北京市西城区 2010—2011 学年度第一学期期末（北区）

九年级数学试卷

2011.1

考生须知	1．本试卷共 5 页，共五道大题，25 道小题，满分 120 分。考试时间 120 分钟。 2．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 3．在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。

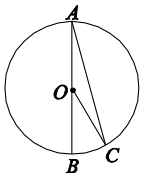
一、选择题（本题共 32 分，每小题 4 分）下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的.

1. 抛物线 $y=(x-1)^2+2$ 的对称轴为（　　）.

A．直线 $x=1$　　B．直线 $x=-1$

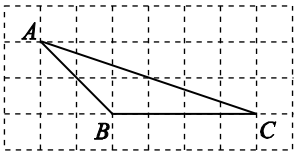
C．直线 $x=2$　　D．直线 $x=-2$

2. 如图，AB 为⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，若∠C=15°，则∠BOC =（　　）.



A．60°　　B．45°　　C．30°　　D．15°

3. 如图，在 8×4 的矩形网格中，每格小正方形的边长都是 1，若△ABC 的三个顶点在图中相应的格点上，则 tan∠ACB 的值为（　　）.



A．1　　B．$\frac{1}{3}$

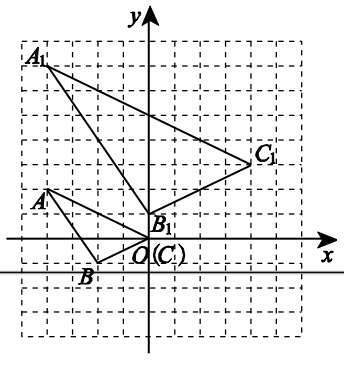
C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

4．用配方法将 $y=x^2-6x+11$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为（　　）.

A．$y=(x+3)^2+2$　　B．$y=(x-3)^2-2$

C．$y=(x-6)^2-2$　　D．$y=(x-3)^2+2$

5．如图，将△ABC 的三边分别扩大一倍得到△ $A_1B_1C_1$（顶点均在格点上），若它们是以 P 点为位似中心的位似图形，则 P 点的坐标是（　　）.



A．$(-4,-3)$　　B．$(-3,-3)$

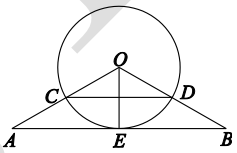
C．$(-4,-4)$　　D．$(-3,-4)$

6. 某商店购进一种商品，单价为 30 元．试销中发现这种商品每天的销售量 P（件）与每件的销售价 x（元）满足关系：$P=100-2x$.若商店在试销期间每天销售这种商品获得 200 元的利润，根据题意，下面所列方程正确的是（　　）.

A．$(x-30)(100-2x)=200$　　B．$x(100-2x)=200$

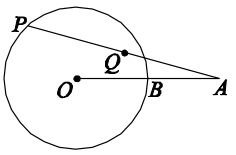
C．$(30-x)(100-2x)=200$　　D．$(x-30)(2x-100)=200$

7. 如图，$\triangle OAB$ 中，$OA=OB$，$\angle A=30°$，$\odot O$ 与 AB 相切，切点为 E，并分别交 OA，OB 于 C，D 两点，连接 CD.若 CD 等于 $2\sqrt{3}$，则扇形 $OCED$ 的面积等于（　　）.



A．$\frac{2}{3}\pi$　　B．$\frac{4}{3}\pi$　　C．$\frac{8}{3}\pi$　　D．$\frac{16}{3}\pi$

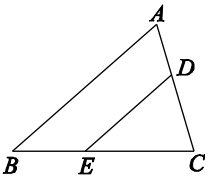
8. 如图，$OA=4$，线段 OA 的中点为 B，点 P 在以 O 为圆心，OB 为半径的圆上运动，PA 的中点为 Q.当点 Q 也落在$\odot O$ 上时，$\cos\angle OQB$ 的值等于（　　）.



