北京市西城区 2010—2011 学年度第一学期期末试卷

高三数学（理科）

2011.1

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x+1<0\}$，$B=\{x|x-3<0\}$，那么集合 $(C_U A)\cap B=$

A．$\{x|-1\le x<3\}$　　B．$\{x|-1<x<3\}$

C．$\{x|x<-1\}$　　D．$\{x|x>3\}$

2. 已知点 $A(-1,1)$，点 $B(2,y)$，向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，若 $\overrightarrow{AB}//\boldsymbol{a}$，则实数 y 的值为

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

3. 已知 ΔABC 中，$a=1,b=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，则角 A 等于

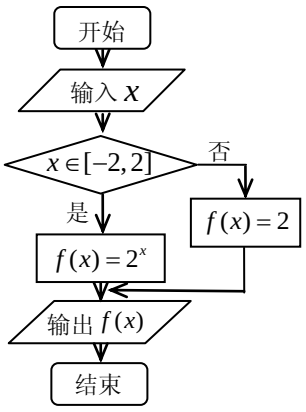
A．150°　　B．90°　　C．60°　　D．30°

4. 在极坐标系中，过点 $(1,0)$ 并且与极轴垂直的直线方程是

A．$\rho=\cos\theta$　　B．$\rho=\sin\theta$

C．$\rho\cos\theta=1$　　D．$\rho\sin\theta=1$

5. 阅读右面程序框图，如果输出的函数值在区间 $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 内，则输入的实数 x 的取值范围是



A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,-1]$

C．$[-1,2]$　　D．$[2,+\infty)$

6. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $8a_2+a_5=0$，则下列式子中数值不能确定的是

A．$\frac{a_5}{a_3}$　　B．$\frac{S_5}{S_3}$　　C．$\frac{a_{n+1}}{a_n}$　　D．$\frac{S_{n+1}}{S_n}$

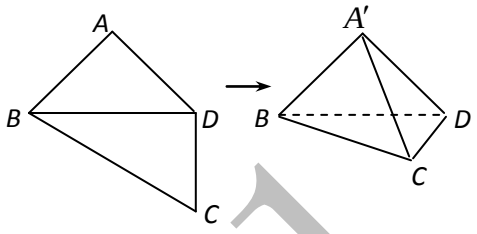
7. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$BD\perp CD$.将四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'-BCD$，使平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，则下列结论正确的是

A．$A'C\perp BD$

B．$\angle BA'C=90^\circ$

C．CA' 与平面 $A'BD$ 所成的角为 30°

D．四面体 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}$



8．对于函数① $f(x)=4x+\frac{1}{x}-5$，② $f(x)=|\log_2 x|-(\frac{1}{2})^x$，③ $f(x)=\cos(x+2)-\cos x$，判断如下两个命题的真假：

命题甲：$f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上是增函数；

命题乙：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恰有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1x_2<1$.[来源:学科网]

能使命题甲、乙均为真的函数的序号是

A．①　　B．②　　C．①③　　D．①②

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

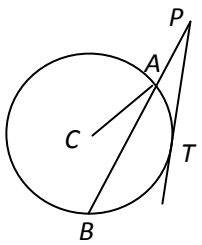
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.i 为虚数单位，则 $\frac{2}{(1+\mathrm{i})^2}=$_____.

10.在 $(2+x)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为_____.

11. 若实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geq 0,\\ x+y\geq 2,\\ x\leq 1,\end{cases}$ 则 $2x+y$ 的最大值为_____.

12.如图所示，过圆 C 外一点 P 做一条直线与圆 C 交于 A,B 两点，$BA=2AP$，PT 与圆 C 相切于 T 点.已知圆 C 的半径为 2，$\angle CAB=30^\circ$,则 $PT=$_____.



13. 双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的渐近线方程为_____；若双曲线 C 的右顶点为 A，过 A 的

直线 l 与双曲线 C 的两条渐近线交于 P,Q 两点，且 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AQ}$，则直线 l 的斜率为_____.

14.在平面直角坐标系中，定义 $d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 之间的“折线距离”. 则坐标原点 O 与直线 $2x+y-2\sqrt{5}=0$ 上一点的“折线距离”的最小值是____；圆 $x^2+y^2=1$ 上一点与直线 $2x+y-2\sqrt{5}=0$ 上一点的“折线距离”的最小值是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x$.[来源:Zxxk.Com]

（Ⅰ）若点 $P(1,-\sqrt{3})$ 在角 α 的终边上，求 $f(\alpha)$ 的值；

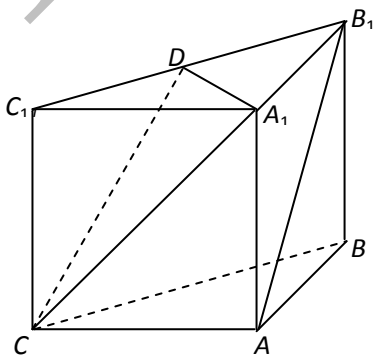
（Ⅱ）若 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，求 $f(x)$ 的值域.

