北京市朝阳区2011届第一学期期末考试

高三数学试卷（理）详解与巩固

【试题部分】

第一部分（选择题 共40分）

注意事项：

1. 答第I卷前，考生务必将自己的姓名、考试科目涂写在答题卡上. 考试结束时，将试题卷和答题卡一并交回.

2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，不能答在试题卷上.

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设全集$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\,|\,x(x-2)<0\}$，$B=\{x\,|\,y=\ln(1-x)\}$，则$A\cap(\complement_U B)$是

A. $(-2,\ 1)$　　B. $[1,\ 2)$　　C. $(-2,\ 1]$　　D. $(1,\ 2)$

2. 要得到函数$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$的图象，只要将函数$y=\sin 2x$的图象

A. 向左平移$\frac{\pi}{4}$单位　　B. 向右平移$\frac{\pi}{4}$单位

C. 向右平移$\frac{\pi}{8}$单位　　D. 向左平移$\frac{\pi}{8}$单位

3. 设α，β，γ是三个不重合的平面，l是直线，给出下列命题

① 若$\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$，则$\alpha\perp\gamma$；　　② 若l上两点到α的距离相等，则$l//\alpha$；

③ 若$l\perp\alpha$，$l//\beta$，则$\alpha\perp\beta$；　　④ 若$\alpha//\beta$，$l\subset\beta$，且$l//\alpha$，则$l//\beta$.

其中正确的命题是

A. ①②　　B. ②③　　C. ②④　　D. ③④

4. 下列函数中，在$(-1,\ 1)$内有零点且单调递增的是

A．$y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　B．$y=2^x-1$　　C．$y=x^2-\frac{1}{2}$　　D．$y=-x^3$

5．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_n=2a_n-2$，则a_2等于

A． 4　　B．2　　C．1　　D． -2

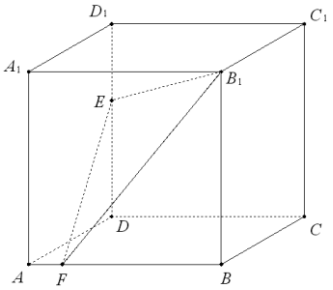
6．若 A 为不等式组$\begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ y-x\leqslant 2\end{cases}$表示的平面区域，则$a$从-2 连续变化到 1 时，动直线$x+y=a$扫过 A 中的那部分区域的面积为

A．$9\sqrt{13}$　　B．$3\sqrt{13}$　　C．$\frac{7}{2}$　　D．$\frac{7}{4}$

7．在ΔABC中，M是BC的中点，$AM=1$，点P在AM上且满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$等于

A．$-\frac{4}{9}$　　B．$-\frac{4}{3}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{4}{9}$

8．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为棱DD_1，AB上的点．已知下列判断：



① $A_1C\perp$平面B_1EF；

② ΔB_1EF在侧面BCC_1B_1上的正投影是面积为定值的三角形；

③在平面$A_1B_1C_1D_1$内总存在与平面B_1EF平行的直线；

④平面B_1EF与平面$ABCD$所成的二面角（锐角）的大小与点E的位置有关，与点F的位置无关．

其中正确判断的个数有

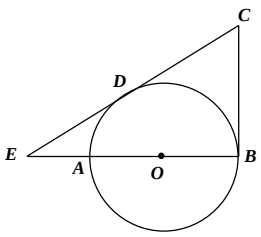
A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在题中横线上．

9．已知$\cos(\pi+x)=\frac{3}{5}$，$x\in(\pi,\ 2\pi)$，则$\tan x=$_____．

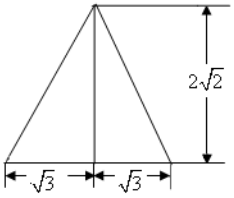
10．如图，AB是⊙O的直径，CB切⊙O于点B，CD切⊙O于点D，CD交BA的延长线于点E．若$AB=3$，$ED=2$，则BC的长为_____．



智康1对1

11．曲线$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）与曲线 $\rho^2-2\rho\cos\theta=0$ 的直角坐标方程分别为_____，_____，两条曲线的交点个数为_____个．

12．已知一个正三棱锥的正视图如图所示，则此正三棱锥的侧面积等于_____．



13．已知点 F_1，F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A，B 两点，若 ΔABF_2 是锐角三角形，则该双曲线离心率的取值范围是_____．

14．已知数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$a_n=\log_{n+1}(n+2)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，定义使 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\ldots\cdot a_k$ 为整数的数 k $(k\in\mathbf{N}^*)$ 叫做企盼数，则区间 $[1,\ 2011]$ 内所有的企盼数的和为_____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题满分 13 分）已知△ ABC 中，$2\sin A\cos B=\sin C\cos B+\cos C\sin B$．

（Ⅰ）求角 B 的大小；

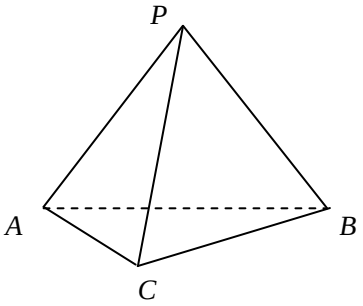
（Ⅱ）设向量 $\boldsymbol{m}=(\cos A,\ \cos 2A)$，$\boldsymbol{n}=(-\frac{12}{5},\ 1)$，求当 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 取最小值时，$\tan(A-\frac{\pi}{4})$ 的值．

16．（本小题满分 13 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC=BC=2$，$\angle ACB=90^\circ$，侧面 PAB 为等边三角形，侧棱 $PC=2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求证：$PC\perp AB$；

（Ⅱ）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 ABC；

（Ⅲ）求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值．



17．（本小题满分 13 分）已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\frac{1-a}{x}-1$ $(a\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,\ f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时，讨论$f(x)$的单调性.

