北京市朝阳区 2008-2009 学年第一学期期末统一考试

高三数学试卷（文科）

2009．2

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 10 页，共 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷（选择题　共 40 分）

注意事项:

每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 不能答在试卷上.

一、选择题 ：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。在每个小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.若 $\cos\alpha>0$，且 $\tan\alpha<0$，则 α 是（　）

A．第一象限角　　B．第二象限角

C．第三象限角　　D．第四象限角

2. 设平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,5)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=$（　　）

A．$(7,-1)$　　B．$(-1,7)$　　C．$(7,7)$　　D．$(1,6)$

3. 已知函数 $f(x)=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），其反函数为 $f^{-1}(x)$.若 $f(2)=9$，则 $f^{-1}(\frac{1}{3})+f(0)$ 的值是（　　）

A．-1　　B．1　　C．2　　D．3

4.某学校有教师 200 人，其中高级教师 60 人，一级教师 100 人，二级教师 40 人，为了了解教师的健康状况，从中抽取 40 人的一个样本，用分层抽样的方法抽取高级、一级、二级教师的人数分别是（　　）

A．20，12，8　　B．12，20，8　　C．15，15，10　　D．14，12，14

5.已知 m,n 是两条不同直线，α,β 是两个不同平面，下列命题中的真命题是（　　）

A．如果 $m\subset\alpha,n\subset\beta,m\perp n$，那么 $\alpha\perp\beta$

B．如果$m\subset\alpha,n\subset\beta,\alpha\perp\beta$，那么$m\perp n$

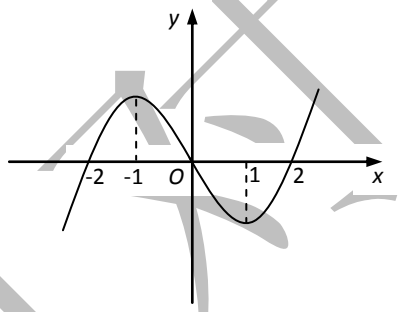
C．如果 $m\subset\alpha,n\subset\beta,\alpha\perp\beta$且$m,n$共面，那么$m\parallel n$

D．如果$m\parallel n,m\perp\alpha$， $n\perp\beta$,那么$\alpha\perp\beta$

6.从原点向圆$x^2+y^2-8y+12=0$引两条切线，则两条切线所夹的劣弧的弧长是（　　）

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．$\frac{4\pi}{3}$　　D．π

7. 在$\mathbf{R}$上可导的函数$f(x)$的图象如图所示，则关于x的不等式$x\cdot f'(x)<0$的解集为(　　).



A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C．$(-2,-1)\cup(1,2)$

D．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

8. 在$\mathbf{R}$上定义运算$*$：$x*y=x\cdot(1-y)$．若关于x的不等式$x*(x-a)>0$的解集是集合$\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$的子集，则实数a的取值范围是（　）

A．$[0,2]$　　B．$[-2,-1)\cup(-1,0]$　　C．$[0,1)\cup(1,2]$　　D．$[-2,0]$

第Ⅱ卷（ 共 110 分）

注意事项： 1. 用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上.

2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚.

二、填空题 ：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。把答案填在题中横线上.

9．已知直线$ax-y=0$与直线$2x+3y+1=0$平行，则$a=$_____.

10.$(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^6$的展开式中常数项是_____.

11. 已知实数 x，y 满足不等式组 $\begin{cases} y \le x, \\ x+y \le 2, \\ y \ge 0 \end{cases}$，那么函数 $z=x+3y$ 的最大值是_____.

12. 从 5 名男生和 2 名女生中选 3 人参加英语演讲比赛，则必有女生参加的选法共有_____.(用数字作答)

13. 从数列 $\{3n+\log_2 n\}$ 中，顺次取出第 2 项、第 4 项、第 8 项、…、第 2^n 项、…，按原来的顺序组成一个新数列 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=$_____，前 5 项和 S_5 等于_____ .

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，Q 为双曲线左准线上的点，且 QF 交双曲线于第一象限一点 P，若 O 为坐标原点，且 OP 垂直平分 FQ，则双曲线的离心率 $e=$_____.

三、解答题 ：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边长分别 a,b,c，且满足 $\sin C-\sin B\cos A=0$.

（Ⅰ）求角 B 的值；

（Ⅱ）若 $\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求 $\frac{a}{b+c}$ 的值.

