北京市海淀区 2010 届上学期期末练习

高三数学(文科)试题

2010.1

1. $\sin 225°=$ （ ）

A. 1　　B. –1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 下面给出四个点中，位于 $\begin{cases}x+y-1<0\\x-y+1>0\end{cases}$ 所表示的平面区域内的点是（ ）

A. $(0,2)$　　B. $(-2,0)$　　C. $(0,-2)$　　D. $(2,0)$

3. 双曲线 $y^2-x^2=2$ 的渐近线方程是（ ）

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$　　C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm 2x$

4. 某学校准备调查高三年级学生完成课后作业所需时间，采取了两种抽样调查的方式：第一种由学生会的同学随机对 24 名同学进行调查；第二种由教务处对年级的 240 名学生编号，由 001 到 240，请学号最后一位为 3 的同学参加调查，则这两种抽样方式依次为( )

A. 分层抽样,简单随机抽样　　B. 简单随机抽样,分层抽样

C. 分层抽样,系统抽样　　D. 简单随机抽样，系统抽样

5. 已知 m,n 是两条不同直线，α,β 是两个不同平面.下列命题中不正确的是（ ）

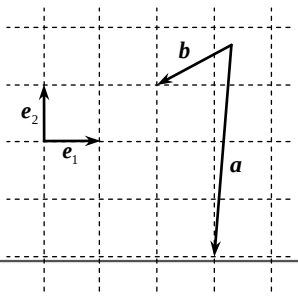
A. 若 $m\parallel\alpha$，$\alpha\cap\beta=n$，则 $m\parallel n$

B. 若 $m\parallel n$，$m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

D. 若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

6. 如图，向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 等于（ ）



A. $-4\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$　　B. $-2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$

C. $\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$　　D. $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$

7. 若直线 l 与直线 $y=1, x=7$ 分别交于点 P, Q，且线段 PQ 的中点坐标为 $(1,-1)$，则直线 l 的斜率为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

8. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦点为 F_1, F_2，若点 P 在椭圆上，且满足 $|PO|^2=|PF_1|\cdot|PF_2|$（其中 O 为坐标原点），则称点 P 为“★点”.那么下列结论正确的是

A．椭圆 C 上的所有点都是“★点”

B．椭圆 C 上仅有有限个点是“★点”

C．椭圆 C 上的所有点都不是“★点”

D．椭圆 C 上有无穷多个点（但不是所有的点）是“★点”

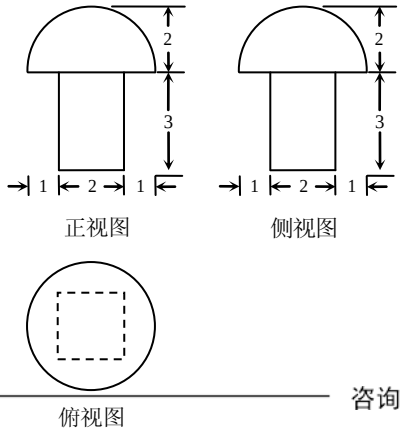
第 II 卷（共 110 分）

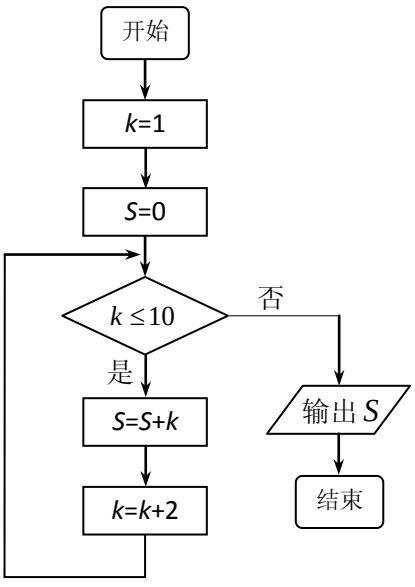
二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.把答案填在题中横线上.

9. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程是_____

10. 某程序的框图如图所示，则执行该程序，输出的 $S=$_____.

11．一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为_____.





12.在区间$[-2,2]$上，随机地取一个数x，则x^2位于0到1之间的概率是_____.

13.已知F_1为椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点，直线$l:y=x-1$与椭圆C交于A、B两点，那么$|F_1A|+|F_1B|$的值为_____.