18.（本小题满分 13 分）已知函数$f(x)=ax^2+bx+1$（a, b为实数，$a\neq 0$，$x\in\mathbf{R}$），$F(x)=\begin{cases}f(x) & x>0\\ -f(x) & x<0.\end{cases}$

（Ⅰ）若$f(-1)=0$，且函数$f(x)$的值域为$[0,\ +\infty)$，求$F(x)$的表达式；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，当$x\in[-2,\ 2]$时，$g(x)=f(x)-kx$是单调函数，求实数k的取值范围；

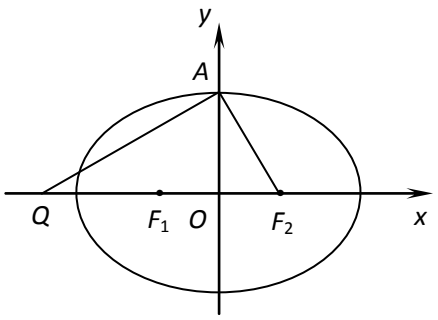
（Ⅲ）设$mn<0$，$m+n>0$，$a>0$，且函数$f(x)$为偶函数，判断$F(m)+F(n)$是否大于 0？

19.（本小题满分 14 分）设椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$, F_2，上顶点为A，过点A与AF_2垂直的直线交x轴负半轴于点Q，且$2\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_2Q}=\mathbf{0}$，若过$A$，$Q$，$F_2$三点的圆恰好与直线$l$：$x-\sqrt{3}y-3=0$相切．过定点$M(0,\ 2)$的直线$l_1$与椭圆$C$交于$G$，$H$两点（点$G$在点$M$，$H$之间）.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设直线l_1的斜率$k>0$，在x轴上是否存在点$P(m,\ 0)$，使得以PG，PH为邻边的平行四边形是菱形.如果存在，求出m的取值范围，如果不存在，请说明理由；

（Ⅲ）若实数λ满足$\overrightarrow{MG}=\lambda\overrightarrow{MH}$，求$\lambda$的取值范围.



20.（本小题满分 14 分）已知函数$f(x)=\frac{ax+b}{cx^2+1}$（a，b，c为常数，$a\neq 0$）.

（Ⅰ）若$c=0$时，数列$\{a_n\}$满足条件：点$(n,\ a_n)$在函数$f(x)=\frac{ax+b}{cx^2+1}$的图象上，求$\{a_n\}$的前n项和S_n；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，若$a_3=7$，$S_4=24$，$p,\ q\in\mathbf{N}^*$（$p\neq q$），证明：$S_{p+q}<\frac{1}{2}(S_{2p}+S_{2q})$；

（Ⅲ）若$c=1$时，$f(x)$是奇函数，$f(1)=1$，数列$\{x_n\}$满足$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=f(x_n)$，求证：$\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n+1})^2}{x_nx_{n+1}}<\frac{5}{16}$.

北京市朝阳区 2011 届高三第一学期期末考试数学试卷（理）详解与巩固

【解析部分】

一、选择题：

1.【答案】：B

【考点】：集合的基本运算；对数函数的图象及其性质；解一元二次不等式

【解析】：$x(x-2)<0\Rightarrow x\in(0,2)\Rightarrow A=\{x\,|\,0<x<2\}$；$B=\{x\,|\,x<1\}\Rightarrow \complement_U B=\{x\,|\,x\geq 1\}$

所以 $A\cap\complement_U B=[1,2)$。

2.【答案】：C

【考点】：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

【解析】：$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin[2(x-\frac{\pi}{8})]$，所以需要向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位。

3.【答案】：D

【考点】：线、面平行或垂直的判定；线、面平行或垂直的性质

【解析】：对于①若 $\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma$，前者不是后者的充分条件，比如当 $\alpha//\gamma$ 时，也有 $\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$。对于②若 l 上两点到 α 的距离相等，则 $l//\alpha$，显然错误。当 $l\perp\alpha, l\cap\alpha=A$ 时，l 上到 A 距离相等的两点到 α 的距离相等。③④显然正确.

4.【答案】：B

【考点】：函数的零点；单调性与最大（小）值

【解析】：由单调递增则可直接排除 A、C、D。函数 $y=2^x-1$ 的零点是 $x=0$.

5.【答案】：A

【考点】：数列的概念和表示法

【解析】：解法一：大题通法：$n\geq 2$ 时，$S_n=2a_n-2; S_{n-1}=2a_{n-1}-2$，所以 $a_n=2a_{n-1}$，

$n=1$ 时，$S_1=2a_1-2\Rightarrow a_1=2$，所以 $a_2=4$。

解法二：对于本题，只求第 2 项，因而：$a_1=2a_1-2\Rightarrow a_1=2$，$2+a_2=2a_2-2\Rightarrow a_2=4$。

6.【答案】：D

【考点】：用二元一次不等式组表示平面区域

【解析】：作出平面区域，直线 $x+y=a$，当 a 从-2 连续变化到 1 时，动直线 $x+y=a$ 扫过 A 中的那部

分区域的面积为直线 $x+y=1$，直线 $-x+y=2$，x 轴，y 轴所围成图形的面积，因而面积为 $\frac{7}{4}$。

7.【答案】：A

【考点】：向量加法与减法

【解析】：$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=|\overrightarrow{PA}|^2\cdot\cos180°$，又 $|\overrightarrow{AM}|=1\Rightarrow|\overrightarrow{PA}|=\frac{2}{3}$

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=-\frac{4}{9}$。

8.【答案】：B

【考点】：公理 l、公理 2、公理 3、公理 4、定理；三视图；线、面平行或垂直的判定；线线、线面、面面的夹角。

【解析】：对于① $A_1C\perp$ 平面 B_1EF，显然错误。② ΔB_1EF 在侧面 BCC_1B_1 上的正投影是面积为定值的三角形，显然正确。这个三角形可以看成是以 BB_1 为底，以 F 在 CC_1 上的投影点 F' 到 BB_1 的距离为高的三角形，而这段高为正方形 BCC_1B_1 的边长，因而三角形面积为定值，③在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内总存在与平面 B_1EF 平行的直线，显然正确；④平面 B_1EF 与平面 $ABCD$ 所成的二面角（锐角）的大小与点 E 的位置有关，与点 F 的位置无关．可采用特殊值法，令 E 与 D_1 重合，F 在边 AB 上移动，二面角的大小显然在变化，因而错误。

二、填空题：

9.【答案】：$\frac{4}{3}$

【考点】：诱导公式；同角三角函数的基本关系式

【解析】：$x\in(\pi,\ 2\pi),\pi+x\in(2\pi,\ 3\pi)$；$\cos(\pi+x)=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos x=-\frac{3}{5}\Rightarrow\tan x=\frac{4}{3}.$

