北京市海淀区 2008-2009 学年第一学期期末练习

高三数学（理科）

一、选择题：本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1．已知全集U，$A\subseteq B$，那么下列结论中可能不成立的是（　　）

A．$A\cap B=A$　　B．$A\cup B=B$　　C．$(\complement_U A)\cap B\neq\varnothing$　　D．$(\complement_U B)\cap A=\varnothing$

2．抛物线$y=2x^2$的准线方程为（　　）

A．$y=-\frac{1}{8}$　　B．$y=-\frac{1}{4}$　　C．$y=-\frac{1}{2}$　　D．$y=-1$

3．将函数$y=\cos 2x$的图象按向量$\vec{a}=(\frac{\pi}{4},1)$平移后得到函数$f\ x$的图象，那么（　　）

A．$f\ x=-\sin 2x+1$　　B．$f\ x=\sin 2x+1$

C．$f\ x=-\sin 2x-1$　　D．$f\ x=\sin 2x-1$

4．在ΔABC中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，如果$c=\sqrt{3}a$，$B=30°$，那么角C等于（　　）

A．$120°$　　B．$105°$　　C．$90°$　　D．$75°$

5．位于北纬x度的A、B两地经度相差$90°$，且A、B两地间的球面距离为$\frac{\pi}{3}R$（R为地球半径），那么x等于（　　）

A．30　　B．45　　C．60　　D．75

6．已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f\ x$，对任意的$x\in\mathbf{R}$都有$f(x+1)=f(x-\frac{1}{2})+2$恒成立，且$f(\frac{1}{2})=1$，则$f(62)$等于（　　）

A．1　　B．62　　C．64　　D．83

7．已知$\alpha,\beta\in\{1,2,3,4,5\}$，那么使得$\sin\alpha\cdot\cos\beta<0$的数对$(\alpha,\beta)$共有（　　）

A．9 个　　B．11 个　　C．12 个　　D．13 个

8．如果对于空间任意n（$n\geq 2$）条直线总存在一个平面α，使得这n条直线与平面α所成的角均相等，那么这样的n（　　）

A．最大值为 3　　B．最大值为 4　　C．最大值为 5　　D．不存在最大值

智康1对1

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.把答案填在题中横线上.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}=$ _____.

10. 如果 $f\ x=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 那么 $f\left[f\ 2\right]=$_____；不等式 $f\ 2x-1\ \ge\dfrac{1}{2}$ 的解集是_____.

11. 已知点 F_1、F_2 分别是双曲线的两个焦点， P 为该双曲线上一点，若 ΔPF_1F_2 为等腰直角三角形，则该双曲线的离心率为_____.

12. 若实数 x、y 满足 $\begin{cases}2x-y\ge 0,\\ y\ge x,\\ y\ge -x+b,\end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最小值为 3，则实数 b 的值为_____.

13. 已知直线 $x+y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 交于不同的两点 A、B，O 是坐标原点，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\ge|\overrightarrow{AB}|$，那么实数 m 的取值范围是_____.

14. 已知：对于给定的 $q\in\mathbf{N}^*$ 及映射 $f:A\to B, B\subseteq\mathbf{N}^*$. 若集合 $C\subseteq A$，且 C 中所有元素对应的象之和大于或等于 q，则称 C 为集合 A 的好子集.

① 对于 $q=2$， $A=\ a,b,c\ $，映射 $f:x\to 1, x\in A$，那么集合 A 的所有好子集的个数为_____；

② 对于给定的 q， $A=\ 1,2,3,4,5,6,\pi\ $，映射 $f:A\to B$ 的对应关系如下表：

x	1	2	3	4	5	6	π
$f\ x$	1	1	1	1	1	y	z

若当且仅当 C 中含有 π 和至少 A 中 2 个整数或者 C 中至少含有 A 中 5 个整数时，C 为集合 A 的好子集. 写出所有满足条件的数组 q,y,z ：_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题,共 80 分.解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 12 分）已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\cos(x-\dfrac{\pi}{4})-\cos^2 x-\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{25}{36}\pi\right]$ 上的最大值和最小值并指出此时相应的 x 的值.

