昌平区 2010—2011 学年第一学期期末质量抽测

高三年级数学试卷（理科）

2011.1

考生注意事项:

1、本试卷共 6 页，分第 I 卷选择题和第 II 卷非选择题两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

2、答题前，考生务必将学校、姓名、考试编号填写清楚。答题卡上第一部分(选择题)必须用 2B 铅笔作答，第二部分(非选择题)必须用黑色字迹的签字笔作答，作图时可以使用 2B 铅笔。

3、修改时，选择题用塑料橡皮擦干净，不得使用涂改液。请保持卡面整洁，不要折叠、折皱、破损。不得在答题卡上作任何标记。

4、请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，未在对应的答题区域作答或超出答题区域的作答均不得分。

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．)

1. 已知全集$U=R$,集合 M={x| x<3},N = { x| x≤2}　那么集合　$M\cap(C_UN)$ 等于

A. ϕ　　B. {x| $x\le 2$0<x<3}

C. {x | $2\le x<3$ }　　D. {x | 2<x<3}

2. $\sin\frac{23\pi}{6}$ 等于

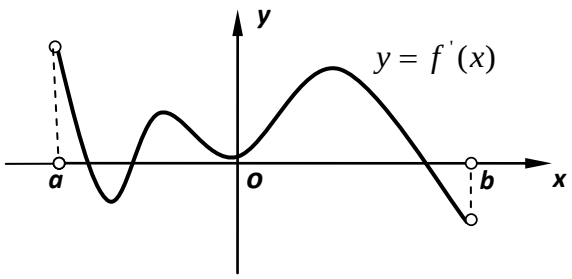
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知向量$\bar{a}=(6,2)$,向量$\vec{b}=(x,3)$,且$\bar{a}//\vec{b}$, 则 x 等于

A.9　　B. 6　　C.5　　D.3

4. 函数 $f(x)$ 的定义域为（a,b），导函数 $f'(x)$ 在（a,b）内的图像如图所示，则函数 $f(x)$ 在（a,b）内有

极小值点的个数为



A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

5. 设$\{a_n\}$是公差为正数的等差数列，若$a_1+a_2+a_3=15, a_1a_2a_3=80$, 则$a_{11}+a_{12}+a_{13}$等于

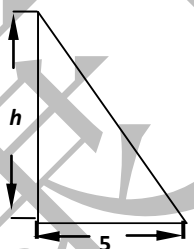
A.120　　B. 105　　C. 90　　D.75

6. 已知ΔABC的顶点 B、C 在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上，顶点 A 是椭圆的一个焦点，且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上，则ΔABC的周长是.

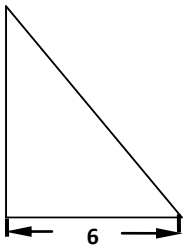
A. $2\sqrt{3}$　　B.6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 12

7. 下图中的三个直角三角形是一个体积为 40cm^3 的几何体的三视图，则 h 等于

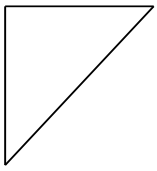
A.8　　B. 6　　C. 4　　D. 2



正(主)视图



侧（左）视图



俯视图

（单位：cm）

8. 已知满足条件$x^2+y^2\le 1$的点（x,y）构成的平面区域面积为S_1，满足条件$[x]^2+[y]^2\le 1$的点（x,y）构成的平面区域的面积为S_2,其中$[x],[y]$分别表示不大于x,y的最大整数，例如：[-0.4]=-1,[1.6]=1,则S_1与S_2的关系是