16.（本小题满分 13 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1，ACC_1A_1 均为正方形，$\angle BAC=90^\circ$，点 D 是棱 B_1C_1 的中点.

（Ⅰ）求证：A_1D ⊥平面 BB_1C_1C；

（Ⅱ）求证：AB_1 // 平面 A_1DC；

（Ⅲ）求二面角 $D-A_1C-A$ 的余弦值.



17.（本小题满分 13 分）一个袋中装有 6 个形状大小完全相同的小球，球的编号分别为 $1,2,3,4,5,6$.

（Ⅰ）若从袋中每次随机抽取 1 个球，有放回的抽取 2 次，求取出的两个球编号之和为 6 的概率；

（Ⅱ）若从袋中每次随机抽取 2 个球，有放回的抽取 3 次，求恰有 2 次抽到 6 号球的概率；

（Ⅲ）若一次从袋中随机抽取 3 个球，记球的最大编号为 X，求随机变量 X 的分布列.

18.（本小题满分 13 分）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点为 $F_2(3,0)$，离心率为 e.

（Ⅰ）若 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求椭圆的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=kx$ 与椭圆相交于 A，B 两点，M,N 分别为线段 AF_2,BF_2 的中点. 若坐标原点 O 在以 MN 为直径的圆上，且 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 k 的取值范围.

19.（本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的切线互相平行，求 a 的值；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅲ)设 $g(x)=x^2-2x$，若对任意 $x_1\in(0,2]$，均存在 $x_2\in(0,2]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围.

20.（本小题满分 14 分）已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+1}-a_n$，其中 $n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）若 $a_1=1,b_n=n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $b_{n+1}b_{n-1}=b_n(n\ge2)$，且 $b_1=1,b_2=2$.

（ⅰ）记 $c_n=a_{6n-1}(n\ge1)$，求证：数列 $\{c_n\}$ 为等差数列；

（ⅱ）若数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 中任意一项的值均未在该数列中重复出现无数次. 求首项 a_1 应满足的条件.

智康1对1

北京市西城区 2010 — 2011 学年度第一学期期末

高三数学参考答案及评分标准

（理科） 2011.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	C	B	D	B	D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $-i$ **10.** 80 **11.** 4

12. 3 **13.** $x\pm y=0$，± 3 **14.** $\sqrt{5}$，$\frac{\sqrt{5}}{2}$

注：13、14 题第一问 2 分，第二问 3 分.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 80 分.若考生的解法与本解答不同，正确者可参照评分标准给分.）

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为点 $P(1,-\sqrt{3})$ 在角 α 的终边上， [来源:学科网 ZXXK]

所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$， ……2 分

所以 $f(\alpha)=\sqrt{3}\sin 2\alpha-2\sin^2\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha$ ……4 分

$=2\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})\times\frac{1}{2}-2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=-3.$ ……5 分

（Ⅱ） $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1$ ……6 分

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$， ……8 分

因为 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$， ……10 分

所以 $-\frac{1}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{6})\le 1$， ……11 分

所以 $f(x)$ 的值域是 $[-2,1]$. ……13 分[来源:Zxxk.Com]

16.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）证明：因为侧面 ABB_1A_1， ACC_1A_1 均为正方形，

所以 $AA_1 \perp AC, AA_1 \perp AB$，

所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱. ……1 分

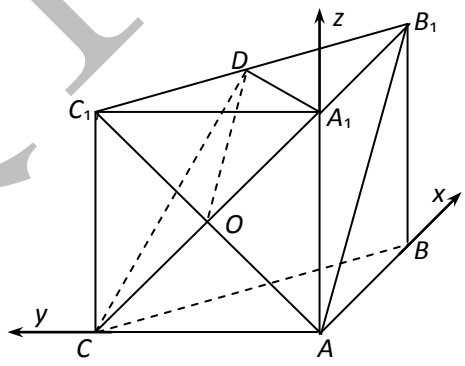
因为 $A_1D \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $CC_1 \perp A_1D$， ……2 分

又因为 $A_1B_1 = A_1C_1$， D 为 B_1C_1 中点，

所以 $A_1D \perp B_1C_1$. ……3 分

因为 $CC_1 \cap B_1C_1 = C_1$，

所以 $A_1D \perp$ 平面 BB_1C_1C. ……4 分



（Ⅱ）证明：连结 AC_1，交 A_1C 于点 O，连结 OD，

因为 ACC_1A_1 为正方形，所以 O 为 AC_1 中点，

又 D 为 B_1C_1 中点，所以 OD 为 ΔAB_1C_1 中位线，

所以 $AB_1 // OD$， ……6 分

因为 $OD \subset$ 平面 A_1DC， $AB_1 \not\subset$ 平面 A_1DC，

所以 $AB_1 //$ 平面 A_1DC. ……8 分

(Ⅲ)解： 因为侧面 ABB_1A_1， ACC_1A_1 均为正方形， $\angle BAC = 90^\circ$，

所以 AB, AC, AA_1 两两互相垂直，如图所示建立直角坐标系 $A-xyz$.