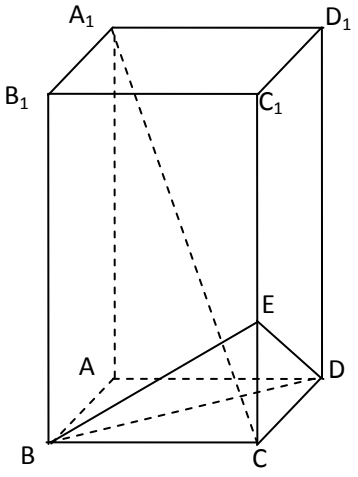
16.（本小题满分 13 分）某高等学校自愿献血的 50 位同学的血型分布的情况如下表：

血型	A	B	AB	O
人数	20	10	5	15

（Ⅰ）从这 50 位同学中随机选出 2 人，求这 2 人血型都为 A 型的概率；

（Ⅱ）从这 50 位同学中随机选出 2 人，求这 2 人血型相同的概率.

17.（本小题满分 13 分）如图，在正四棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1=4$，AB=2，点 E 在棱 CC_1 上，且 CE=1.



（Ⅰ）求证：BE∥平面 AA_1D_1D；

（Ⅱ）求二面角 B—ED—C 的大小；

（Ⅲ）求证：A_1C⊥平面 BDE.

18.（本小题满分 13 分）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$a_1=1,a_{n+1}=2S_n+1$，数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1$，点$P(b_n,b_{n+1})$在直线$x-y+2=0$上，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

19.（本小题满分 14 分）已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+c(a,b,c\in\mathbf{R})$的图象过点$P(-1,2)$，且在点$P$处的切线与直线$x-3y=0$垂直.

（Ⅰ）若$c=0$，试求函数$f(x)$的单调区间；

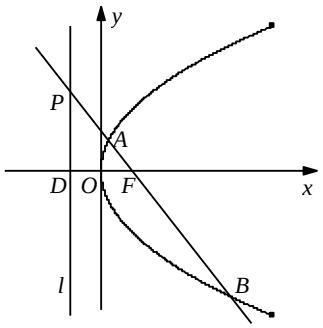
（Ⅱ）若$a>0,b>0$，且函数$f(x)$在$(-\infty,m),(n,+\infty)$上单调递增，试求$n-m$的范围.

20.（本小题满分 14 分）已知点F为抛物线$C:y^2=4x$的焦点，点P是准线l上的动点，直线PF交抛物线C于A,B两点，若点P的纵坐标为$m(m\neq0)$，点D为准线l与x轴的交点.

（Ⅰ）求直线PF的方程；

（Ⅱ）求ΔDAB的面积S范围；

（Ⅲ）设$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{PB}$，求证$\lambda+\mu$为定值.



北京市朝阳区高三统一考试

数学试卷答案(文科) 2009.2

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	B	C	C	A	D

二、填空题:

9. $-\frac{2}{3}$ 10. 15 11. 4 12.25 13. $a_n=3\times 2^n+n$；$S_5=201$ 14. $\sqrt{7}$

三、解答题:

15. （Ⅰ）解： 因为 $\sin C-\sin B\cos A=0$，所以 $\sin(A+B)=\cos A\sin B$.

所以 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\cos A\sin B$.即 $\sin A\cos B$ =0.在三角形 ABC 中，

$\sin A\neq 0$,所以 $\cos B$ =0.得 $B=90^\circ$. ……6 分

（Ⅱ）因为 $\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$\cos A=\frac{3}{5}$.

所以 $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1}{2}$. ……13 分

16. 解：（Ⅰ）记“这 2 人血型都为 A 型”为事件 A，那么 $P(A)=\frac{C_{20}^2}{C_{50}^2}=\frac{38}{245}$，

即这 2 人血型都为 A 型的概率是 $\frac{38}{245}$. ……6 分

（Ⅱ）记“这 2 人血型相同”为事件 B，那么 $P(B)=\frac{C_{20}^2+C_{10}^2+C_5^2+C_{15}^2}{C_{50}^2}=\frac{350}{1225}=\frac{2}{7}$，

所以这 2 人血型相同的概率是 $\frac{2}{7}$. ……13 分

17. 解法（一）

（Ⅰ）证明： 由已知，ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，

所以平面 BB_1C_1C // 平面 AA_1D_1D,

又因为 $BE\subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以，BE // 平面 AA_1D_1D. ……4 分

（Ⅱ）解：如图 1，过 C 作 CH⊥ED 于 H，连接 BH.

因为 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，

所以 BC⊥平面 CC_1D_1D，

所以 CH 是斜线 BH 在面 CC_1D_1D 上的射影,

由三垂线定理可知，BH⊥ED.

所以∠BHC 是二面角 B—ED—C 的平面角.

在 Rt△ECD 中，易知 $CH\square ED=EC\square CD$.