16.（本小题共 12 分）已知函数 $g(x)$ 是 $f(x)=x^2(x>0)$ 的反函数，点 $M(x_0,y_0)$、$N(y_0,x_0)$ 分别是 $f(x)$、$g(x)$ 图象上的点，l_1、l_2 分别是函数 $f(x)$、$g(x)$ 的图象在 M,N 两点处的切线，且 $l_1 // l_2$.

（Ⅰ）求 M、N 两点的坐标；

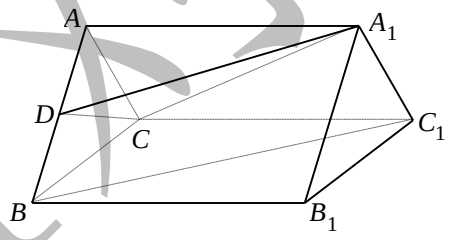
（Ⅱ）求经过原点 O 及 M、N 的圆的方程.

17.（本小题共 14 分）已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D 是棱 AB 的中点，$BC=1, AA_1=\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求证：$BC_1 //$ 平面 A_1DC；

（Ⅱ）求 C_1 到平面 A_1DC 的距离；

（Ⅲ）求二面角 $D-A_1C-A$ 的大小.



18.（本小题共 14 分）

某种家用电器每台的销售利润与该电器的无故障使用时间 T（单位：年）有关. 若 $T\le 1$，则销售利润为 0 元；若 $1<T\le 3$，则销售利润为 100 元；若 $T>3$，则销售利润为 200 元. 设每台该种电器的无故障使用时间 $T\le 1$，$1<T\le 3$ 及 $T>3$ 这三种情况发生的概率分别为 p_1,p_2,p_3，又知 p_1,p_2 是方程 $25x^2-15x+a=0$ 的两个根，且 $p_2=p_3$.

（Ⅰ）求 p_1,p_2,p_3 的值；

（Ⅱ）记 ξ 表示销售两台这种家用电器的销售利润总和，求 ξ 的分布列；

（Ⅲ）求销售两台这种家用电器的销售利润总和的平均值.

智康1对1

19.（本小题共 14 分）已知点 $A\ 0,1$ 、 $B\ 0,-1$ ， P 是一个动点，且直线 PA、PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求动点 P 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）设 $Q\ 2,0$ ，过点 $-1,0$ 的直线 l 交 C 于 M 、 N 两点， ΔQMN 的面积记为 S ，若对满足条件的任意直线 l ，不等式 $S\le\lambda\tan MQN$ 恒成立，求 λ 的最小值.

20.（本小题共 14 分）如果正数数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意的正数 M，都存在正整数 n_0，使得 $a_{n_0}>M$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 是一个无界正数列.

（Ⅰ）若 $a_n=3+2\sin(n)\ (n=1,2,3,\cdots)$， $b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n=1,3,5,\cdots,\\ \dfrac{n+1}{2}, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$ 分别判断数列 $\{a_n\}$ 、 b_n 是否为无界正数列，并说明理由；

（Ⅱ）若 $a_n=n+2$ ，是否存在正整数 k，使得对于一切 $n\ge k$ ，有 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<n-\frac{1}{2}$ 成立；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的无界正数列，求证：存在正整数 m，使得

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_m}{a_{m+1}}<m-2009.$$

智康1对1

北京市海淀区 2008-2009 学年第一学期期末练习

高三数学（理科）参考答案及评分标准 2009.01

一、选择题（本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分）

CABAB DDA

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分.有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分，共 30 分）

（9）1 （10）1，$[0,1]$ （11）$\sqrt{2}+1$（12）$\frac{9}{4}$（13）$(-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},2)$ （14） 4，$(5,1,3)$

三、解答题（本大题共 6 小题,共 80 分）

(15)（本小题共 12 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})-\cos^2 x-\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\cos 2x-\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ ……4 分

所以$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ……5 分

由$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ $k\in\mathbf{Z}$ 得

$k\pi+\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{6}$ $k\in\mathbf{Z}$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为π，单调递减区间为$[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

……7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）有 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

因为$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{25}{36}\pi\right]$，

所以$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{11}{9}\pi\right]$.

因为$\sin(-\frac{\pi}{3})=\sin\frac{4}{3}\pi<\sin\frac{11}{9}\pi$，

所以当$x=-\frac{\pi}{12}$时，函数 $f(x)$ 取得最小值$-\sqrt{3}$；当$x=\frac{\pi}{3}$时，函数 $f(x)$ 取得最大值 2.