设 $AB=1$，则 $C(0,1,0), B(1,0,0), A_1(0,0,1), D(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$.

智康1对1

$\overrightarrow{A_1D}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-1)$，……9 分

设平面 A_1DC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot A_1D=0\\ \boldsymbol{n}\cdot A_1C=0\end{cases}$，$\begin{cases}x+y=0\\ y-z=0\end{cases}$，$x=-y=-z$，

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$. ……10 分

又因为 $AB\perp$ 平面 ACC_1A_1，所以平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，……11 分

$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}\rangle=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AB}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，……12 分

因为二面角 $D-A_1C-A$ 是钝角，

所以，二面角 $D-A_1C-A$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……13 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设先后两次从袋中取出球的编号为 m,n，则两次取球的编号的一切可能结果 (m,n) 有 $6\times6=36$ 种，……2 分

其中和为 6 的结果有 $(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)$，共 5 种，

则所求概率为 $\frac{5}{36}$. ……4 分

（Ⅱ）每次从袋中随机抽取 2 个球,抽到编号为 6 的球的概率 $p=\frac{C_5^1}{C_6^2}=\frac{1}{3}$.

……6 分

所以，3 次抽取中，恰有 2 次抽到 6 号球的概率为

$C_3^2p^2(1-p)=3\times(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})=\frac{2}{9}$. ……8 分

（Ⅲ）随机变量 X 所有可能的取值为 $3,4,5,6$. ……9 分

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，

$$P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20},$$

$$P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_6^3}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=6)=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$ ……12 分

所以，随机变量 X 的分布列为:

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{20}$ [来源:学|科|网 Z|X|X|K]	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

……13 分

18、（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} c=3 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$，得 $a=2\sqrt{3}$. ……2 分

结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a^2=12$，$b^2=3$. ……3 分[来源:Z&xx&k.Com]

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

（Ⅱ）由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=kx,\end{cases}$ 得$(b^2+a^2k^2)x^2-a^2b^2=0$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

所以$x_1+x_2=0,x_1x_2=\dfrac{-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$，　……6 分

依题意，$OM\perp ON$，

易知，四边形OMF_2N为平行四边形，

所以$AF_2\perp BF_2$，　……7 分

因为$\overrightarrow{F_2A}=(x_1-3,y_1)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_2-3,y_2)$，

所以$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=(x_1-3)(x_2-3)+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+9=($　……8 分[来源:学+科+网Z+X+X+K]

即$\dfrac{-a^2(a^2-9)(1+k^2)}{a^2k^2+(a^2-9)}+9=0$，　……9 分

将其整理为$k^2=\dfrac{a^4-18a^2+81^2}{-a^4+18a^2}=-1-\dfrac{81}{a^4-18a^2}$.　……10 分

因为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<e\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$2\sqrt{3}\le a<3\sqrt{2}$，$12\le a^2<18$.　……11 分

所以$k^2\ge\dfrac{1}{8}$，即$k\in(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{4}]\cup(\dfrac{\sqrt{2}}{4},+\infty]$.　……13 分

19.（本小题满分 14 分）

解：$f'(x)=ax-(2a+1)+\dfrac{2}{x}\ (x>0)$.　……2 分

（Ⅰ）$f'(1)=f'(3)$，解得$a=\dfrac{2}{3}$.　……3 分

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{x}\ (x>0)$.　……5 分

①当$a\le 0$时，$x>0$，$ax-1<0$，

在区间$(0,2)$上，$f'(x)>0$；在区间$(2,+\infty)$上$f'(x)<0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(0,2)$，单调递减区间是$(2,+\infty)$. 6分

②当$0<a<\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{a}>2$，

在区间$(0,2)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$上，$f'(x)>0$；在区间$(2,\frac{1}{a})$上$f'(x)<0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(0,2)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间是$(2,\frac{1}{a})$. 7分

③当$a=\frac{1}{2}$时，$f'(x)=\frac{(x-2)^2}{2x}$，故$f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$. 8分

④当$a>\frac{1}{2}$时，$0<\frac{1}{a}<2$，

在区间$(0,\frac{1}{a})$和$(2,+\infty)$上，$f'(x)>0$；在区间$(\frac{1}{a},2)$上$f'(x)<0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(0,\frac{1}{a})$和$(2,+\infty)$，单调递减区间是$(\frac{1}{a},2)$. 9分