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{2}{3}$

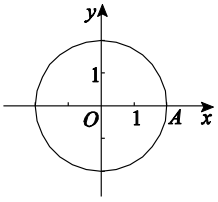
二、填空题（本题共 16 分，每小题 4 分）

9. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$DE/\!/AB$ 分别交 AC，BC 于点 D，E，若 $AD=2$，$CD=3$，则$\triangle CDE$ 与$\triangle CAB$ 的周长比为_____.



10. 两圆的半径分别为 3cm 和 4cm，若圆心距为 5cm，则这两圆的位置关系为_____.

11. 如图，平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(2,0)$，以 OA 为半径作$\odot O$，若点 P，B 都在$\odot O$ 上，且四边形 $AOPB$ 为菱形，则点 P 的坐标为_____.



12．抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）满足条件：

（1）$4a-b=0$；

（2）$a-b+c>0$；

（3）与 x 轴有两个交点，且两交点间的距离小于 2．以下有四个结论：

①$a<0$；②$c>0$；③$a+b+c<0$；④$\frac{c}{4}<a<\frac{c}{3}$，其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（本题共 31 分，第 13～17 题每小题 5 分，第 18 题 6 分）

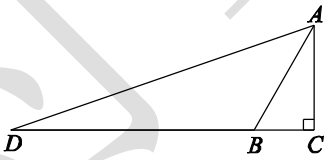
13．计算：$6\tan^2 30°-\sqrt{3}\sin 60°-\cos 45°$.

14．若关于 x 的方程 $x^2+4x-a+3=0$ 有实数根．

（1）求 a 的取值范围；

（2）若 a 为符合条件的最小整数，求此时方程的根．

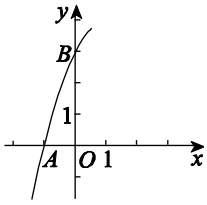
15．已知：如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C$=90°，$\angle ABC$=60°，$AC=\sqrt{3}$，D 为 CB 延长线上一点，且 BD=2AB．求 AD 的长．



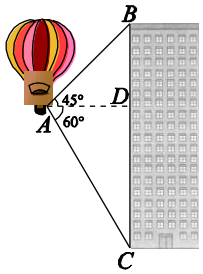
16．右图为抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的一部分，它经过 $A(-1,0)$，$B(0,3)$ 两点．

（1）求抛物线的解析式；

（2）将此抛物线向左平移 3 个单位，再向下平移 1 个单位，求平移后的抛物线的解析式．



17. 如图，热气球的探测器显示，从热气球看一栋高楼的顶部 B 的仰角为 45°，看这栋高楼底部 C 的俯角为 60°，热气球与高楼的水平距离 AD 为 50m，求这栋楼的高度．（$\sqrt{2}$ 取 1.414，$\sqrt{3}$ 取 1.732）

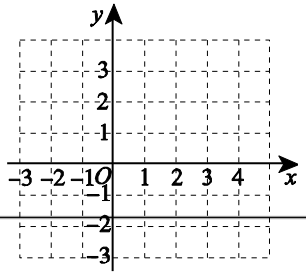


18．对于抛物线 $y=x^2-4x+3$．

（1）它与 x 轴交点的坐标为_____，与 y 轴交点的坐标为_____，顶点坐标为_____；

（2）在坐标系中利用描点法画出此抛物线；

x	…						…



y	…						…

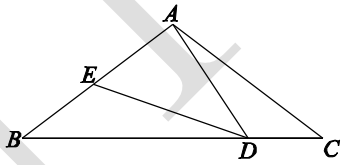
（3）利用以上信息解答下列问题：若关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+3-t=0$（t 为实数）在 $-1<x<\frac{7}{2}$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是_____.

四、解答题（本题共 19 分，第 20 题 4 分，其余每小题 5 分）

19．已知：如图，在△ABC 中，AB=AC= 5，BC= 8，D，E 分别为 BC，AB 边上一点，∠ADE=∠C.

（1）求证：△BDE∽△CAD；

（2）若 CD=2，求 BE 的长.



