北京市海淀区 2008-2009 学年第一学期期末练习

高三数学（文科）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．若角 α 的终边经过点 $P(1,\ -2)$，则 $\tan\alpha$ 的值为　（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．2

2．已知向量 $\boldsymbol{a}$ =(1，0)与向量 $\boldsymbol{b}$ =$(-1,\sqrt{3})$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是　（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

3．和直线 $3x-4y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线方程为（　　）

A．$3x+4y+5=0$　　B．$3x+4y-5=0$

C．$-3x+4y-5=0$　　D．$-3x+4y+5=0$

4．若抛物线 C：$x^2=4y$ 上一点 P 到定点 $A(0,1)$ 的距离为 2，则点 P 到 x 轴的距离为　（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

5．m,n 是不同的直线，α,β 是不重合的平面，下列命题是真命题的是（　　）

A．若 $m\parallel\alpha$，$m\parallel n$，则 $n\parallel\alpha$

B．若 $m\perp\alpha,n\perp\beta$，则 $n\perp m$

C．若 $m\perp\alpha,m\parallel\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

D．若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m\perp\beta$

6．函数 $y=\log_2 x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后可以得到函数 $y=\log_2(x-2)+3$ 的图象，则（　）

A．$\boldsymbol{a}=(2,3)$　　B．$\boldsymbol{a}=(-2,3)$

C．$\boldsymbol{a}=(2,-3)$　　D．$\boldsymbol{a}=(-2,-3)$

7．5 个人分 4 张同样的足球票，每人至多分 1 张，而且票必须分完，那么不同分法的种数是（　　）

智康1对1

A．5^4　　B．4^5　　C．$5\times4\times3\times2$　　D．$\dfrac{5\times4\times3\times2}{4!}$

8．如果直线 $x+y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 交于相异两点 A、B，O 是坐标原点，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，那么实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B．$(\sqrt{2},2)$

C．$(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2)$　　D．$(-2,2)$

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.把答案填在题中横线上.

9．若实数 x,y 满足 $\begin{cases}y\geq 2x-1,\\ x+y\leq 5,\\ x\geq 1,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值是_____.

10．已知正四棱锥的底面边长是 4cm，侧棱长是 $2\sqrt{3}$ cm，则此四棱锥的高为_____cm.

11．已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos(\pi-\alpha)=$_____.

12．已知正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的内切球的体积为 $\dfrac{4\pi}{3}$，则这个正方体的边长为_____，这个正方体的外接球的表面积为_____.

13．在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且满足 $a+b+c=\sqrt{2}+1$，$\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$，则 $c=$_____；若 $C=\dfrac{\pi}{3}$，则 ΔABC 的面积 S=_____.

14．若 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d 且不为 $d\neq0$，$a_1,d\in\mathrm{R}$，它的前 n 项和记为 S_n，设集合

$$P=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{4}-y^2=1,\ x,y\in\mathrm{R}\right\},\quad Q=\left\{(x,y)\middle|x=a_n,y=\frac{S_n}{n},n\in\mathbf{N}^*\right\}$$

给出下列命题：

①集合 Q 表示的图形是一条直线

②$P\cap Q=\varnothing$

③$P\cap Q$ 只有一个元素

④$P\cap Q$ 可以有两个元素

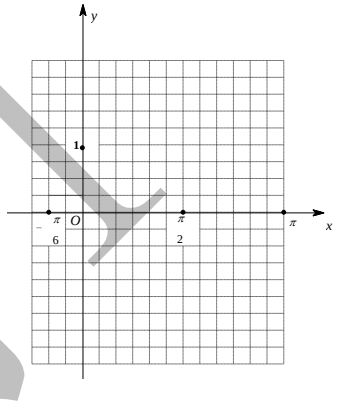
⑤$P\cap Q$ 至多有一个元素.

其中正确的命题序号是_____.（注：把你认为是正确命题的序号都填上）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明， 演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 12 分）已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+\sqrt{3}(2\cos^2 x-1)$.

（I）将函数 $f(x)$ 化为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ （ $\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ）的形式，填写下表，并画出函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi\right]$ 上的图象；

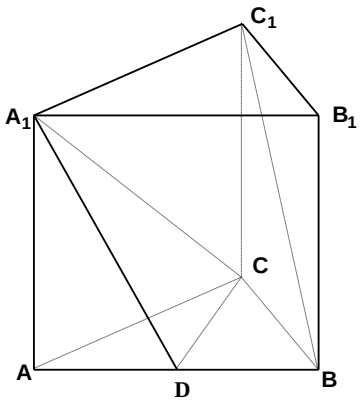


（II）求函数 $f(x)$ 的单调减区间；

16. 本小题共 14 分）直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中， $AC\perp CB$，D 为 AB 中点， $CB=1$， $AC=\sqrt{3}$，$A_1A=\sqrt{3}$.