14. 对于函数$f(x)$，若存在区间$M=[a,b],(a<b)$，使得$\{y\,|\,y=f(x),x\in M\}=M$，则称区间$M$为函数$f(x)$的一个“稳定区间”. 请你写出一个具有“稳定区间”的函数_____;（只要写出一个即可）

给出下列4个函数：

① $f(x)=e^x$；　② $f(x)=x^3$；　③ $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$；　④ $f(x)=\ln x+1$

其中存在“稳定区间”的函数有_____（填上正确的序号）

15. （本小题共12分）已知集合$S=\{x\,|\,\frac{x+2}{x-5}<0\}$，$P=\{x\,|\,a+1<x<2a+15\}$，

（Ⅰ）求集合S；

（Ⅱ）若$S\subseteq P$，求实数a的取值范围.

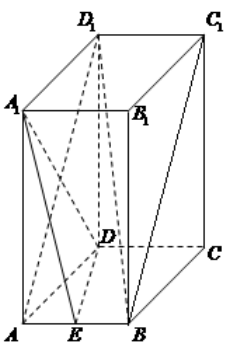
16. （本小题共13分）某校高三年级进行了一次数学测验，随机从甲乙两班各抽取6名同学，所得分数的茎叶图如右图所示：

（I）根据茎叶图判断哪个班的平均分数较高，并说明理由;

（II）现从甲班这6名同学中随机抽取两名同学,求他们的分数之和大于165分的概率.

甲班			乙班		
	2	9	1		
7	0	8	0	3	6
6	2	7	2	5	
	8	6			

17. （本小题共14分）长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中$AB=1,AA_1=AD=2$.点E为AB中点.



（I）求三棱锥 A_1-ADE 的体积；

（II）求证：$A_1D\perp$ 平面 ABC_1D_1；

（III）求证：BD_1 // 平面 A_1DE.

18.（本小题共 13 分）函数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x+1}\ (a\in R)$.

（I）若 $\boldsymbol{f(x)}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{2}$，求实数 a 的值；

（II）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，求函数 $f(x)$ 的单调区间.

19.（本小题共 14 分）已知圆 C 经过点 $\boldsymbol{A}(-2,0),\boldsymbol{B}(0,2)$，且圆心在直线 $\boldsymbol{y=x}$ 上，且，又直线 $l:y=kx+1$ 与圆 C 相交于 P、Q 两点.

（I）求圆 C 的方程；

（II）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2$，求实数 k 的值；

（III）过点 $(0,1)$ 作直线 l_1 与 $\boldsymbol{l}$ 垂直，且直线 l_1 与圆 C 交于 M、N 两点,求四边形 $PMQN$ 面积的最大值.

20.（本小题共 14 分）已知函数 $f(x)=x^2+n$，其中 $m\in R$.定义数列 $\{a_n\}$ 如下：$a_1=0$，$a_{n+1}=f(a_n),n\in N^*$.

（I）当 $m=1$ 时，求 a_2,a_3,a_4 的值；

（II）是否存在实数 m，使 a_2,a_3,a_4 构成公差不为 0 的等差数列？若存在，请求出实数 m 的值，若不存在，请说明理由；

（III）求证：当 $m>\dfrac{1}{4}$ 时，总能找到 $k\in N$，使得 $a_k>2010$.

智康1对1

北京市海淀区 2010 届高三上学期期末练习数学(文科)试题

参考答案及评分标准　　2010．1

说明：　合理答案均可酌情给分，但不得超过原题分数

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	D	A	C	B	B

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 小题,每小题 5 分，有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分，共 30 分）

9. $x=-1$　　10. 25　　11. $12\pi+24$　　12. $\frac{1}{2}$　　13. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　　14. $y=x$ ；②，③

15.（本小题共 12 分）

解：（I）因为 $\frac{x+2}{x-5}<0$ ，所以 $(x-5)(x+2)<0$ ．　　……2 分

解得 $-2<x<5$，　　……4 分

则集合 $S=\{x\,|\,-2<x<5\}$．　　……6 分

（II）因为 $S\subseteq P$，所以 $\begin{cases}a+1\le -2\\ 5\le 2a+15\end{cases}$，　　……8 分

解得 $\begin{cases}a\le -3\\ a\ge -5\end{cases}$，　　……10 分

所以 $a\in[-5,-3]$ ．　　……12 分

注：　若答案写为 $a\in(-5,-3)$，扣 1 分.

16.（本小题共 13 分）

解：（I）因为乙班的成绩集中在 80 分，且没有低分，所以乙班的平均分比较高.

……5 分

（II）设从甲班中任取两名同学，两名同学分数之和超过 165 分为事件 A.