20．两个长为 2，宽为 1 的矩形 $ABCD$ 和矩形 $EFGH$ 如图 1 所示摆放在直线 l 上，DE=2，将矩形 $ABCD$ 绕点 D 顺时针旋转 α 角（$0°<\alpha<90°$），将矩形 $EFGH$ 绕点 E 逆时针旋转相同的角度.

（1）当两个矩形旋转到顶点 C，F 重合时（如图 2），∠DCE=_____°，点 C 到直线 l 的距离等于_____，α =_____°；

（2）利用图 3 思考：在旋转的过程中，矩形 $ABCD$ 和矩形 $EFGH$ 重合部分为正方形时，α =_____°.

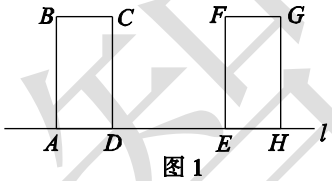


图 1

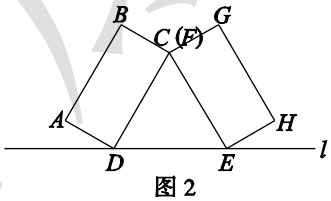


图 2

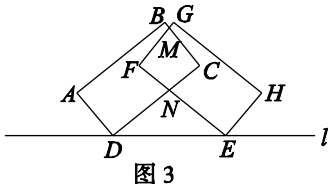
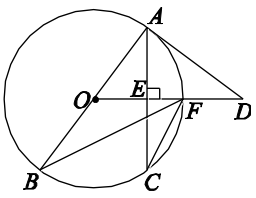


图 3

21．已知：如图，AB 是⊙O 的直径，AC 是弦，OD⊥AC 于点 E，交⊙O 于点 F，连接 BF，CF，∠D=∠BFC.

（1）求证：AD 是⊙O 的切线；

（2）若 AC=8，$\tan B=\frac{1}{2}$，求 AD 的长.



22．请阅读下面材料：

若 $A(x_1,y_0)$，$B(x_2,y_0)$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）上不同的两点，证明直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 为此抛物线的对称轴.

有一种方法证明如下：

证明：∵ $A(x_1,y_0)$，$B(x_2,y_0)$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）上不同的两点，

$$\therefore \begin{cases} y_0=ax_1^2+bx_1+c, & ① \\ y_0=ax_2^2+bx_2+c, & ② \end{cases} \quad 且\ x_1\neq x_2.$$

①-②得 $a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=0$.

∴ $(x_1-x_2)\left[a(x_1+x_2)+b\right]=0$.

∴ $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

又∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$，

∴ 直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 为此抛物线的对称轴.

（1）反之，如果 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）上不同的两点，直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 为该抛物线的对称轴，那么自变量取 x_1，x_2 时函数值相等吗？写出你的猜想，并参考上述方法写出证明过程；

（2）利用以上结论解答下面问题：

已知二次函数 $y=x^2+bx-1$ 当 $x=4$ 时的函数值与 $x=2007$ 时的函数值相等，求 $x=2012$ 时的函数值.

五、解答题（本题共 22 分，第 23 题 7 分，第 24 题 7 分，第 25 题 8 分）

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2-(m-1)x+m=0$.（其中 m 为实数）

（1）若此方程的一个非零实数根为 k，

① 当 $k=m$ 时，求 m 的值； ② 若记 $m(k+\dfrac{1}{k})-2k+5$ 为 y，求 y 与 m 的关系式；

（2）当$\frac{1}{4}<m<2$时，判断此方程的实数根的个数并说明理由.

24. 已知抛物线$y=ax^2-(a+c)x+c$（其中$a\neq c$且$a\neq 0$）.