……12 分

（16）（本小题共 12 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=x^2(x>0)$，所以 $g(x)=\sqrt{x}(x>0)$.

从而 $f'(x)=2x,\ \ g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. ……3 分

所以切线 l_1,l_2 的斜率分别为 $k_1=f'(x_0)=2x_0$，$k_2=g'(y_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}}$.

又 $y_0=x_0^2(x_0>0)$，所以 $k_2=\dfrac{1}{2x_0}$. ……4 分

因为两切线 l_1,l_2 平行，所以 $k_1=k_2$. ……5 分

从而 $(2x_0)^2=1$.

因为 $x_0>0$，

所以 $x_0=\dfrac{1}{2}$.

所以 M,N 两点的坐标分别为 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}),(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$. ……7 分

（Ⅱ）设过 O、M、N 三点的圆的方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

因为圆过原点，所以 $F=0$.因为 M、N 关于直线 $y=x$ 对称，所以圆心在直线 $y=x$ 上.

所以 $D=E$.

又因为 $M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4})$ 在圆上，

所以 $D=E=-\dfrac{5}{12}$.

所以过 O、M、N 三点的圆的方程为：$x^2+y^2-\dfrac{5}{12}x-\dfrac{5}{12}y=0$. ……12 分

（17）（本小题共 14 分）

（Ⅰ）证明：连结 AC_1 交 A_1C 于点 G，连结 DG.

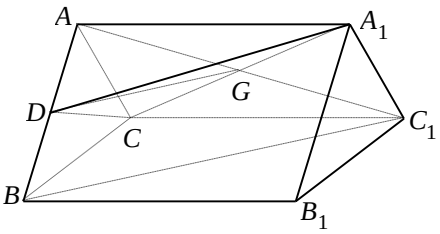
在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 ACC_1A_1 是平行四边形，

$\therefore AG=GC_1$.

智康1对1

$\because AD=DB$，

$\therefore DG \parallel BC_1$. ……2 分



$\because DG \subset$ 平面 A_1DC， $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1DC，

$\therefore BC_1 \parallel$ 平面 A_1DC.

……4 分

解法一：（Ⅱ）连结 DC_1，设 C_1 到平面 A_1DC 的距离为 h.

$\because$ 四边形 ACC_1A_1 是平行四边形，

$\therefore S_{\Delta ACA_1}=S_{\Delta A_1CC_1}$.

$\therefore V_{D-ACA_1}=V_{D-A_1CC_1}$.

$\because V_{D-ACA_1}=V_{A_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot AA_1=\frac{1}{8}$，

$\therefore V_{C_1-A_1CD}=\frac{1}{8}$. ……6 分

在等边三角形 ABC 中，D 为 AB 的中点，

$\therefore CD=\frac{\sqrt{3}}{2}, CD\perp AB$.

$\because AD$ 是 A_1D 在平面 ABC 内的射影，

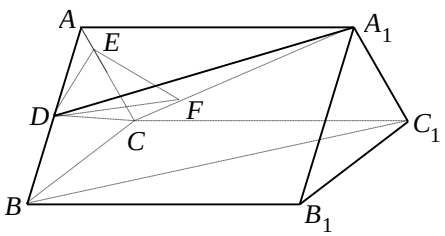
$\therefore CD\perp A_1D$. ……8 分

$\therefore S_{\Delta A_1DC}=\frac{DC\cdot DA_1}{2}=\frac{\sqrt{39}}{8}$.

$\therefore h=\frac{3V_{C_1-A_1DC}}{S_{\Delta A_1DC}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$. ……9 分

（Ⅲ）过点 D 作 $DE\perp AC$ 交 AC 于 E，过点 D 作 $DF\perp A_1C$ 交 A_1C 于 F，连结 EF.

$\because$ 平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1， $DE\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$，



$\therefore DE \perp$平面ACC_1A_1.

$\therefore EF$是DF在平面ACC_1A_1内的射影.

$\therefore EF \perp A_1C$.