（I）求证： BC_1 // 平面 A_1CD；

（II）求二面角 $A-A_1C-D$ 的大小。



17.（本小题共 14 分）已知 $A(-3,0)$， $B(3,0)$，动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$

（I）若点 P 的轨迹为曲线 C，求此曲线的方程；

（II）若点 Q 在直线 $l_1:x+y+3=0$ 上，直线 l_2 经过点 Q 且与曲线 C 只有一个公共点 M，求 $|QM|$ 的最小值，并求此时直线 l_2 的方程.

智康1对1

18.（本小题共 14 分）某种家用电器的销售利润与该电器的无故障使用时间有关. 每台这种家用电器若无故障使用时间不超过一年，则销售利润为 0 元，若无故障使用时间超过一年不超过三年，则销售利润为 100 元，若无故障使用时间超过三年，则销售利润为 200 元.

已知每台这种家用电器无故障使用时间不超过一年的概率为$\frac{1}{5}$，无故障使用时间超过一年不超过三年的概率为$\frac{2}{5}$.

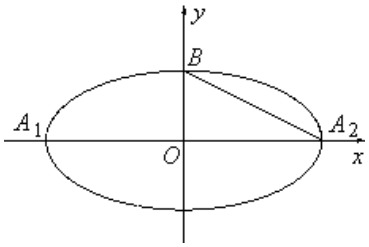
（Ⅰ）求销售两台这种家用电器的销售利润总和为 400 元的概率；

（Ⅱ）求销售三台这种家用电器的销售利润总和为 300 元的概率.

19.（本小题共 14 分）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1$、$A_2$、$B$ 是椭圆的顶点（如图），直线l与椭圆交于异于椭圆顶点的P、Q两点，且$l \parallel A_2B$.若此椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$|A_2B|=\sqrt{5}$

（I）求此椭圆的方程;

（II）设直线A_1P和直线BQ的倾斜角分别为α、β，试判断$\alpha+\beta$是否为定值？若是，求出此定值；若不是，请说明理由.



20.（本小题共 14 分）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=0$，$a_{n+1}=a_n\cdot q+q^{n+1}(q>0)$，$b_n=a_n+2^n$，$n=1,2,3,\cdots$.

（I）求证数列$\left\{\frac{a_n}{q^n}\right\}$是等差数列;

（II）试比较b_1b_3与b_2^2的大小;

（III）求正整数k，使得对于任意的正整数n，$\frac{b_k}{b_{k+1}}\le\frac{b_n}{b_{n+1}}$恒成立.

智康1对1

北京市海淀区 2008-2009 学年第一学期期末练习

高三数学（文科）参考答案 2009.01

一、选择题：CCAB CADC

二、**填空题：**（9）7 .（10）2（11）$-\frac{4}{5}$（12）2， 12π.（13）1，$\frac{\sqrt{3}}{12}$（14） ⑤

三、解答题：本大题共 6 小题,共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

(15)（本小题共 12 分）

解：（I） $f(x)=2\sin x\cos x+\sqrt{3}(2\cos^2 x-1)$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ …… 2 分(化对一个给一分)

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$f(x)$	0	2	0	-2	0

……

…… 3 分

…… 6 分

x 的值对两个给一分，全对给 2 分，不出现 0.5 分。$f(x)$ 的值全对给 1 分

图像略。 （ 图像完全正确给分） …… 8 分

（II）由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 得

$k\pi+\frac{\pi}{12}\leq x\leq k\pi+\frac{7\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

单调减区间为 $[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}]\,(k\in\mathbf{Z})$. …… 12 分

注 $(k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12})$ $(k\in\mathbf{Z})$ 也可以

（16）（本小题共 14 分）

解法一（ I ）证明：连接 AC_1，设 $AC_1\cap A_1C=E$，连接 DE …… 1 分

$\because A_1B_1C_1-ABC$ 是直三棱柱，且 $AC=AA_1=\sqrt{3}$

$\therefore AA_1C_1C$ 是正方形，E 是 AC_1 中点，

又 D 为 AB 中点　　$\therefore ED \parallel BC_1$　　…… 3 分

又 $ED \subset$ 平面 A_1CD，$BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD

$\therefore BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD　　…… 5 分

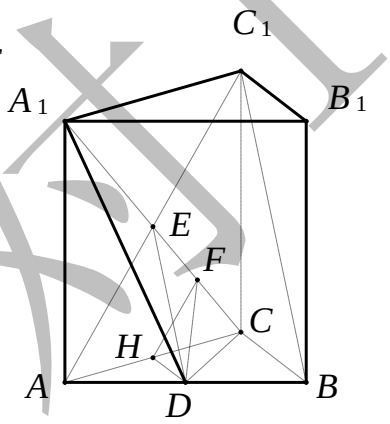
（II）设 H 是 AC 中点，F 是 EC 中点，连接 DH，HF，FD　…… 6 分