（1）求此抛物线与x轴的交点坐标；（用a，c的代数式表示）

（2）若经过此抛物线顶点A的直线$y=-x+k$与此抛物线的另一个交点为$B(\frac{a+c}{a},-c)$，求此抛物线的解析式；

（3）点P在（2）中x轴上方的抛物线上，直线$y=-x+k$与y轴的交点为C，若$\tan\angle POB=\frac{1}{4}\tan\angle POC$，求点$P$的坐标；

（4）若（2）中的二次函数的自变量x在$n\leq x<n+1$（n为正整数）的范围内取值时，记它的整数函数值的个数为N， 则N关于n的函数关系式为_____.

25. 含30°角的直角三角板ABC中，$\angle A=30°$.将其绕直角顶点C顺时针旋转α角（$0°<\alpha<180°$ 且$\alpha\neq 90°$），得到Rt△$A'B'C$，$A'C$边与AB所在直线交于点D，过点D作$DE\parallel A'B'$交CB'边于点E，连接BE.

（1）如图1，当$A'B'$边经过点B时，$\alpha=$_____°；

（2）在三角板旋转的过程中，若$\angle CBD$的度数是$\angle CBE$度数的m倍，猜想m的值并证明你的结论；

（3） 设$BC=1$，$AD=x$，$\triangle BDE$的面积为S，以点E为圆心，EB为半径作⊙E，当$S=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$时，求$AD$的长，并判断此时直线$A'C$与⊙$E$的位置关系.

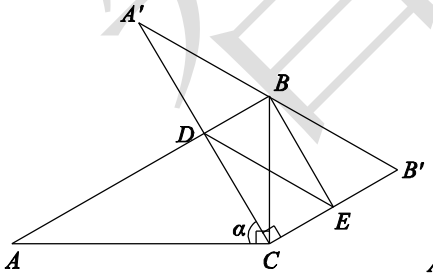
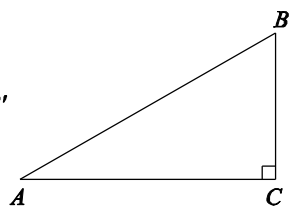
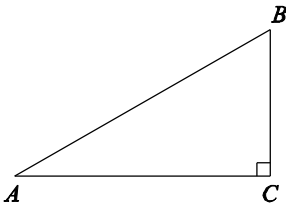


图 1



备用图1



备用图2

北京市西城区 2010—2011 学年度第一学期期末试卷（北区）

九年级数学参考答案及评分标准

2011.1

一、选择题（本题共 32 分，每小题 4 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	D	A	A	B	C

二、填空题（本题共 16 分，每小题 4 分）

9. $\frac{3}{5}$.　10. 相交.　11. $(-1,\sqrt{3})$，$(-1,-\sqrt{3})$.（每个 2 分）

12.②，④.（写对一个给 2 分，每写一个错误答案扣 1 分，最低 0 分不倒扣分）

三、解答题（本题共 31 分，第 13～17 题每小题 5 分，第 18 题 6 分）

13．解：　$6\tan^2 30°-\sqrt{3}\sin 60°-\cos 45°$

$=6\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^2-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……3 分

$=2-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……5 分

14．解：（1）$\Delta=4^2-4(3-a)=4+4a$ …… 1 分

∵ 该方程有实数根，

∴ $4+4a\geq 0$. ……2 分

解得 $a\geq -1$. ……3 分

（2）当 a 为符合条件的最小整数时，$a=-1$. …… 4 分

此时方程化为 $x^2+4x+4=0$，方程的根为 $x_1=x_2=-2$. ……5 分

15．解：在 Rt△ABC 中，∠C=90°，∠ABC=60°，$AC=\sqrt{3}$，

∴ $AB=\frac{AC}{\sin 60°}=2$，BC=1. ……2 分

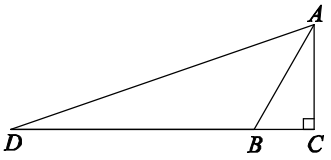


图 1

∵ D 为 CB 延长线上一点，BD=2AB ，

∴ BD=4，CD=5. ……4 分

∴ $AD=\sqrt{CD^2+AC^2}=2\sqrt{7}$. ……5 分

16. 解：（1）∵ 抛物线经过 $A(-1,0)$，$B(0,3)$ 两点，

∴ $\begin{cases}-1-b+c=0,\\ c=3.\end{cases}$ ……1 分

解得 $\begin{cases}b=2,\\ c=3.\end{cases}$ ……2 分

∴ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$. ……3 分

（2）∵ 抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 的顶点坐标为 $(1,4)$，

∴ 平移后的抛物线的顶点坐标为 $(-2,3)$.