A. $S_1<S_2$　　B. $S_1=S_2$

C. $S_1 > S_2$　　D. $S_1 + S_2 = \pi + 3$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

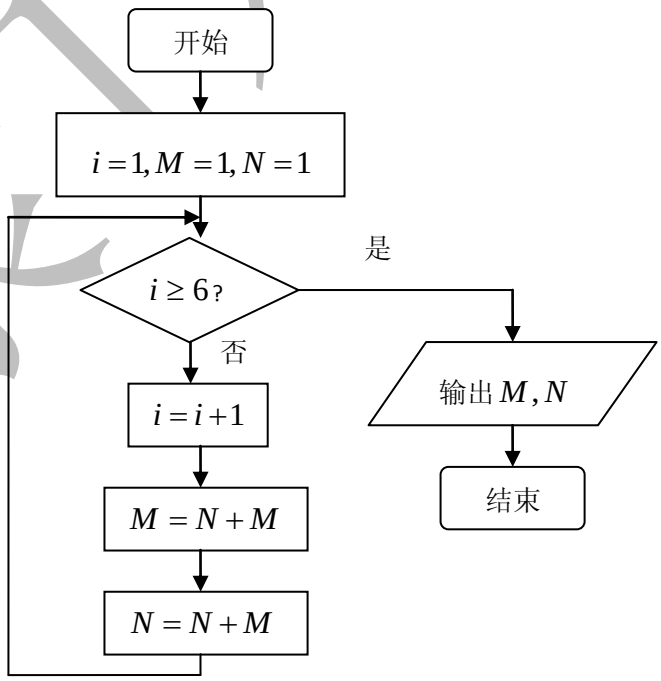
二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.）

9. 函数 $f(x) = \lg(x-1)$ 的定义域是_____

10. 已知 a、b、c 分别是 ΔABC 的三个内角 A、B、C 所对的边，若 a=2, b=$\sqrt{6}$, A+C=2B,则 A=_____

11.已知点 P(x,y)的坐标满足条件 $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq x \\ x + y \leq 8 \end{cases}$，点 O 为坐标原点，那么|PO|的最大值等于_____.

12.某程序框图如图所示，该程序运行后输出 M, N 的值分别为_____.



13.已知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 2x$，且与椭圆 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 有相同的焦点，则其焦点坐标为_____，双曲线的方程是_____.

14.某资料室在计算机使用中，如下表所示，编码以一定规则排列，且从左至右以及从上到下都是无限的.

1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	…
1	3	5	7	9	11	…
1	4	7	10	13	16	…
1	5	9	13	17	21	…
1	6	11	16	21	26	…
…	…	…	…	…	…	…

此表中，数列 1，3，7，13，21，…的通项公式为_____;编码 51 共出现 _____次.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．)

15. （本小题满分 13 分）设函数 $f(x)=\sin x\cos x+\cos^2 x$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16. (本小题满分 13 分) 甲、乙二人用 4 张扑克牌（分别是红桃 2、红桃 3、红桃 4、方块 4）玩游戏，他们将扑克牌洗匀后，背面朝上放在桌面上，甲先抽，乙后抽，抽出的牌不放回，各抽一张。

（1）设 (i,j) 分别表示甲、乙抽到的牌的数字，写出甲、乙二人抽到的牌的所有情况

（2）若甲抽到红桃 3，则乙抽到的牌面数字比 3 大的概率是多少？

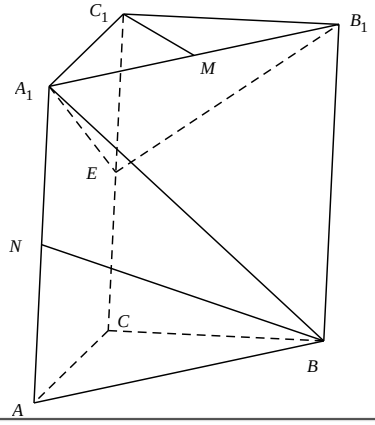
（3）甲、乙约定：若甲抽到的牌的牌面数字比乙大，则甲胜；否则，乙胜。你认为此游戏是否公平？请说明你的理由.

17.（本小题满分 13 分） 如图所示，直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，CA=CB=2，$\angle BCA=90^0$，棱 $AA_1=4$，E、M、N 分别是 CC_1、A_1B_1、AA_1 的中点.

（1）求证：$A_1B\perp C_1M$；

（2）求 BN 的长；

（3）求二面角 $B_1-A_1E-C_1$ 平面角的余弦值.



18. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x)=ax^2+2\ln(x+1)$,其中 a 为实数.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值，求 a 的值；

（2）若 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上是增函数，求 a 的取值范围。

19. (本小题满分 14 分)已知中心在原点的椭圆 C 的右焦点为（$\sqrt{3}$，0），右顶点为（2，0）.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 $l:y=kx+\sqrt{2}$ 与椭圆 C 恒有两个不同的交点 A 和 B，且 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}>2$ (其中 O 为原点)，求 k 的取值范围.

20. (本小题满分 14 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，点 $\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$ 在直线 $y=x+4$ 上．数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0\ (n\in N^*)$，且 $b_4=8$，前 11 项和为 154.

（1）求数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\frac{3}{2(a_n-2)(2b_n+5)}$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求使不等式 $T_n>\frac{k}{75}$ 对一切 $n\in N^*$ 都成立的最大正整数 k 的值；

（3）设 $f(n)=\begin{cases}a_n,(n=2l-1,l\in N^*),\\ b_n,(n=2l,l\in N^*).\end{cases}$ 是否存在 $m\in N^*$，使得 $f(m+9)=3f(m)$ 成立？若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由.

智康1对1

昌平区 2010－2011 学年第一学期高三年级期末质量抽测数学(理科)试卷

参考答案及评分标准

2011.1

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	D	B	C	D	A

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．)

9. $\{x \mid x>1\}$　　10. $\frac{\pi}{4}$　　11. $2\sqrt{10}$

12. 34, 55　　第一空 2 分，第二空 3 分

13 $(\pm 5,0)$ ， $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$　　第一空 2 分，第二空 3 分

14. $a_n=n^2-n+1$ $(n\in \mathbf{N}^*)$,6　　第一空 3 分，第二空 2 分

三、解答题(本大题共 6 小题，共 80 分)

15.（本小题满分 13 分）

解：（1） $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$ ……6 分

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 π．……7 分 2

（2）因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$．……9 分

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时， $f(x)$ 有最大值 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，……11 分

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)$ 有最小值 0．……13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（1）甲、乙二人抽到的牌的所有情况为（2，3），（2，4），（2，$4'$），（3，2），（3，4），（3，$4'$），（4，2），（4，3），（4，$4'$），（$4'$，2），（$4'$，3），（$4'$，4），共 12 种不同情况

……4 分

（2）甲抽到 3，乙抽到的牌只能是 2，4，$4'$.因此乙抽到的牌的数字大于 3 的概率为 $\frac{2}{3}$. ……8 分

（3）由甲抽到的牌比乙大有（3，2），（4，2），（4，3），（$4'$，2），（$4'$，3），共 5 种甲获胜的概率 $P_1=\frac{5}{12}$，乙获胜的概率为 $P_2=\frac{7}{12}$

$\because \frac{5}{12}<\frac{7}{12}$

∴此游戏不公平 ……..13 分

17.(本小题满分 13 分)

解：（1）$\because CA=CB$

$\therefore C_1A_1=C_1B_1$,点 M 为 A_1B_1 的中点

$\therefore C_1M\perp A_1B_1$

在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$\therefore B_1B\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $C_1M\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$

$\therefore BB_1\perp C_1M$

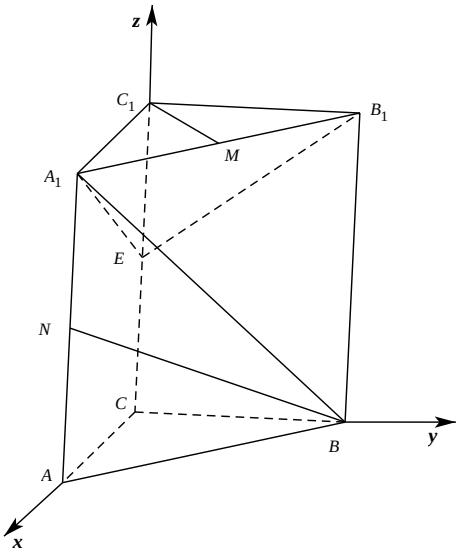
$\therefore C_1M\perp$ 平面 A_1BB_1 ,$A_1B\subset$ 平面 A_1BB_1 $\therefore C_1M\perp A_1B$