（Ⅲ）由已知，在$(0,2]$上有$f(x)_{\max}<g(x)_{\max}$. 10分

由已知，$g(x)_{\max}=0$，由（Ⅱ）可知，[来源:学科网]

①当$a\le\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$(0,2]$上单调递增，

故$f(x)_{\max}=f(2)=2a-2(2a+1)+2\ln 2=-2a-2+2\ln 2$，

所以，$-2a-2+2\ln 2<0$，解得$a>\ln 2-1$，故$\ln 2-1<a\le\frac{1}{2}$. 11分

②当$a>\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a}]$上单调递增，在$[\frac{1}{a},2]$上单调递减，

故$f(x)_{\max}=f(\frac{1}{a})=-2-\frac{1}{2a}-2\ln a$.

由$a>\frac{1}{2}$可知$\ln a>\ln\frac{1}{2}>\ln\frac{1}{e}=-1$，$2\ln a>-2$，$-2\ln a<2$，

所以，$-2-2\ln a<0$，$f(x)_{\max}<0$， 13分

综上所述，$a>\ln 2-1$. 14分

智康1对1

20.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）当$n\geq 2$时，有

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}$ ……2 分

$=1+\dfrac{(n-1)\times n}{2}=\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{2}+1.$ ……3 分

又因为$a_1=1$也满足上式，所以数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{2}+1$……4 分

（Ⅱ）（ⅰ）因为对任意的$n\in\mathbf{N}^*$有$b_{n+6}=\dfrac{b_{n+5}}{b_{n+4}}=\dfrac{1}{b_{n+3}}=\dfrac{b_{n+1}}{b_{n+2}}=b_n$， ……5 分

所以 $c_{n+1}-c_n=a_{6n+5}-a_{6n-1}=b_{6n-1}+b_{6n}+b_{6n+1}+b_{6n+2}+b_{6n+3}+b_{6n+4}$

$=1+2+2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=7\ (n\geq 1)$，

所以数列$\{c_n\}$为等差数列. ……7 分

（ⅱ）设$c_n=a_{6n+i}(n\geq 0)$，（其中i为常数且$i\in\{1,2,3,4,5,6\}$），所以

$c_{n+1}-c_n=a_{6n+6+i}-a_{6n+i}=b_{6n+i}+b_{6n+i+1}+b_{6n+i+2}+b_{6n+i+3}+b_{6n+i+4}+b_{6n+i+5}=7(n\geq 0)$

所以数列$\{a_{6n+i}\}$均为以 7 为公差的等差数列. ……9 分

设 $f_k=\dfrac{a_{6k+i}}{6k+i}=\dfrac{a_i+7k}{i+6k}=\dfrac{\frac{7}{6}(i+6k)+a_i-\frac{7i}{6}}{i+6k}=\dfrac{7}{6}+\dfrac{a_i-\frac{7i}{6}}{i+6k}$，

（其中$n=6k+i\ (k\geq 0)$，i为$\{1,2,3,4,5,6\}$中的一个常数），

当$a_i=\dfrac{7i}{6}$时，对任意的$n=6k+i$有$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{7}{6}$； ……10 分

当$a_i\neq\dfrac{7i}{6}$时，

$$f_{k+1}-f_k=\frac{a_i-\frac{7i}{6}}{6(k+1)+i}-\frac{a_i-\frac{7i}{6}}{6k+i}=(a_i-\frac{7i}{6})(\frac{1}{6(k+1)+i}-\frac{1}{6k+i})$$

$$=(a_i-\frac{7i}{6})(\frac{-6}{[6(k+1)+i](6k+i)})$$

……11 分

①若$a_i>\dfrac{7i}{6}$，则对任意的$k\in\mathbf{N}$有$f_{k+1}<f_k$，所以数列$\{\dfrac{a_{6k+i}}{6k+i}\}$为单调减数列；

②若 $a_i < \frac{7i}{6}$，则对任意的 $k \in \mathbf{N}$ 有 $f_{k+1} > f_k$，所以数列 $\{\frac{a_{6k+i}}{6k+i}\}$ 为单调增数列；

……12 分

综上：设集合 $B = \{\frac{7}{6}\} \cup \{\frac{4}{3}\} \cup \{\frac{1}{2}\} \cup \{-\frac{1}{3}\} \cup \{-\frac{1}{6}\} \cup \{\frac{1}{2}\} = \{\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\}$，

当 $a_1 \in B$ 时，数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 中必有某数重复出现无数次.

当 $a_1 \notin B$ 时，$\{\frac{a_{6k+i}}{6k+i}\}$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ 均为单调数列，任意一个数在这 6 个数列中最多出现一次，所以数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 中任意一项的值均未在该数列中重复出现无数次. ……14 分

智康1对1