……7 分

从甲班 6 名同学中任取两名同学，则基本事件空间中包含 15 个基本事件，

……9 分

而事件 A 中包含 4 个基本事件，……11 分

所以，$P(A)=\frac{4}{15}$.……12 分

答：从甲班中任取两名同学，两名同学分数之和超过 165 分的概率为 $\frac{4}{15}$.

……13 分

17.（本小题共 14 分）

解；（I）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $AB=1, E$ 为 AB 的中点，所以，$AE=\frac{1}{2}$，

又因为 $AD=2$，所以 $S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot AE=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ，……2 分

又 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，$AA_1=2$,

所以，三棱锥 A_1-ADE 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ADE}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$. ……4 分

（II）因为 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1，$A_1D\subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $AB\perp A_1D$.……6 分

因为 ADD_1A_1 为正方形，所以 $AD_1\perp A_1D$，……7 分

又 $AD_1\cap AB=A$，所以 $A_1D\perp$ 平面 ABC_1D_1 .……9 分

智康1对1

（III）设 AD_1，A_1D 的交点为 O，连结 OE，

因为 ADD_1A_1 为正方形，所以 O 是 AD_1 的中点，……10 分

在 $\Delta\ AD_1B$ 中，OE 为中位线，所以 $OE//BD_1$，……11 分

又 $OE\subset$ 平面 A_1DE，$BD_1\not\subset$ 平面 A_1DE，……13 分

所以 $BD_1//$ 平面 A_1DE ．……14 分

18.（本小题共 13 分）

解:(I) $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-x^2-a}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-a}{(x+1)^2}$ ，……3 分

若 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{2}$，

则 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$．……5 分

所以，$f'(1)=\dfrac{3-a}{4}=\dfrac{1}{2}$，得 $a=1$．……6 分

(II) 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，

所以 $f'(1)=0$，……7 分

即 $1+2-a=0$，$a=3$，……8 分

$\therefore f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ ．……9 分

因为 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq -1\}$，所以有：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	□	极大	□	□	极	□

		值			小值	

……11 分

所以， $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-3),(1,+\infty)$，单调递减区间是 $(-3,-1),(-1,1)$.

……13 分

19.（本小题共 14 分）

解：(I)设圆心 $C(a,a)$，半径为 r. 因为圆经过点 $A(-2,0),B(0,2)$

所以 $|AC|=|BC|=r$，解得 $a=0,r=2$ ，……2 分

所以圆 C 的方程是 $x^2+y^2=4$. ……4 分

(II)方法一：

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2\times2\times\cos\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle=-2$， ……6 分

所以 $\cos\angle POQ=-\frac{1}{2}$，$\angle POQ=120^\circ$， ……7 分

所以圆心到直线 $l:kx-y+1=0$ 的距离 $d=1$， ……8 分

又 $d=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $k=0$. ……9 分

方法二：设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

因为 $\begin{cases}y=kx+1\\x^2+y^2=4\end{cases}$，代入消元得 $(1+k^2)x^2+2kx-3=0$. ……6 分

由题意得： $\begin{cases}\Delta=4k^2-4(1+k^2)(-3)>0\\x_1+x_2=\frac{-2k}{1+k^2}\\x_1\cdot x_2=\frac{-3}{1+k^2}\end{cases}$ ……7 分

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=-2$，

又 $y_1\cdot y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1\cdot x_2+k(x_1+x_2)+1$，

所以，$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=\dfrac{-3}{1+k^2}+\dfrac{-3k^2}{1+k^2}+\dfrac{-2k^2}{1+k^2}+1=-2$，　……8 分

化简得：$-5k^2-3+3(k^2+1)=0$，

所以 $k^2=0$，　即 $k=0$．　……9 分

(III)方法一：

设圆心 O 到直线 l,l_1 的距离分别为 d,d_1，四边形 $PMQN$ 的面积为 S．

因为直线 l,l_1 都经过点 $(0,1)$，且 $l\perp l_1$，

根据勾股定理，有 $d_1^2+d^2=1$，　……10 分

又根据垂径定理和勾股定理得到，$|PQ|=2\cdot\sqrt{4-d^2}$，$|MN|=2\cdot\sqrt{4-d_1^2}$，

……11 分

而 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot|MN|$，即

$$S=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{4-d_1^2}\times2\times\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{16-4(d_1^2+d^2)+d_1^2\cdot d^2}$$

……13 分

$$=2\sqrt{12+d_1^2\cdot d^2}\le2\sqrt{12+(\frac{d_1^2+d^2}{2})^2}=2\sqrt{12+\frac{1}{4}}=7,$$