法二：解：如图建立空间直角坐标系

$A_1(2,0,4),B(0,2,0),\overrightarrow{A_1B}=(-2,2,-4),\overrightarrow{C_1M}=(1,1,0)$

$C_1(0,0,4),M(1,1,4),\overrightarrow{A_1B}=(-2,2,-4),\overrightarrow{C_1M}=(1,1,0)$

$\therefore \overrightarrow{A_1B}\bullet\overrightarrow{C_1M}=-2+2=0$



$\therefore A_1B \perp C_1M$

……4 分

（2）依题意得：B(0,2,0), N (2,0,2)

$\therefore |BN| = \sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{3}$

…….6 分

（3）依题意得：$A_1(2,0,4), B(0,2,0), C(0,0,0), B_1(0,2,4)$

$E(0,0,2), C_1(0,0,4)$

$\therefore \overrightarrow{EB_1} = (0,2,2), \overrightarrow{EA_1} = (2,0,2)$

$\because BC \perp AC, BC \perp CC_1$

$\therefore$ 平面C_1EA_1的法向量为 $\overrightarrow{CB} = (0,2,0)$，得$|\overrightarrow{CB}| = 2$

设平面 B_1EA_1 的法向量为$\vec{n} = (x, y, z)$

则: $\overrightarrow{EB_1} \bullet \vec{n} = 0$得:$2y + 2z = 0 \therefore y = -z$

$\overrightarrow{EA_1} \bullet \vec{n} = 0$得:$2 + 2z = 0 \therefore x = -z$

令$z = 1$,则$\vec{n} = (-1,-1,1)$， 得$|\vec{n}| = \sqrt{3}$

则$\cos < \overrightarrow{CB}, \vec{n} > = \dfrac{\overrightarrow{CB} \bullet \vec{n}}{|\overrightarrow{CB}| \bullet |\vec{n}|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由题意可知：二面角$B_1 - A_1E - C_1$的大小是锐角

所以二面角$B_1 - A_1E - C_1$的平面角的余弦值是$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …….13 分

18（本小题满分 13 分）

解：（1）由已知得$f(x)$的定义域为$(-1, +\infty)$

又 $f'(x) = 2ax + \dfrac{2}{x+1}$ ……3 分

$\therefore$ 由题意得 $f'(1) = 2a + 1 = 0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ……5 分

（2）解法一：依题意得

$f'(x)>0$ 对 $x\in[2,3]$ 恒成立，$\therefore 2ax+\frac{2}{x+1}>0$ ……7 分

$\therefore 2ax>-\frac{2}{1+x}$，$a>\frac{1}{-x^2-x}=\frac{1}{-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$ ……9 分

$\because x\in[2,3],\therefore -(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ 的最小值为 $-(3+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}=-12$

$\therefore \frac{1}{-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$ 的最大值为 $-\frac{1}{12}$ ……12 分