$\because D$ 为 AB 中点，

$\therefore DH \parallel BC$，同理可证 $HF \parallel AE$，又 $AC \perp CB$，故 $DH \perp AC$

又侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 ABC，

$\therefore AA_1 \perp DH$　　$\therefore DH \perp$ 平面 AA_1C_1C　　…… 8 分



由（I）得 AA_1C_1C 是正方形，则 $A_1C \perp AE$

$\therefore A_1C \perp HF$

$\because HF$ 是 DF 在平面 AA_1C_1C 上的射影，$\therefore DF \perp A_1C$

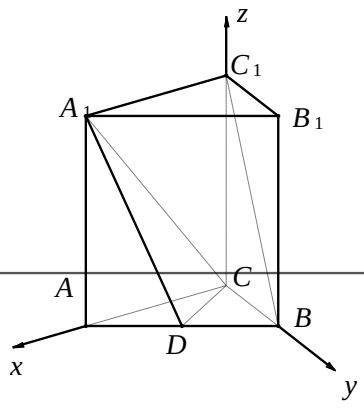
$\therefore \angle DFH$ 是二面角 $A-A_1C-D$ 的平面角　　…… 10 分

又 $DH=\frac{1}{2}$，$HF=\frac{AE}{2}=\frac{AC_1}{4}=\frac{\sqrt{6}}{4}$　　…… 12 分

$\therefore$ 在直角三角形 DFH 中，$\tan DFH=\frac{DH}{HF}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$　　…… 14 分

$\therefore$ 二面角 $A-A_1C-D$ 的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$

解法二：在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$\because AC \perp CB$ $\therefore$ 分别以 CA, CB, CC_1 所在的直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$.因为 $BC=1, AA_1=AC=\sqrt{3}$，



则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$A_1(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$B(0,1,0)$ $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，……7 分

设平面 A_1DC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{CD}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{CA_1}=0. \end{cases}$$ ……8 分

$\because \overrightarrow{CD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{CA_1}=(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，

$$\therefore \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0, \\ \sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0. \end{cases} \quad 则 \begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ z=-x \end{cases},$$ ……9 分

取 $x=1$，得平面 A_1DC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$. ……10 分

$\boldsymbol{m}=\overrightarrow{CB}=(0,1,0)$ 为平面 CAA_1C_1 的一个法向量. ……11 分

$$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-\sqrt{3}}{1\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$$ ……12 分

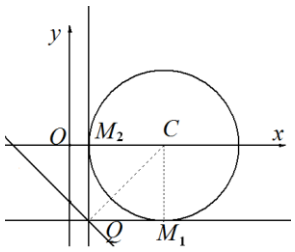
由图可知，二面角 $A-A_1C-D$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$ ……14 分

（17）（本小题共 14 分）

解：（I）设点 P 的坐标为 (x,y)， ……1 分

则 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$， ……3 分

化简可得 $(x-5)^2+y^2=16$ 即为所求 ……5 分



（II）曲线 C 是以点 $(5,0)$ 为圆心，4 为半径的圆，如图

则直线 l_2 是此圆的切线，连接 CQ，则 $|QM|=\sqrt{|CQ|^2-|CM|^2}=\sqrt{|CQ|^2-16}$ ……7 分

当 $CQ\perp l_1$ 时，$|CQ|$ 取最小值 ……8 分

$$|CQ|=\frac{|5+3|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$ ……10 分（公式、结果各一分）

智康1对1

此时$|QM|$的最小值为$\sqrt{32-16}=4$，　　……　12 分

这样的直线l_2有两条，设满足条件的两个公共点为M_1,M_2，

易证四边形M_1CM_2Q是正方形

$\therefore l_2$的方程是$x=1$或$y=-4$……　14 分

（18）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）无故障使用时间不超过一年的概率为$\frac{1}{5}$，

无故障使用时间超过一年不超过三年的概率为$\frac{2}{5}$，

无故障使用时间超过三年的概率为$\frac{2}{5}$　　……　1 分

设销售两台这种家用电器的销售利润总和为 400 元的事件为 A……2 分

$P(A)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$……　7 分

$\therefore$销售两台这种家用电器的销售利润总和为 400 元的概率为$\frac{4}{25}$

（Ⅱ）设销售三台这种家用电器的销售利润总和为 300 元的事件为 B……　8 分

$P(B)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+6\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$　　……　12 分　（两类情况，每类 2 分）