当且仅当 $d_1=d$ 时，等号成立，所以 S 的最大值为 7．　……14 分

方法二：设四边形 $PMQN$ 的面积为 S．

当直线 l 的斜率 $k=0$ 时，则 l_1 的斜率不存在，

此时 $S=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot4=4\sqrt{3}$．　……10 分

当直线 l 的斜率 $k\neq0$ 时，

设 $l_1:y=-\dfrac{1}{k}x+1$

则 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$，代入消元得 $(1+k^2)x^2+2kx-3=0$

所以 $\begin{cases} \Delta=4k^2-4(1+k^2)(-3)>0 \\ x_1+x_2=\dfrac{-2k}{1+k^2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{-3}{1+k^2} \end{cases}$

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{4k^2+12k^2+12}}{1+k^2}=\frac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{16k^2+12}}{1+k^2}$$

同理得到 $|MN|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\,\dfrac{\sqrt{16\dfrac{1}{k^2}+12}}{1+\dfrac{1}{k^2}}=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{12k^2+16}}{1+k^2}$.

……11 分

$$S=\frac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot|MN|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+k^2)\sqrt{(16k^2+12)(12k^2+16)}}{(1+k^2)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{16(4k^2+3)(3k^2+4)}}{1+k^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{12k^4+25k^2+12}}{1+k^2}=2\sqrt{\frac{12(k^4+2k^2+1)+k^2}{k^4+2k^2+1}}$$

$$=2\sqrt{12+\frac{k^2}{k^4+2k^2+1}}=2\sqrt{12+\frac{1}{k^2+2+\dfrac{1}{k^2}}}$$

……12 分

因为 $k^2+2+\dfrac{1}{k^2}\geq 2+2\sqrt{k^2\cdot\dfrac{1}{k^2}}=4$，

所以 $S\leq 2\sqrt{12+\dfrac{1}{4}}=2\times\dfrac{7}{2}=7$，

……13 分

当且仅当 $k=\pm1$ 时，等号成立,所以 S 的最大值为 7.

……14 分

20（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为$a_1=0$，$m=1$，所以$a_2=f(0)=m=1$，

$a_3=f(m)=m^2+m=2$，$a_4=f(a_3)=(m^2+m)^2+m=5$. ……4 分

（II）方法一：

假设存在实数m，使得a_2,a_3,a_4构成公差不为 0 的等差数列.

由（I）得到$a_2=f(0)=m$，$a_3=f(m)=m^2+m$，

$a_4=f(a_3)=(m^2+m)^2+m$.

因为a_2,a_3,a_4成等差数列，

所以$2a_3=a_2+a_4$， ……6 分

所以，$2(m^2+m)=m+(m^2+m)^2+m$，

化简得$m^2(m^2+2m-1)=0$，

解得$m=0$（舍），$m=-1\pm\sqrt{2}$. ……8 分

经检验，此时a_2,a_3,a_4的公差不为 0，

所以存在$m=-1\pm\sqrt{2}$，使a_2,a_3,a_4构成公差不为 0 的等差数列……9 分

方法二：

因为a_2,a_3,a_4成等差数列，

所以$a_3-a_2=a_4-a_3$， ……6 分

即$a_2^2+m-a_2=a_3^2+m-a_3$，

所以$(a_3^2-a_2^2)-(a_3-a_2)=0$，即$(a_3-a_2)(a_3+a_2-1)=0$.

因为$a_3-a_2\neq 0$，所以$a_3+a_2-1=0$解得$m=-1\pm\sqrt{2}$. ……8 分

经检验，此时a_2,a_3,a_4的公差不为 0.

所以存在$m=-1\pm\sqrt{2}$，使a_2,a_3,a_4构成公差不为 0 的等差数列. ……9 分

智康1对1

（III）因为 $a_{n+1}-a_n=a_n^2+m-a_n=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(m-\frac{1}{4}\right)\geq m-\frac{1}{4}$，

又 $m>\frac{1}{4}$，所以令 $d=m-\frac{1}{4}>0$.

由 $a_n-a_{n-1}\geq d$，

$a_{n-1}-a_{n-2}\geq d$，

……

$a_2-a_1\geq d$，

将上述不等式全部相加得 $a_n-a_1\geq(n-1)d$，即 $a_n\geq(n-1)d$，

因此只需取正整数 $k>\frac{2010}{d}+1$，就有 $a_k\geq(k-1)d>d\cdot(\frac{2010}{d})=2010$.

……14 分

说明：其它正确解法按相应步骤给分.

智康1对1