又因 $a=-\frac{1}{12}$ 时符合题意

$\therefore a\geq-\frac{1}{12}$ 为所求 ……14 分

解法二：依题意得

$f'(x)>0$ 对 $x\in[2,3]$ 恒成立，$\therefore 2ax+\frac{2}{x+1}>0$

即 $\frac{ax^2+ax+1}{x+1}>0$

$\because 1+x>0,\therefore ax^2+ax+1>0$ 对 $x\in[2,3]$ 恒成立 ……7 分

令 $g(x)=ax^2+ax+1$

（1）当 $a=0$ 时，$1>0$ 恒成立 ……9 分

（2）当 $a<0$ 时，抛物线 $g(x)$ 开口向下，可得 $g(x)_{\min}=g(3)>0$

即 $9a+3a+1\geq 0,\therefore 0>a>-\frac{1}{12}$ ……11 分

（3）当 $a>0$ 时，抛物线 $g(x)$ 开口向上，可得 $g(x)_{\min}=g(2)>0$

即 $4a+2a+1>0,\therefore a>-\frac{1}{6}$，即 $a>0$ ……13 分

又因 $a=-\frac{1}{12}$ 时符合题意

综上可得 $a\geq-\frac{1}{12}$ 为所求 ……14 分

19（本小题满分 14 分）

解：（1）由题意可得：$a=2,c=\sqrt{3}$

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-3}=1$　　所求的椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+\sqrt{2}\end{cases}$　　得：$(\frac{1}{4}+k^2)x^2+2\sqrt{2}kx+1=0$

$\therefore x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{2}k}{\frac{1}{4}+k^2},x_1x_2=\frac{1}{\frac{1}{4}+k^2}$（*）

$\Delta=(2\sqrt{2}k)^2-4\bullet(\frac{1}{4}+k^2)>0$

解得：$k>\frac{1}{2}$或$k<-\frac{1}{2}$

由 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}>2$　可得：$x_1x_2+y_1y_2>2$

$x_1x_2+(kx_1+\sqrt{2})(kx_2+\sqrt{2})>2$

整理得：$(1+k^2)x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)>0$

把（*）代入得：$(1+k^2)\bullet\frac{1}{\frac{1}{4}+k^2}+\sqrt{2}k\bullet\frac{(-2\sqrt{2}k)}{\frac{1}{4}+k^2}>0$

即：$\frac{4-12k^2}{1+4k^2}>0$

解得：$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$

综上：k的取值范围是：$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$

20.（本小题满分 14 分）

解：（1）由题意，得 $\frac{S_n}{n}=n+4$，即 $S_n=n^2+4n$.

故当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+4n-(n-1)^2-4(n-1)=2n+3$.

注意到 $n=1$ 时，$a_1=S_1=5$，而当 $n=1$ 时，$n+4=5$，

所以，$a_n=2n+3\ (n\in N^*)$. ……3 分

又 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$，即 $b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n\ (n\in N^*)$，

所以 $\{b_n\}$ 为等差数列，于是 $\frac{11(b_4+b_8)}{2}=154$.

而 $b_4=8$，故 $b_8=20$，$d=\frac{20-8}{4}=3$，

因此，$b_n=b_4+3(n-4)=3n-4$，

即 $b_n=b_4+3(n-4)=3n-4\ (n\in N^*)$. ……5 分

（2）$c_n=\frac{3}{2(a_n-2)(2b_n+5)}=\frac{3}{2[(2n+3)-2][2\bullet(3n-4)+5]}$

$=\frac{3}{2(2n+1)(6n-3)}=\frac{1}{2(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2(2n-1)(2n+1)}$.

所以，$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{4}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$

$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{4n+2}$. ……8 分

由于 $T_{n+1}-T_n=\frac{n+1}{4n+6}-\frac{n}{4n+2}=\frac{1}{(4n+6)(2n+1)}>0$

因此 T_n 单调递增，故 $(T_N)_{\min}=\frac{1}{6}$.

令 $\frac{1}{6}>\frac{k}{75}$，得 $k<12\frac{1}{2}$，所以 $k_{\max}=12$. ……10 分

（3）$f(n)=\begin{cases}2n+3(n=2l-1,l\in N^*)\\3n-4(n=2l,l\in N^*)\end{cases}$

① 当 m 为奇数时，$m+9$ 为偶数.

此时 $f(m+9)=3(m+9)-4=3m+23$

$3f(m)=6m+9$

所以 $3m+23=6m+9$，$m=\frac{14}{3}\notin N^*$（舍去） ……12 分

② 当 m 为偶数时，$m+9$ 为奇数.

此时，$f(m+9)=2(m+9)+3=2m+21,3f(m)=9m-12$，

所以 $2m+21=9m-12$，$m=\frac{33}{7}\notin N^*$（舍去）.

综上，不存在正整数 m，使得 $f(m+9)=3f(m)$ 成立.

……14 分

智康1对1