10.【答案】：3

【考点】：圆的切线的判定定理及性质定理；切割线定理

【解析】：连结 OD，$AB=3$，$OA=OB=OD=\frac{3}{2}$；

$DE^2=AE\cdot BE\Rightarrow DE=2,AE=1$，又 $\triangle ODE$ 与 $\triangle CBE$ 相似，所以 BC 长为 3。

11.【答案】：$x^2+(y-1)^2=1,(x-1)^2+y^2=1$，2

【考点】：极坐标和直角坐标的互化

【解析】：因为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y-1=\sin\alpha\end{cases}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\theta=1, x^2+(y-1)^2=1$；

因为 $\rho^2-2\rho\cos\theta=0\Rightarrow x^2-2x+y^2=0\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1$

因为 $d=\sqrt{2}, r_1+r_2=2, d<r_1+r_2$，所以 2 个交点。

12.【答案】：$9\sqrt{3}$

【考点】：三视图；球、棱柱、棱锥的表面积和体积

【解析】：由条件易知，这个正三棱柱是个正四面体。抽侧面，求得斜高长为 3，

所以一个侧面的面积为 $3\sqrt{3}$，这个正三棱柱的侧面积为 $3\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$。

13.【答案】：$(1,\ 1+\sqrt{2})$

【考点】：双曲线的简单几何性质

【解析】：过 F_1 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 $A(-c,\frac{b^2}{a})$，$B(-c,-\frac{b^2}{a})$，

ΔABF_2 是锐角三角形，等价于 $\angle AF_2F_1<45°$, 即 $\tan\angle AF_2F_1<1$。

又因为双曲线中 $b^2=c^2-a^2$，所以 $c^2-a^2<2ac$。不等式两边同时除以 a^2，得：

$\begin{cases}(\frac{c}{a})^2-2\cdot\frac{c}{a}-1<0,\\ \frac{c}{a}>1\end{cases}$，所以 $\frac{c}{a}\in(1,\ 1+\sqrt{2})$。

14.【答案】：2026

【考点】：对数的概念及其运算性质；换底公式；数列的概念和表示法；解一元二次不等式

【解析】：$a_n=\log_{n+1}(n+2)\ \ (n\in\mathbf{N}^*)$，

$a_1\cdot a_2\cdot.....\cdot a_k=\frac{\lg3}{\lg2}\cdot\frac{\lg4}{\lg3}\cdot.....\cdot\frac{\lg(k+2)}{\lg(k+1)}=\log_2(k+2)$

当且仅当 $k+2=2^n$ 时，能够出现企盼数。

所以 [1, 2011]内所有的企盼数为 2，6，14，……，1022，［通项为 $2^{n+1}-2(1\le n\le9, n\in\mathbf{N})$］

分组求和，易得它们的和为 2026。

三、解答题：

15.（本小题满分 13 分）

【考点】：两角和与差的正弦、余弦、正切公式；解斜三角形；数量积的坐标表示；解一元二次不等式

解：（Ⅰ）因为 $2\sin A\cos B=\sin C\cos B+\cos C\sin B$，

所以 $2\sin A\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$. ……. 3 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$.

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. ……. 5 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……. 7 分

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{12}{5}\cos A+\cos 2A$， ……. 8 分

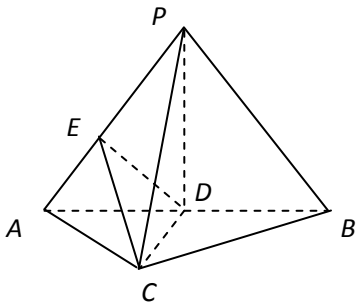
所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{12}{5}\cos A+2\cos^2 A-1=2(\cos A-\frac{3}{5})^2-\frac{43}{25}$. ……. 10 分

所以当 $\cos A=\frac{3}{5}$ 时，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 取得最小值.

此时 $\sin A=\frac{4}{5}$（$0<A<\pi$），于是 $\tan A=\frac{4}{3}$. ……. 12 分

所以 $\tan(A-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan A-1}{\tan A+1}=\frac{1}{7}$. ……. 13 分

16.（本小题满分 13 分）



【考点】：线、面平行或垂直的判定；线线、线面、面面的夹角

解：（Ⅰ）设 AB 中点为 D，连结 PD，CD，…… 1 分

因为 $AP=BP$，所以 $PD\perp AB$.

又 $AC=BC$，所以 $CD\perp AB$. ……. 2 分

因为 $PD\cap CD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 PCD.

因为 $PC\subset$ 平面 PCD，所以 $PC\perp AB$. ……. 4 分

（Ⅱ）由已知 $\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=2$，

所以 $AD=BD=CD=\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{2}$.

又 ΔPAB 为正三角形，且 $PD\perp AB$，所以 $PD=\sqrt{6}$. ……. 6 分

因为 $PC=2\sqrt{2}$，所以 $PC^2=CD^2+PD^2$.

所以 $\angle CDP=90^\circ$.

由（Ⅰ）知 $\angle CDP$ 是二面角 $P-AB-C$ 的平面角.

所以平面 $PAB\perp$ 平面 ABC. ……. 8 分

（Ⅲ）**方法 1**：由（Ⅱ）知 $CD\perp$ 平面 PAB.

过 D 作 $DE\perp PA$ 于 E，连结 CE，则 $CE\perp PA$.

所以 $\angle DEC$ 是二面角 $B-AP-C$ 的平面角. …… 10 分

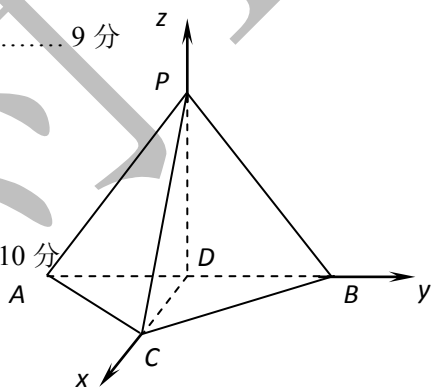
在 $Rt\Delta CDE$ 中，易求得 $DE=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

因为 $CD=\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle DEC=\frac{CD}{DE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. …… 12 分

所以 $\cos\angle DEC=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

即二面角 $B-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. …… 13 分

方法 2：由（Ⅰ）（Ⅱ）知 DC，DB，DP 两两垂直. …… 9 分



以 D 为原点建立如图所示的空间直角坐标系.

