^2}{9+t^2},\frac{6t}{9+t^2})$,$\overrightarrow{BP}=(2,t)$.

所以 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}=-\frac{8t^2}{9+t^2}+\frac{6t^2}{9+t^2}=-\frac{2t^2}{9+t^2}<0$.

又 M,B,P 三点不共线,所以 $\angle MBP$ 为钝角.

所以 $\triangle MBP$ 为钝角三角形. …… 13 分

(20)(共 14 分)

(Ⅰ)证明:依题意有 $|a_i-a_{i+1}|\geq\frac{a_ia_{i+1}}{25}(i=1,2,\cdots,n-1)$,又 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,

因此 $a_{i+1}-a_i\geq\frac{a_ia_{i+1}}{25}(i=1,2\cdots,n-1)$.

可得 $\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\geq\frac{1}{25}(i=1,2,\cdots,n-1)$.

所以 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\geq\frac{n-1}{25}$.

即 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\geq\frac{n-1}{25}$. …… 4 分

(Ⅱ)证明:由(Ⅰ)可得 $\frac{1}{a_1}>\frac{n-1}{25}$.

又 $a_1 \geqslant 1$，可得 $1 > \frac{n-1}{25}$，因此 $n < 26$.

同理 $\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n-i}{25}$，可知 $\frac{1}{a_i} > \frac{n-i}{25}$.

又 $a_i \geqslant i$，可得 $\frac{1}{i} > \frac{n-i}{25}$.

所以 $i(n-i) < 25 (i = 1,2,\cdots,n-1)$ 均成立.

当 $n \geqslant 10$ 时，取 $i = 5$，则 $i(n-i) = 5(n-5) \geqslant 25$，

可知 $n < 10$.

又当 $n \leqslant 9$ 时，$i(n-i) \leqslant (\frac{i+n-i}{2})^2 = (\frac{n}{2})^2 < 25$.

所以 $n \leqslant 9$. …… 9 分

(Ⅲ)解：对于任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，$a_i < a_{i+1} \leqslant a_j$，

由 $\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \geqslant \frac{1}{25} (i = 1,2,\cdots,n-1)$ 可知，

$\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_j} \geqslant \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \geqslant \frac{1}{25}$，即 $|a_i - a_j| \geqslant \frac{a_i a_j}{25}$.

因此，只需对 $1 \leqslant i < n$，$\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \geqslant \frac{1}{25}$ 成立即可.

因为 $1 - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{25}$；$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{25}$；$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{25}$；$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{25}$，

因此可设 $a_1 = 1$；$a_2 = 2$；$a_3 = 3$；$a_4 = 4$；$a_5 = 5$.

由 $\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_6} \geqslant \frac{1}{25}$，可得 $a_6 \geqslant \frac{25}{4}$，取 $a_6 = 7$.

由 $\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_7} \geqslant \frac{1}{25}$，可得 $a_7 \geqslant \frac{175}{18}$，取 $a_7 = 10$.

由 $\frac{1}{a_7} - \frac{1}{a_8} \geqslant \frac{1}{25}$，可得 $a_8 \geqslant \frac{50}{3}$，取 $a_8 = 20$.

由 $\frac{1}{a_8} - \frac{1}{a_9} \geqslant \frac{1}{25}$，可得 $a_9 \geqslant 100$，取 $a_9 = 100$.

所以满足条件的一个集合 $A = \{1,2,3,4,5,7,10,20,100\}$. …… 14 分