∴ 平移后的抛物线的解析式为 $y=-(x+2)^2+3=-x^2-4x-1$. ……5 分

17. 解：在 Rt△*ABD* 中，∠*BDA*=90°，∠*BAD*=45°，

∴ *BD*=*AD*=50(m). ……2 分

在 Rt△*ACD* 中，∠*ADC*=90°，∠*CAD*=60°，

∴ $CD=\sqrt{3}AD=50\sqrt{3}$ (m) . ……4 分

∴ *BC*= *BD*+*CD*= $50+50\sqrt{3}=50(\sqrt{3}+1)\approx136.6$ (m). ……5 分

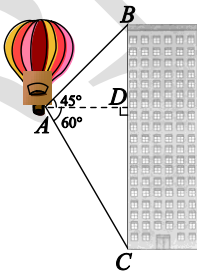


图 2

答：这栋楼约高 136.6 m.

18. 解：（1）它与 *x* 轴交点的坐标为 $(1,0),(3,0)$，与 *y* 轴交点的坐标为 $(0,3)$，顶点坐标为 $(2,-1)$； ……3 分

（2）列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	3	0	-1	0	3	…

……4 分

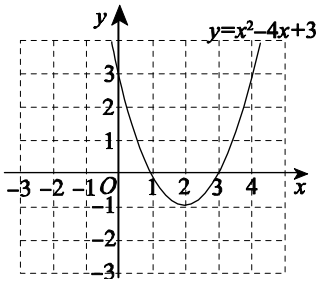


图 3

图象如图 3 所示. ……5 分

（3）*t* 的取值范围是 $-1\le t<8$. ……6 分

四、解答题（本题共 19 分，第 20 题 4 分，其余每小题 5 分）

19.（1）证明：∵ *AB*=*AC*，

∴ ∠*B*=∠*C*. ……1 分

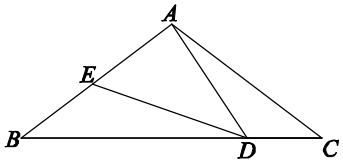


图 4

∵ ∠*ADE*+∠*BDE*=∠*ADB* =∠*C*+∠*CAD*，

∠*ADE*=∠*C*，

∴ ∠*BDE* =∠*CAD*. ……2 分

∴ △*BDE*∽△*CAD*. ……3 分

（2）解：由（1）得 $\frac{DB}{BE}=\frac{AC}{CD}$. ……4 分

∵ *AB*=*AC*= 5，*BC*= 8，*CD*=2，

∴ $DB=BC-CD=6$.

∴ $BE=\frac{DB\times CD}{AC}=\frac{6\times 2}{5}=2.4$. ……5 分

20．解：（1）∠*DCE*= 60 °，点 *C* 到直线 *l* 的距离等于 $\sqrt{3}$，α = 30 °； ……3 分

（2）α = 45 °. ……4 分

21．（1）证明：∵ *OD*⊥*AC* 于点 *E*，

∴ ∠*OEA*=90 °，∠1+∠2=90 °.

∵ ∠*D*=∠*BFC*，∠*BFC*=∠1，

∴ ∠*D* +∠2=90 °，∠*OAD* =90 °.