因为 $EC=1,CD=2,ED=\sqrt{5}$，所以 $CH=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

在 Rt△BCH 中， $\tan\angle BHC=\frac{BC}{CH}=\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\sqrt{5}$,

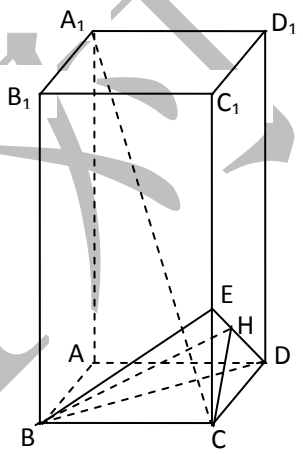


图 1

所以 $\angle BHC=\arctan\sqrt{5}$.

故二面角 B—ED—C 的大小是 $\arctan\sqrt{5}$. ……9 分

（Ⅲ）如图 2，连结 AC 交 BD 于点 O,

因为 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，

AC⊥BD，AA_1⊥平面 ABCD，

由三垂线定理可知，A_1C⊥BD.

连结 B_1C，因为 A_1B_1⊥平面 B_1BCC_1，

所以 B_1C 是 A_1C 在平面 BB_1C_1C 上的射影.

设 B_1C 交 BE 于 F,

由已知 $BB_1=AA_1=4$，BC=AB=2，CE=1,

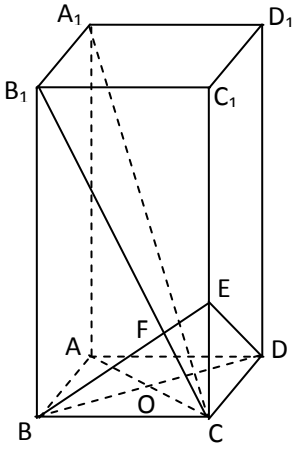


图 2

所以 $\frac{CE}{BC}=\frac{BC}{B_1B}$，所以 $\Delta BCE\backsim\Delta B_1BC$.

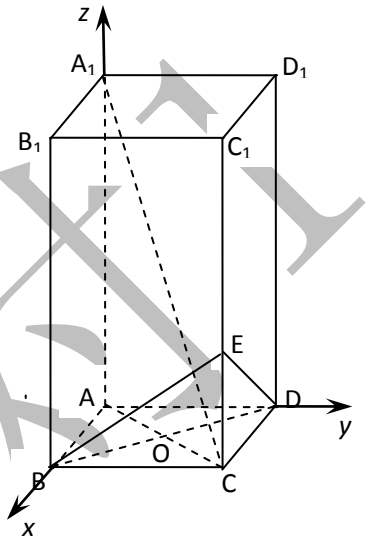
所以∠CBE=∠BB$_1$C.

又因为∠CBE+∠B$_1$BE=90°； 所以∠BB$_1$C +∠B$_1$BE=90°;

所以∠B$_1$FB=90°； 所以 B$_1$C⊥BE.

由三垂线定理可知，A$_1$C⊥BE，又 $BE\cap BD=B$，

所以 A$_1$C⊥平面 BDE. ……14 分



解法（二）建立空间直角坐标系 A—xyz，如图,

（Ⅰ）证明：

依题意可知 E（2，2，1）,B（2，0，0），所以 $\overrightarrow{BE}$=（0，2，1）.

又因为 $\overrightarrow{AB}=(2,\ 0,\ 0)$， $\overrightarrow{AB}$ 为平面 AA$_1$D$_1$D 的法向量.

且 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=(2,0,0)\cdot(0,2,1)=0$，

所以 $\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{AB}$， 而 BE⊄平面 AA$_1D_1$D,

所以，BE∥平面 AA$_1$D$_1$D. ……3 分

（Ⅱ）因为 E（2，2，1）,又 B（2,0,0）,D(0,2,0),

所以 $\overrightarrow{BE}$=（0，2，1），$\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,1)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2y+1=0,\\ -2x+2y=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\ y=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{n}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$. 又 $AD\perp$面 CC_1D_1D,所以 $\overrightarrow{AD}$ 为平面 CDE 的法向量.

因为 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$,所以 $\cos\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AD}\right\rangle=\frac{-1}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

由图可知,二面角的平面角小于90°,

所以二面角 B—ED—C 的大小是 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. ……9 分

（Ⅲ）解：由题意 B（2，0，0），C（2，2，0），D（0，2，0），A_1（0，0，4），

因为 CE=1，则 E（2，2，1），

所以 $\overrightarrow{BD}=(-2,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,\ 2,\ 1)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,\ 2,\ -4)$.