$\therefore \angle DFE$是二面角$D-A_1C-A$的平面角. ……12分

在直角三角形ADC中，$DE=\dfrac{AD\cdot DC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

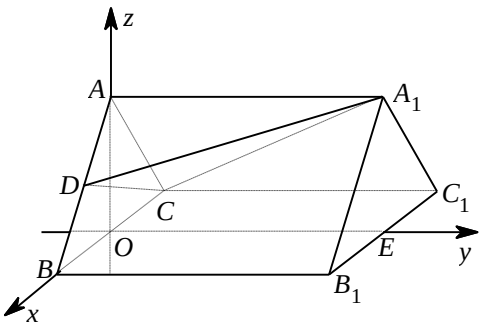
同理可求：$DF=\dfrac{A_1D\cdot DC}{A_1C}=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$.

$\therefore \sin DFE=\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

$\because \angle DFE\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore \angle DFE=\arcsin\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. ……14分

解法二：过点A作$AO\perp BC$交BC于O，过点O作$OE\perp BC$交B_1C_1于E.因为平面$ABC\perp$平面CBB_1C_1，所以$AO\perp$平面CBB_1C_1.分别以CB,OE,OA所在的直线为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系，如图所示.因为$BC=1, AA_1=\sqrt{3}$，ΔABC是等边三角形，所以O为BC的中点.则$O(0,0,0)$，$A\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(-\dfrac{1}{2},0,0\right)$，$A_1\left(0,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D(\dfrac{1}{4},0,\dfrac{\sqrt{3}}{4})$，$C_1\left(-\dfrac{1}{2},\sqrt{3},0\right)$. ……6分



（Ⅱ）设平面A_1DC的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则

智康1对1

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0.\end{cases}$$

$\because \overrightarrow{CD}=(\frac{3}{4},0,\frac{\sqrt{3}}{4})$，$\overrightarrow{A_1C}=(-\frac{1}{2},-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$$\therefore \begin{cases}\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\\ -\frac{1}{2}x-\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0.\end{cases}$$

取 $x=\sqrt{3}$，得平面 A_1DC 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,-3\right)$. ……8 分

$\therefore C_1$ 到平面 A_1DC 的距离为：$\left|\frac{\overrightarrow{CC_1}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\frac{\sqrt{39}}{13}$. ……10 分

(III)解：同（Ⅱ）可求平面 ACA_1 的一个法向量为 $\vec{n_1}=\left(\sqrt{3},0,-1\right)$. ……12 分

设二面角 $D-A_1C-A$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=\cos<\vec{n},\vec{n_1}>\frac{6}{\sqrt{13}\times 2}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\because \theta\in(0,\pi)$，

$\therefore \theta=\arccos\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……14 分

（18）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）由已知得 $p_1+p_2+p_3=1$.

$\because\ p_2=p_3$，$\therefore\ p_1+2p_2=1$.

$\because\ p_1,p_2$ 是方程 $25x^2-15x+a=0$ 的两个根，

$\therefore\ p_1+p_2=\frac{3}{5}$.

$\therefore\ p_1=\frac{1}{5},p_2=p_3=\frac{2}{5}$. ……3 分

（Ⅱ）ξ 的可能取值为 0，100，200，300，400. ……4 分

$P(\xi=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$,

$P(\xi=100)=2\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$,

$P(\xi=200)=2\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$,

$P(\xi=300)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$,

$P(\xi=400)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$. ……9 分

随机变量ξ的分布列为：

ξ	0	100	200	300	400
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$

……11 分

（Ⅲ）销售利润总和的平均值为

$E\xi=0\times\frac{1}{25}+100\times\frac{4}{25}+200\times\frac{8}{25}+300\times\frac{8}{25}+400\times\frac{4}{25}=240.$

∴销售两台这种家用电器的利润总和的平均值为 240 元.

……14 分

注：只求出$E\xi$，没有说明平均值为 240 元，扣 1 分.

（19）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）设动点P的坐标为 x,y ，则直线PA,PB的斜率分别是$\frac{y-1}{x},\frac{y+1}{x}$.

由条件得$\frac{y-1}{x}\cdot\frac{y+1}{x}=-\frac{1}{2}$.

即$\frac{x^2}{2}+y^2=1\ x\neq0$.

所以动点P的轨迹C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1\ x\neq0$ ……5 分

注：无$x\neq0$扣 1 分.

（Ⅱ）设点M,N的坐标分别是 x_1,y_1 ，x_2,y_2 .