易知 $D(0,\ 0,\ 0)$，$C(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$A(0,\ -\sqrt{2},\ 0)$，$P(0,\ 0,\ \sqrt{6})$.

所以 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0)$，$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{2},\ 0,\ -\sqrt{6})$. …… 10 分

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\ \sqrt{2}x-\sqrt{6}z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\ -1,\ \frac{\sqrt{3}}{3})$. …… 11 分

易知平面 PAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{DC}=(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$.

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\ \overrightarrow{DC}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DC}|}=\frac{\sqrt{21}}{7}$. …… 12 分

由图可知，二面角 $B-AP-C$ 为锐角.

所以二面角 $B-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. …… 13 分

17.（本小题满分 13 分）

【考点】：导数的几何意义；利用导数研究函数的单调性（其中多项式函数不超过三次）

（Ⅰ）解：当 $a=-1$ 时，$f(x)=\ln x+x+\frac{2}{x}-1$，$x\in(0,+\infty)$.

智康1对1

所以 $f'(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2}$， $x\in(0,+\infty)$． ……（求导、定义域各一分） 2 分

因此 $f'(2)=1$．即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线斜率为 1. …… 3 分

又 $f(2)=\ln 2+2$， …… 4 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,\ f(2))$ 处的切线方程为 $x-y+\ln 2=0$. …… 5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=\ln x-ax+\frac{1-a}{x}-1$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-a+\frac{a-1}{x^2}=-\frac{ax^2-x+1-a}{x^2}$， $x\in(0,+\infty)$． …… 7 分

令 $g(x)=ax^2-x+1-a$， $x\in(0,+\infty)$，

①当 时， $g(x)=-x+1$， $x\in(0,+\infty)$，

当 $x\in(0,\ 1)$ 时， $g(x)>0$，此时 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减； …… 8 分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $g(x)<0$，此时 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增． …… 9 分

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $f'(x)=0$ 即 解得 $x_1=1$， $x_2=\frac{1}{a}-1$．

此时 $\frac{1}{a}-1>1>0$，

所以当 $x\in(0,\ 1)$ 时， $g(x)>0$，此时 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；…10 分

$x\in(1,\ \frac{1}{a}-1)$ 时， $g(x)<0$，此时 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；……11 分

$x\in(\frac{1}{a}-1,\ +\infty)$ 时， ，此时 ，函数 $f(x)$ 单调递减. …12 分

综上所述：

当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递减，

在 $(1,\ \frac{1}{a}-1)$ 上单调递增；在 $(\frac{1}{a}-1,\ +\infty)$ 上单调递减. …… 13 分

18．（本小题满分 13 分）

【考点】：函数的概念与表示；单调性与最大（小）值；奇偶性

解：（Ⅰ）因为 $f(-1)=0$，所以 $a-b+1=0$.

因为 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，所以 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-4a=0.\end{cases}$ …… 2 分

所以 $b^2-4(b-1)=0$．解得 $b=2$，$a=1$．所以 $f(x)=(x+1)^2$．

所以 $F(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & x>0,\\ -(x+1)^2 & x<0.\end{cases}$ ……4 分

（Ⅱ）因为 $g(x)=f(x)-kx=x^2+2x+1-kx=x^2+(2-k)x+1$

$=(x+\frac{2-k}{2})^2+1-\frac{(2-k)^2}{4}$， ……6 分

所以当 $\frac{k-2}{2}\geqslant 2$ 或 $\frac{k-2}{2}\leqslant -2$ 时 $g(x)$ 单调．

即 k 的范围是 $(-\infty,\ -2]$ 或 $[6,\ +\infty)$ 时，$g(x)$ 是单调函数． ……8 分

（Ⅲ）因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=ax^2+1$．

所以 $F(x)=\begin{cases}ax^2 & x>0,\\ -ax^2 & x<0.\end{cases}$ ……10 分

因为 $mn<0$，依条件设 $m>0$，则 $n<0$．

又 $m+n>0$，所以 $m>-n>0$．

所以 $|m|>|-n|$． ……12 分

此时 $F(m)+F(n)=f(m)-f(n)=am^2+1-an^2-1=a(m^2-n^2)>0$．

即 $F(m)+F(n)>0$． ……13 分

19．（本小题满分 14 分）

【考点】：用坐标表示平面向量的加法、减法与数乘运算；用数量积判断两个平面向量的垂直关系；直线方程的点斜式；直线与圆的位置关系；直线与圆锥曲线的位置关系；两点间的距离公式、点到直线的距离公式；单调性与最大（小）值

（Ⅰ）解：因为 $2\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_2Q}=\mathbf{0}$，

所以 F_1 为 F_2Q 中点．

设 Q 的坐标为 $(-3c,\ 0)$，

因为 $AQ\perp AF_2$，

所以 $b^2=3c\times c=3c^2$，$a^2=4c\times c=4c^2$，

且过 $A,\ Q,\ F_2$ 三点的圆的圆心为 $F_1(-c,\ 0)$，半径为 $2c$． ……2 分

因为该圆与直线 l 相切，所以 $\frac{|-c-3|}{2}=2c$.

解得 $c=1$，所以 $a=2$， $b=\sqrt{3}$.

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ..... 4 分

（Ⅱ）设 l_1 的方程为 $y=kx+2$ （ $k>0$），

由 $\begin{cases} y=kx+2, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$.

设 $G(x_1,y_1)$， $H(x_2,y_2)$， 则 $x_1+x_2=-\frac{16k}{3+4k^2}$. .....5 分

所以 $\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{PH}=(x_1-m,\ y_1)+(x_2-m,\ y_2)=(x_1+x_2-2m,\ y_1+y_2)$.

$=(x_1+x_2-2m,\ k(x_1+x_2)+4)$

$\overrightarrow{GH}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)=(x_2-x_1,\ k(x_2-x_1))$.

由于菱形对角线互相垂直，则 $(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{PH})\cdot\overrightarrow{GH}=0$. .....6 分

所以 $(x_2-x_1)[(x_1+x_2)-2m]+k(x_2-x_1)[k(x_1+x_2)+4]=0$.

故 $(x_2-x_1)[(x_1+x_2)-2m+k^2(x_1+x_2)+4k]=0$.