$=\frac{32}{125}$　　……　13 分

$\therefore$销售三台这种家用电器的销售利润总和为 300 元的概率为$\frac{32}{125}$

（19）（本小题共 14 分）

解：（I）由已知可得

$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2+b^2=5\end{cases}$，……　1 分

所以$a=2,b=1$，……　3 分　椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　……　4 分

（II）$\alpha+\beta$ 是定值 π …… 5 分

由（I），$A_2(2,0)$，$B(0,1)$，且 $l \parallel A_2B$ 所以直线 l 的斜率 $k=k_{A_2B}=-\frac{1}{2}$，…… 6 分

设直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=-\frac{1}{2}x+m\end{cases}$$ …… 7 分

$x^2-2mx+2m^2-2=0$

$\therefore \Delta=4m^2-4(2m^2-2)=8-4m^2\geq 0$，即 $-\sqrt{2}\leq m\leq\sqrt{2}$ …… 8 分

$$\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=2m^2-2\end{cases}$$ …… 9 分

$\because P$、Q 两点不是椭圆的顶点 $\therefore \alpha\neq\frac{\pi}{2}$、$\beta\neq\frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan\alpha=k_{A_1P}=\frac{y_1}{x_1+2}$，$\tan\beta=k_{BQ}=\frac{y_2-1}{x_2}$ …… 10 分

又因为 $y_1=-\frac{1}{2}x_1+m$，$y_2=-\frac{1}{2}x_2+m$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{x_2y_1+(x_1+2)(y_2-1)}{(x_1+2)x_2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2+2y_2-x_1-2}{(x_1+2)x_2}$$

$$=\frac{x_2\left(-\frac{1}{2}x_1+m\right)+x_1\left(-\frac{1}{2}x_2+m\right)+2\left(-\frac{1}{2}x_2+m\right)-x_1-2}{(x_1+2)x_2}$$

$$=\frac{(m-1)(x_1+x_2)-x_1x_2+2m-2}{(x_1+2)x_2}=\frac{(m-1)2m-(2m^2-2)+2m-2}{(x_1+2)x_2}=0$$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=0$，又 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$

$\therefore \alpha+\beta\in(0,2\pi)$ $\therefore \alpha+\beta=\pi$ 是定值 …… 14 分

（20）（本小题共 13 分）

智康1对1

解：（I）$\because a_{n+1}=a_n\cdot q+q^{n+1}\ (q>0)$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\dfrac{a_n\cdot q+q^{n+1}}{q^{n+1}}=\dfrac{a_n}{q^n}+1$，又$\dfrac{a_1}{q}=0$，即数列$\left\{\dfrac{a_n}{q^n}\right\}$是以 0 为首项，1 为公差的等差数列

…… 3 分

且$\dfrac{a_n}{q^n}=n-1$，$a_n=(n-1)q^n$（$n=1,2,3\cdots$）

（II）$b_n=a_n+2^n=(n-1)q^n+2^n$ …… 4 分

$\therefore b_1=2$，$b_2=q^2+4$，$b_3=2q^3+8$ …… 5 分

$\therefore b_2^2-b_1b_3=(q^2+4)^2-2(2q^3+8)=(q^4+8q^2+16)-4q^3-16$

$=q^4-4q^3+8q^2=q^2(q^2-4q+8)=q^2\left[(q-2)^2+4\right]>0$

$\therefore b_2^2>b_1b_3$ …… 8 分

（III）$\because b_n=(n-1)q^n+2^n$，$n=1,2,3,\cdots$，$\therefore b_n>0$

$b_1=2$，$b_2=q^2+4$，$b_{n+1}=nq^{n+1}+2^{n+1}$

$\dfrac{b_n}{b_{n+1}}-\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{b_2b_n-b_1b_{n+1}}{b_2b_{n+1}}$，

又$b_2b_n-b_1b_{n+1}=(q^2+4)\left[(n-1)q^n+2^n\right]-2(nq^{n+1}+2^{n+1})$

$=\left[(q^2+4)(n-1)-2nq\right]q^n+q^2\cdot 2^n$ …… 9 分

①当$n=1$时，$b_2b_n-b_1b_{n+1}=0$，即$\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$

②当$n\geq 2$时，$\because q>0$，$q^2+4\geq 2\cdot q\cdot 2=4q$

$\therefore (q^2+4)(n-1)-2nq\geq 4(n-1)q-2nq=2(n-2)q\geq 0$ 又$q^2\cdot 2^n>0$

$\therefore b_2b_n-b_1b_{n+1}>0$

智康1对1

由①②得 $\frac{b_n}{b_{n+1}}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2b_n-b_1b_{n+1}}{b_2b_{n+1}}\geq 0$，即对于任意的正整数 n，$\frac{b_1}{b_2}\leq\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 恒成立

故所求的正整数 $k=1$。 …… 13 分

说明：其他正确解法按相应步骤给分。

智康1对1