由 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{A_1C}=(-2,\ 2,\ 0)\cdot(2,\ 2,\ -4)=(-2)\times 2+2\times 2+0\times(-4)=0$，得 $A_1C\perp BD$,

由 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{A_1C}=(0,\ 2,\ 1)\cdot(2,\ 2,\ -4)=0\times 2+2\times 2+1\times(-4)=0$，得 $A_1C\perp BE$,

又 $BE\cap BD=B$，所以 $A_1C\perp$ 平面 BDE. ……13 分

18.解：（Ⅰ）由 $a_{n+1}=2S_n+1$ 可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geq 2)$，两式相减得

$a_{n+1}-a_n=2a_n, a_{n+1}=3a_n\ (n\geq 2)$.

又 $a_2=2S_1+1=3$,所以 $a_2=3a_1$.

故 $\{a_n\}$ 是首项为1，公比为3的等比数列.

所以 $a_n=3^{n-1}$.

由点 $P(b_n,b_{n+1})$ 在直线 $x-y+2=0$ 上，所以 $b_{n+1}-b_n=2$.

则数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列.

则 $b_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$. ……6 分

（Ⅱ）因为 $c_n=\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n-1}{3^{n-1}}$，所以 $T_n=\frac{1}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n-1}}$.

则 $\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-3}{3^{n-1}}+\frac{2n-1}{3^n}$,两式相减得：

$\frac{2}{3}T_n=1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{2n-1}{3^n}$.

所以 $T_n=3-\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}-\frac{2n-1}{2\cdot 3^{n-1}}=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$. ……13 分

智康1对1

19. **解：**（Ⅰ）因为 $f(x)$ 的图象过点 $P(-1,2)$，所以 $-a+b+c=2.$

又 $f'(x)=3ax^2+2bx$，且在点 P 处的切线与直线 $x-3y=0$ 垂直.

所以 $3a-2b=-3$，且 $c=0$，所以 $a=1,b=3.$ 所以 $f(x)=3x^2+6x.$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x_1=0,x_2=-2.$ 显然当 $x<-2$ 或 $x>0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0.$ 则函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-2),(0,+\infty)$，函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(-2,0)$. ……6 分

（Ⅱ）令 $f'(x)=3ax^2+2bx=0$，得 $x_1=0,x_2=-\dfrac{2b}{3a}$.

因为 $a>0,b>0$，所以当 $x>0$ 或 $x<-\dfrac{2b}{3a}$ 时，$f'(x)>0$，

即函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $\left(-\infty,-\dfrac{2b}{3a}\right),(0,+\infty)$.

所以 $n-m\geq 0-\left(-\dfrac{2b}{3a}\right)=\dfrac{2b}{3a}.$

又由（Ⅰ）知：$3a-2b=-3$，

所以 $n-m\geq\dfrac{2b}{3a}=\dfrac{3a+3}{3a}=1+\dfrac{1}{a}>1.$

所以 $n-m>1.$ ……13 分

20.解：（Ⅰ）由题知点 P,F 的坐标分别为 $(-1,m)$，$(1,0)$，

于是直线 PF 的斜率为 $-\dfrac{m}{2}$，

所以直线 PF 的方程为 $y=-\dfrac{m}{2}(x-1)$，即为 $mx+2y-m=0$. ……3 分

（Ⅱ）设 A,B 两点的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=-\dfrac{m}{2}(x-1),\end{cases}$ 得 $m^2x^2-(2m^2+16)x+m^2=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{2m^2+16}{m^2}$，$x_1x_2=1$.

于是 $|AB|=x_1+x_2+2=\dfrac{4m^2+16}{m^2}$.

点 D 到直线 $mx+2y-m=0$ 的距离 $d=\dfrac{2|m|}{\sqrt{m^2+4}}$，

所以 $S=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\dfrac{4(m^2+4)}{m^2}\dfrac{2|m|}{\sqrt{m^2+4}}=4\sqrt{1+\dfrac{4}{m^2}}$.

因为 $m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq 0$，于是 $S>4$，

所以 ΔDAB 的面积 S 范围是 $(4,+\infty)$. ……9 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）及 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{PB}$，得

$(1-x_1,-y_1)=\lambda(x_2-1,y_2)$，$(-1-x_1,m-y_1)=\mu(x_2+1,y_2-m)$，

于是 $\lambda=\dfrac{1-x_1}{x_2-1}$，$\mu=\dfrac{-1-x_1}{x_2+1}$（$x_2\neq\pm1$）.

所以 $\lambda+\mu=\dfrac{1-x_1}{x_2-1}+\dfrac{-1-x_1}{x_2+1}=\dfrac{2-2x_1x_2}{(x_2-1)(x_2+1)}=0$.

所以 $\lambda+\mu$ 为定值 0. ……14 分

智康1对1