因为 $k>0$，所以 $x_2-x_1\neq 0$.

所以 $(x_1+x_2)-2m+k^2(x_1+x_2)+4k=0$

即 $(1+k^2)(x_1+x_2)+4k-2m=0$.

所以 $(1+k^2)(-\frac{16k}{3+4k^2})+4k-2m=0$

解得 $m=-\frac{2k}{3+4k^2}$. 即 $m=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$.

因为 $k>0$，所以 $-\frac{\sqrt{3}}{6}\leqslant m<0$.

故存在满足题意的点 P 且 m 的取值范围是 $[-\frac{\sqrt{3}}{6},\ 0)$. ..... 8 分

（Ⅲ）①当直线 l_1 斜率存在时，

设直线l_1方程为$y=kx+2$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

得$(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$.

由$\Delta>0$，得$k^2>\frac{1}{4}$. ……9 分

设$G(x_1, y_1)$，$H(x_2, y_2)$，

则$x_1+x_2=-\frac{16k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4}{3+4k^2}$.

又$\overrightarrow{MG}=\lambda\overrightarrow{MH}$，所以$(x_1, y_1-2)=\lambda(x_2, y_2-2)$. 所以$x_1=\lambda x_2$. ……10 分

所以$x_1+x_2=(1+\lambda)x_2$，$x_1x_2=\lambda x_2^2$.

所以$(\frac{x_1+x_2}{1+\lambda})^2=x_2^2=\frac{x_1x_2}{\lambda}$. 所以$\frac{(\frac{-16k}{3+4k^2})^2}{(1+\lambda)^2}=\frac{4}{3+4k^2}\cdot\frac{1}{\lambda}$.

整理得$\frac{64}{\frac{3}{k^2}+4}=\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$. ……11 分

因为$k^2>\frac{1}{4}$，所以$4<\frac{64}{\frac{3}{k^2}+4}<16$. 即$4<\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}<16$. 所以$4<\lambda+\frac{1}{\lambda}+2<16$.

解得$7-4\sqrt{3}<\lambda<7+4\sqrt{3}$.

又$0<\lambda<1$，所以$7-4\sqrt{3}<\lambda<1$. ……13 分

②又当直线l_1斜率不存在时，直线l_1的方程为$x=0$，

此时$G(0, \sqrt{3})$，$H(0, -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{MG}=(0, \sqrt{3}-2)$，$\overrightarrow{MH}=(0, -\sqrt{3}-2)$，

$\overrightarrow{MG}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\overrightarrow{MH}$，所以$\lambda=7-4\sqrt{3}$.

所以$7-4\sqrt{3}\leqslant\lambda<1$，即所求$\lambda$的取值范围是$[7-4\sqrt{3}, 1)$. ……14 分

20.（本小题满分 14 分）

【考点】：等差数列的概念；等差数列的通项公式与前 n 项和公式；用基本不等式解决简单的最大（小）值问题；反证法；综合法

（Ⅰ）解：依条件有 $f(x)=ax+b$.

因为点 $(n,\ a_n)$ 在函数 $f(x)=ax+b$ 的图象上，所以 $a_n=f(n)=an+b$.

因为 $a_{n+1}-a_n=a(n+1)+b-(an+b)=a$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项是 $a_1=a+b$，公差为 $d=a$ 的等差数列. …… 1 分

所以 $S_n=n(a+b)+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot a=nb+\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot a$.

即数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=nb+\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot a$. …… 2 分

（Ⅱ）证明：依条件有 $\begin{cases}(a+b)+2a=7,\\ 4(a+b)+\dfrac{4\times3}{2}\cdot a=24.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3a+b=7,\\ 10a+4b=24.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

所以 $a_n=2n+1$.

所以 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2+2n.$ …… 3 分

因为 $2S_{p+q}-(S_{2p}+S_{2q})=2[(p+q)^2+2(p+q)]-(4p^2+4p)-(4q^2+4q)$

$=-2(p-q)^2$，

又 $p\neq q$，所以 $2S_{p+q}-(S_{2p}+S_{2q})<0$.

即 $S_{p+q}<\dfrac{1}{2}(S_{2p}+S_{2q})$. …… 5 分

（Ⅲ）依条件 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$.

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)+f(x)=0$.

即 $\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{-ax+b}{x^2+1}=0$. 解得 $b=0$. 所以 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+1}$.

又 $f(1)=1$，所以 $a=2$.

故 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. ……6 分

因为 $x_{n+1}=f(x_n)$，所以 $x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n^2+1}$. 所以 $x_1=\dfrac{1}{2}>0$ 时，有 $x_{n+1}>0$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

又 $x_{n+1}=f(x_n)=\dfrac{2x_n}{x_n^2+1}\leqslant\dfrac{2x_n}{2x_n}=1$，

智康1对1

若 $x_{n+1}=1$，则 $x_n=1$．从而 $x_1=1$．这与 $x_1=\frac{1}{2}$ 矛盾．

所以 $0<x_{n+1}<1$． ……8 分

所以 $x_{k+1}-x_k=x_k(1-x_k)\cdot\frac{1+x_k}{x_k^{\,2}+1}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x_k+1+\frac{2}{x_k+1}-2}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{2}+1}{8}$．

所以 $\frac{(x_k-x_{k+1})^2}{x_kx_{k+1}}=\frac{x_{k+1}-x_k}{x_kx_{k+1}}(x_{k+1}-x_k)<\frac{\sqrt{2}+1}{8}(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}})$． ……10 分

所以 $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3}+\cdots+\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_nx_{n+1}}$

$<\frac{\sqrt{2}+1}{8}[(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})+(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3})+\cdots+(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}})]$

$=\frac{\sqrt{2}+1}{8}(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}})=\frac{\sqrt{2}+1}{8}(2-\frac{1}{x_{n+1}})$． ……12 分

因为 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}>x_n$，所以 $\frac{1}{2}<x_{n+1}<1$．所以 $1<\frac{1}{x_{n+1}}<2$．

所以 $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n+1})^2}{x_nx_{n+1}}<\frac{\sqrt{2}+1}{8}(2-1)<\frac{\frac{3}{2}+1}{8}=\frac{5}{16}$． …14 分