当直线l垂直于x轴时，$x_1=x_2=-1,y_1=-y_2,y_1^2=\frac{1}{2}$.

所以$\overrightarrow{QM}=(x_1-2,y_1)$，$\overrightarrow{QN}=(x_2-2,y_2)=(x_1-2,-y_1)$.

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\ x_1-2\ ^2-y_1^2=\frac{17}{2}$. ……7 分

当直线 l 不垂直于 x 轴时，设直线 l 的方程为 $y=k\ x+1$ ，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=k(x+1)\end{cases}$ 得 $1+2k^2\ x^2+4k^2x+2k^2-2=0$.

所以 $x_1+x_2=-\frac{4k^2}{1+2k^2}$ ，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$. ……9 分

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\ x_1-2\ \ x_2-2\ +y_1y_2=x_1x_2-2\ x_1+x_2\ +4+y_1y_2$.

因为 $y_1=k\ x_1+1$ ，$y_2=k\ x_2+1$ ，

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\ k^2+1\ x_1x_2+\ k^2-2\ \ x_1+x_2\ +k^2+4=\frac{17}{2}-\frac{13}{2\ 1+2k^2}<\frac{17}{2}$.

综上所述 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}$ 的最大值是 $\frac{17}{2}$. ……11 分

因为 $S\le\lambda\tan MQN$ 恒成立,

即 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{QM}|\cdot|\overrightarrow{QN}|\sin MQN\le\lambda\frac{\sin MQN}{\cos MQN}$ 恒成立.

由于 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\frac{17}{2}-\frac{13}{2\ 1+2k^2}>0$.

所以 $\cos MQN>0$.

所以 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}\le2\lambda$ 恒成立. ……13 分

所以 λ 的最小值为 $\frac{17}{4}$. ……14 分

注：没有判断 $\angle MQN$ 为锐角，扣 1 分.

（20）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）$\{a_n\}$ 不是无界正数列．理由如下：

取 $M=5$，显然 $a_n=3+2\sin(n)\le5$，不存在正整数 n_0 满足 $a_{n_0}>5$；

$\{b_n\}$是无界正数列．理由如下：

对任意的正数 M，取 n_0 为大于 $2M$ 的一个偶数，有 $b_{n_0}=\frac{n_0+1}{2}>\frac{2M+1}{2}>M$，所以$\{b_n\}$是无界正数列．……4 分

（Ⅱ）存在满足题意的正整数k.理由如下：

当$n\geq 3$时，

因为 $n-\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\frac{a_2-a_1}{a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+3}\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}>\frac{1}{2}$，

即取$k=3$，对于一切$n\geq k$，有 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<n-\frac{1}{2}$成立. ……9 分

注：k 为大于或等于 3 的整数即可.

（Ⅲ）证明：因为数列$\{a_n\}$是单调递增的正数列，

所以 $n-\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\frac{a_2-a_1}{a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$

$>\frac{a_2-a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_3-a_2}{a_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_{n+1}}=1-\frac{a_1}{a_{n+1}}$.

即 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<n-1+\frac{a_1}{a_{n+1}}$.

因为$\{a_n\}$是无界正数列，取$M=2a_1$，由定义知存在正整数n_1，使$a_{n_1+1}>2a_1$.

所以 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n_1}}{a_{n_1+1}}<n_1-\frac{1}{2}$.

由定义可知$\{a_n\}$是无穷数列，考察数列a_{n_1+1}，a_{n_1+2}，a_{n_1+3}，…，显然这仍是一个单调递增的无界正数列，同上理由可知存在正整数n_2，使得 $\frac{a_{n_1+1}}{a_{n_1+2}}+\frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1+3}}+\cdots+\frac{a_{n_2}}{a_{n_2+1}}<(n_2-n_1)-\frac{1}{2}$.

重复上述操作，直到确定相应的正整数n_{4018}.

则 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n_{4018}}}{a_{n_{4018}+1}}<\left(n_1-\frac{1}{2}\right)+\left(n_2-n_1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(n_{4018}-n_{4017}-\frac{1}{2}\right)$

$=n_{4018}-2009$.

即存在正整数 $m=n_{4018}$，使得 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_m}{a_{m+1}}<m-2009$ 成立. .....14 分

智康1对1