智康1对1

北京市朝阳区2011届高三第一学期期末考试数学试卷（理）详解与巩固

【巩固部分】

一、试卷整体分析：

本份试卷考察了除复数、计数原理、统计初步、概率初步、随机变量、算法初步以外的高中数学知识。试卷整体区分度较好，题目难度不小，综合性强，考察了高考说明（北京版）上出现的 51 个知识点。其中考生在选择题 2、6、7、8；填空题 9、11、12、13、14 均出现了失分情况。尤其是第 2 题审题不清、第 8 题没有结合选择题的相关解题策略很好的解决、第 9 题角的范围讨论不够、第 12 题审题不清，对易错点的不明确把握、第 13 题忘记双曲线离心率大于 1、第 14 题数数数错或对分组求和没有掌握好方法等等。大题中，15~17 题比较基础地考察了三角、立体、导数的知识，18 题综合考察了函数的性质考生失分情况不太明显，19 题综合考察了直线和椭圆的有关知识，综合性强，计算量大，考生失分明显，而全卷最后一题前两问很简单，第三问却一下难度很大，导致全区学生最多只拿到 1 分（本小问满分 9 分），全卷出现高分很困难。

二、巩固试题

1-2．要得到函数 $y=\sqrt{2}\cos x$ 的图象，只需将函数 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象上所有的点

A．横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

B．横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C．横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

D．横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

答案：C.

解析：由函数 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象得到函数 $y=\sqrt{2}\cos x$ 的图象有两种变换方法。

方法一：先动 φ 再动 ω： $y=\sqrt{2}\sin[2(x+\frac{\pi}{8})]\xrightarrow{\rightarrow\frac{\pi}{8}}y=\sqrt{2}\sin 2x\xrightarrow{\text{横坐标伸长2倍}}y=\sqrt{2}\sin x$

方法二：先动 ω 再动 φ： $y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\xrightarrow{\text{横坐标伸长2倍}}y=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\xrightarrow{\rightarrow\frac{\pi}{4}}y=\sqrt{2}\sin x$

因此，答案 C 符合题意。

考查要点：函数图象的平移变换

易错点：①审题不清：不知是前者变成后者还是后者变成前者；②对两种变换方法的混淆

命题意图：本题比试卷第 2 题考察得更深入，加入了一个易错点的考察，难度加大。注意先动φ再动ω和先动ω再动φ的区别与联系。

2-5．已知$S_n=n^2+2$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是_____.

答案：$a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 2n-1, & n\geq 2.\end{cases}$

解析：当$n=1$时，$S_1=a_1=1^2+2=3$；当$n\geq 2$时，$S_n=n^2+2, S_{n-1}=(n-1)^2+2\Rightarrow a_n=2n-1$

而当$n=1$时并不符合$n\geq 2$时的通式，因此要写成分段形式：$a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 2n-1, & n\geq 2.\end{cases}$

考查要点：利用a_n和S_n的关系求a_n。

命题意图：本题比试卷第 5 题考察得更深入，加入了一个易错点的考察，难度加大。当$n=1$并不符合$n\geq 2$的通式时，要写成分段形式。

3-6．若实数x，y满足不等式组$\begin{cases}x+3y-3\geq 0,\\ 2x-y-3\leq 0,\\ x-my+1\geq 0,\end{cases}$且$x+y$的最大值为 9，则实数$m=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

答案：C.

解析：将最大值转化为y轴上的截距，将m等价为斜率的倒数，数形结合可知答案选 C。

考查要点：用平面区域二元一次不等式组，以及简单的转化思想和数形结合的思想。

命题意图：考察线性规划中简单的转化思想和数形结合的思想。

4-7．设点M是线段BC的中点，点A在直线BC外，$\overrightarrow{BC}^2=16, |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则$|\overrightarrow{AM}|=$

A．8　　B．4　　C．2　　D．1

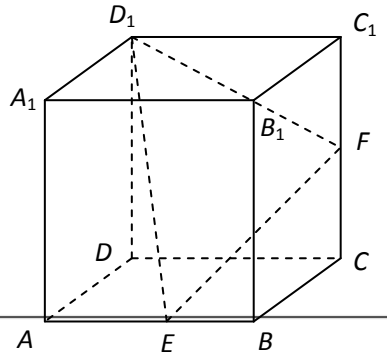
答案：C.

解析：由$\overrightarrow{BC}^2=16$，得$|BC|=4$，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=4$，而$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|$故$|\overrightarrow{AM}|=2$。

考查要点：平面向量的简单运算。

命题意图：巩固基础，熟悉常见图形。

5-8．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为棱AB，CC_1



的中点，在平面 ADD_1A_1 内且与平面 D_1EF 平行的直线

A．有无数条　　B．有 2 条

C．有 1 条　　D．不存在

答案：A.

解析：以 D 为原点，DA 为 x 轴，建立空间直角坐标系，

设正方体棱长为 1，则：$D_1(0,0,1), F(0,1,\frac{1}{2}), E(1,\frac{1}{2},0)$，

所以易求平面 D_1EF 的一个法向量 $\vec{n}=(3,2,4)$，而平面 ADD_1A_1 上的直线向量坐标为 $(x,0,z)$，

显然，当面 ADD_1A_1 内的直线满足 $3x+4z=0$ 时，即有平面 ADD_1A_1 内的直线与平面 D_1EF 平行。

考查要点：平行的判定

命题意图：该题为原第 8 题的姊妹题，综合性相对原题较弱，考点比较单一，易于考生比较、掌握。

6-11．已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha,\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）。以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\theta=1$，则直线 l 与圆 C 的交点的直角坐标为_____.

答案：$(-1,1),(1,1)$

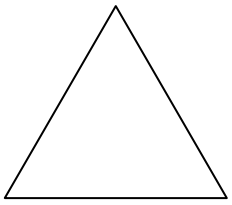
解析：由题设知，在直角坐标系下，直线 l 的方程为 $y=1$，圆 C 的方程为 $x^2+(y-1)^2=1$.

又解方程组 $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=1,\\ y=1\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$.故所求交点的直角坐标为 $(-1,1),(1,1)$.

考查要点：极坐标方程、参数方程与普通方程的互化。

命题意图：考察极坐标方程、参数方程与普通方程的互化。

7-12．已知一个正四面体的底面积为 $3\sqrt{3}$，那么它的正视图（如图所示）的面积为_____.



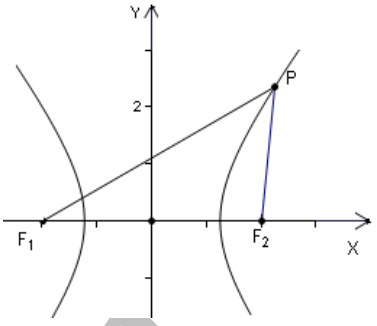
答案：$2\sqrt{6}$

解析：由题设知，底面是个正三角形。面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=3\sqrt{3}$，所以正四面体的棱长 $a=2\sqrt{3}$，底面重心到底边的距离为 1，因此体高为 $2\sqrt{2}$。所以正视图的面积为 $2\sqrt{6}$。

考查要点：三视图、棱锥的表面积。

命题意图：本题由原 12 题改编而来，逆向考察三视图中“正视图的‘高’是体高”这一常考常错点，命题新颖。

8-13．双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点为 F_1、F_2，若 P 为其上一点，且$|PF_1|=2|PF_2|$，则双曲线离心率的取值范围为_____.



答案：$(1,3]$

解析：如图，设 $|PF_2|=m$，$\angle F_1PF_2=\theta(0<\theta\le\pi)$，

当 P 在右顶点处 $\theta=\pi$，$e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{m^2+(2m)^2-4m^2\cos\theta}}{m}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

$\because -1<\cos\theta\le 1$，$\therefore e\in(1,3]$

考查要点：双曲线的简单几何性质——离心率。

命题意图：结合焦点三角形考察双曲线离心率大于 1 这一常考常错点。

9-14．已知 $f(3^x)=4x\log_2 3+233$，则 $f(2)+f(4)+f(8)+\cdots+f(2^8)$ 的值等于_____.

答案：2008

解析：做变换 $t=3^x$，则 $x=\frac{\log_2 t}{\log_2 3}$，故 $f(t)=4\log_2 t+233$，则问题变得简洁明了。

原式 $=\sum_{i=1}^{8}f(2^i)=2008$。

命题意图：考察变换能力。

10-17．已知函数 $f(x)=x^2+a\ln x$（a 为实常数）.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 在$[1,e]$上的最小值及相应的 x 值；

（Ⅱ）若存在 $x\in[1,e]$，使得 $f(x)\le(a+2)x$ 成立，求实数 a 的取值范围.

解析：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{2x^2+a}{x}(x>0)$，当 $x\in[1,e]$，$2x^2+a\in[a+2,a+2e^2]$.

若 $a\ge -2$，$f'(x)$ 在$[1,e]$上非负（仅当 $a=-2$，x=1 时，$f'(x)=0$），故函数 $f(x)$ 在$[1,e]$上是增函数，此时

$[f(x)]_{\min}=f(1)=1$.　……2 分

若 $-2e^2<a<-2$，当 $x=\sqrt{\frac{-a}{2}}$ 时，$f'(x)=0$；当 $1\le x<\sqrt{\frac{-a}{2}}$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 是减函数；　当 $\sqrt{\frac{-a}{2}}<x\le e$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 是增函数．故$[f(x)]_{\min}=f(\sqrt{\frac{-a}{2}})$

$=\frac{a}{2}\ln(-\frac{a}{2})-\frac{a}{2}$.　……4 分

若 $a \le -2e^2$， $f'(x)$ 在 $[1,e]$ 上非正（仅当 $a=-2e^2$，x=e 时， $f'(x)=0$），故函数 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上是减函数，

此时 $[f(x)]_{\min} = f(e) = a+e^2$．……6 分

综上可知，当 $a \ge -2$ 时， $f(x)$ 的最小值为 1，相应的 x 值为 1；当 $-2e^2 < a < -2$ 时， $f(x)$

的最小值为 $\frac{a}{2}\ln(-\frac{a}{2})-\frac{a}{2}$，相应的 x 值为 $\sqrt{\frac{-a}{2}}$；当 $a \le -2e^2$ 时， $f(x)$ 的最小值为 $a+e^2$，

相应的 x 值为 e．……7 分

（II）不等式 $f(x) \le (a+2)x$， 可化为 $a(x-\ln x) \ge x^2-2x$．

$\because x \in [1,e]$，$\therefore \ln x \le 1 \le x$ 且等号不能同时取，所以 $\ln x < x$，即 $x-\ln x > 0$，

因而 $a \ge \frac{x^2-2x}{x-\ln x}$（ $x \in [1,e]$ ）……9 分

令 $g(x)=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$（ $x \in [1,e]$），又 $g'(x)=\frac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}$，……11 分

当 $x \in [1,e]$ 时， $x-1 \ge 0, \ln x \le 1$， $x+2-2\ln x > 0$，

从而 $g'(x) \ge 0$（仅当 x=1 时取等号），所以 $g(x)$ 在 $[1,e]$ 上为增函数，

故 $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=-1$，所以 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$．……13 分

命题意图：本卷对于导数的考察比较简单，因而编了一道较综合的试题，第一问考察了利用导数求含参函数在闭区间上的最值的积累基本讨论，第二问考察了双参不等式的问题及一些运算技巧。

11-19．已知点 $A(0,1)$、 $B(0,-1)$， P 是一个动点，且直线 PA、 PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$．

（Ⅰ）求动点 P 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）设 $Q(2,0)$，过点 $(-1,0)$ 的直线 l 交 C 于 M、 N 两点， ΔQMN 的面积记为 S，若对满足条件的任意直线 l，不等式 $S \le \lambda \tan MQN$ 恒成立，求 λ 的最小值．

答案：（Ⅰ）设动点 P 的坐标为 (x,y)，则直线 PA, PB 的斜率分别是 $\frac{y-1}{x}, \frac{y+1}{x}$．

由条件得 $\frac{y-1}{x}\cdot\frac{y+1}{x}=-\frac{1}{2}$．即 $\frac{x^2}{2}+y^2=1(x \ne 0)$．

所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1(x \ne 0)$……5 分

注：无 $x \ne 0$ 扣 1 分．

（Ⅱ）设点 M, N 的坐标分别是 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$．

当直线 l 垂直于 x 轴时，$x_1=x_2=-1, y_1=-y_2, y_1^2=\frac{1}{2}$.

所以 $\overrightarrow{QM}=(x_1-2,y_1), \overrightarrow{QN}=(x_2-2,y_2)=(x_1-2,-y_1)$.

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=(x_1-2)^2-y_1^2=\frac{17}{2}$ ……7 分

当直线 l 不垂直于 x 轴时，设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$,

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=k(x+1)\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$.

所以 $x_1+x_2=-\frac{4k^2}{1+2k^2}$ ，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$ ……9 分

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2$.

因为 $y_1=k(x_1+1), y_2=k(x_2+1)$,

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=(k^2+1)x_1x_2+(k^2-2)(x_1+x_2)+k^2+4=\frac{17}{2}-\frac{13}{2(1+2k^2)}<\frac{17}{2}$.

综上所述 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}$ 的最大值是 $\frac{17}{2}$ ……11 分

因为 $S\le\lambda\tan MQN$ 恒成立,

即 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{QM}|\cdot|\overrightarrow{QN}|\sin MQN\le\lambda\frac{\sin MQN}{\cos MQN}$ 恒成立.

由于 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\frac{17}{2}-\frac{13}{2(1+2k^2)}>0$.

所以 $\cos MQN>0$.

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}\le 2\lambda$ 恒成立……13 分

所以 λ 的最小值为 $\frac{17}{4}$ ……14 分

注：没有判断 $\angle MQN$ 为锐角，扣 1 分.

命题意图：深化考察从已知条件到数学语言的翻译与挖掘以及圆锥曲线与向量的综合问题。

12-20．已知函数 $f(x)=(x-1)^2, g(x)=k(x-1)$，函数 $f(x)-g(x)$ 其中一个零点为 5，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{k}{2}$，且 $(a_{n+1}-a_n)g(a_n)+f(a_n)=0$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 通项公式；

智康1对1

（Ⅱ）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：$S_n \geq 1+n$；

（Ⅲ）设$b_n = 3f(a_n) - g(a_{n+1})$，试探究数列$\{b_n\}$是否存在最大项和最小项．若存在，求出最大项和最小项；若不存在，请说明理由．

解析：函数$f(x)-g(x)$有一个零点为5，即方程$(x-1)^2-k(x-1)=0$，有一个根为5，将$x=5$代入方程得

$16-4k=0$，$\therefore k=4$，$\therefore a_1=2$……1分

由$(a_{n+1}-a_n)g(a_n)+f(a_n)=0$得$4(a_{n+1}-a_n)(a_n-1)+(a_n-1)^2=0$

$(a_n-1)(4a_{n+1}-4a_n+a_n-1)=0$

$\therefore a_n-1=0$或$4a_{n+1}-4a_n+a_n-1=0$……3分

由（1）知$a_1=2$，$\therefore a_n-1=0$不合舍去

由$4a_{n+1}-4a_n+a_n-1=0$得$4a_{n+1}=3a_n+1$……4分

方法1：由$4a_{n+1}=3a_n+1$得$a_{n+1}-1=\frac{3}{4}(a_n-1)$……5分

$\therefore$数列$\{a_n-1\}$是首项为$a_1-1=1$，公比为$\frac{3}{4}$的等比数列

$\therefore a_n-1=(\frac{3}{4})^{n-1}$，$\therefore a_n=(\frac{3}{4})^{n-1}+1$……6分

方法2：由$4a_{n+1}=3a_n+1$---①得当$n\geq 2$时$4a_n=3a_{n-1}+1$……②

①-②得$4(a_{n+1}-a_n)=3(a_n-a_{n-1})$

$\therefore \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\frac{3}{4}$（$n\geq 2$）即数列$\{a_n-a_{n-1}\}$是首项为$a_2-a_1$，公比为$\frac{3}{4}$的等比数列

$\because a_2-a_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a_1=-\frac{1}{4}$，$\therefore a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^{n-1}$……③

由①得$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}$代入③整理得$a_n=(\frac{3}{4})^{n-1}+1$

（2）由（1）知$a_n=(\frac{3}{4})^{n-1}+1$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}a_i=1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+\cdots+(\frac{3}{4})^{n-1}+n=\frac{[1-(\frac{3}{4})^n]}{1-\frac{3}{4}}+n=4[1-(\frac{3}{4})^n]+n$……8分

$\because$对$\forall n\in N^*$，有$(\frac{3}{4})^n\leq\frac{3}{4}$，$\therefore 1-(\frac{3}{4})^n\geq 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

智康1对1

$\therefore 4[1-(\frac{3}{4})^n]+n\geq 1+n$，即 $\sum_{i=1}^{n}a_i\geq 1+n$ .....10 分

（3）由 $b_n=3f(a_n)-g(a_{n+1})$ 得 $b_n=3(a_n-1)^2-4(a_{n+1}-1)$

$\therefore b_n=3[(\frac{3}{4})^{n-1}]^2-4(\frac{3}{4})^n=3\{[(\frac{3}{4})^{n-1}]^2-(\frac{3}{4})^{n-1}\}$ .....11 分

令 $u=(\frac{3}{4})^{n-1}$，则 $0<u\leq 1$，$b_n=3(u^2-u)=3[(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]$

$\because$ 函数 $b_n=3[(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上为增函数，在 $(0,\frac{1}{2})$ 上为减函数.....12 分

当 $n=1$ 时 $u=1$，当 $n=2$ 时 $u=\frac{3}{4}$，当 $n=3$ 时，$u=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$，当 $n=4$ 时 $u=\frac{27}{64}$，

$\because \frac{27}{64}<\frac{1}{2}<\frac{9}{16}<\frac{3}{4}<1$，且 $|\frac{1}{2}-\frac{27}{64}|>|\frac{1}{2}-\frac{9}{16}|$

$\therefore$ 当 $n=3$ 时，b_n 有最小值，即数列 $\{b_n\}$ 有最小项，最小项为

$b_3=3[(\frac{9}{16})^2-\frac{9}{16}]=-\frac{189}{256}$ .....13 分

当 $n=1$ 即 $u=1$ 时，b_n 有最大值，即数列 $\{b_n\}$ 有最大项，最大项为 $b_1=3(1-1)=0$. -----14 分

命题意图：综合考察数列求通项、数列求和、数列单调性的问题，这些问题是利用数列知识证明较难不等式（解决类似原卷第 3 问问题）的基础。

智康1对1