∴ *OA*⊥*AD* 于点 *A*. ……1 分

∵ *OA* 是⊙*O* 的半径，

∴ *AD* 是⊙*O* 的切线. ……2 分

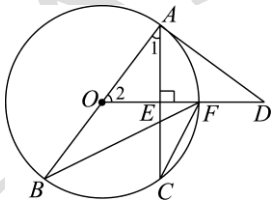


图 5

（2）解：∵ *OD*⊥*AC* 于点 *E*，*AC* 是⊙*O* 的弦，*AC*=8，

∴ $AE=EC=\frac{AC}{2}=4$. ……3 分

∵ ∠*B*=∠*C*，$\tan B=\frac{1}{2}$，

∴ 在 Rt△*CEF* 中，∠*CEF*=90 °，$\tan C=\frac{1}{2}$.

∴ $EF=EC\cdot\tan C=2$.

设⊙*O* 的半径为 *r*，则 $OE=r-2$.

在 Rt△*OAE* 中，由勾股定理得 $OA^2=OE^2+AE^2$，即 $r^2=(r-2)^2+4^2$.

解得 *r* =5. ……4 分

∴ 在 Rt△*OAE* 中，$\tan\angle 2=\frac{AE}{OE}=\frac{4}{3}$.

∴ 在 Rt△*OAD* 中，$AD=OA\cdot\tan\angle 2=5\times\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$. ……5 分

22．解：（1）结论：自变量取 x_1，x_2 时函数值相等．……1 分

证明：∵ $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上不同的两点，

由题意得 $\begin{cases} y_1=ax_1^2+bx_1+c, & ① \\ y_2=ax_2^2+bx_2+c, & ② \end{cases}$ 且 $x_1\neq x_2$．

①-②，得 $y_1-y_2=a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left[a(x_1+x_2)+b\right]$．

……2 分

∵ 直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的对称轴，

∴ $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}$．

∴ $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$．

∴ $y_1-y_2=(x_1-x_2)\left[a(x_1+x_2)+b\right]=0$，即 $y_1=y_2$……3 分

（阅卷说明：其他代数证明方法相应给分；直接利用抛物线的对称性而没有用代数方法进行证明的不给分）

（2）∵ 二次函数 $y=x^2+bx-1$ 当 $x=4$ 时的函数值与 $x=2007$ 时的函数值相等，

∴ 由阅读材料可知二次函数 $y=x^2+bx-1$ 的对称轴为直线 $x=\dfrac{2011}{2}$．

∴ $-\dfrac{b}{2}=\dfrac{2011}{2}$，$b=-2011$．

∴ 二次函数的解析式为 $y=x^2-2011x-1$．……4 分

∵ $\dfrac{2011}{2}=\dfrac{2012+(-1)}{2}$，

由（1）知，当 $x=2012$ 的函数值与 $x=-1$ 时的函数值相等．

∵ 当 $x=-1$ 时的函数值为 $(-1)^2-2011\times(-1)-1=2011$，

∴ 当 $x=2012$ 时的函数值为 2011．……5 分

五、解答题（本题共 22 分，第 23 题 7 分，第 24 题 7 分，第 25 题 8 分）

23.解：（1）∵ k 为 $(m-2)x^2-(m-1)x+m=0$ 的实数根，

∴ $(m-2)k^2-(m-1)k+m=0$．※ ……1 分

① 当 $k=m$ 时，

∵ k 为非零实数根，

∴ $m\neq 0$，方程※两边都除以 m，得 $(m-2)m-(m-1)+1=0$.

整理，得 $m^2-3m+2=0$.

解得 $m_1=1$，$m_2=2$. ……2 分

∵ $(m-2)x^2-(m-1)x+m=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

∴ $m\neq 2$.

∴ $m=1$. ……3 分

（阅卷说明：写对 $m=1$，但多出其他错误答案扣 1 分）

② ∵ k 为原方程的非零实数根，

∴ 将方程※两边都除以 k，得 $(m-2)k-(m-1)+\frac{m}{k}=0$ ……4 分

整理，得 $m(k+\frac{1}{k})-2k=m-1$.

∴ $y=m(k+\frac{1}{k})-2k+5=m+4$ ……5 分

（2）解法一：$\Delta=[-(m-1)]^2-4m(m-2)=-3m^2+6m+1=-3m(m-2)+1$ ……6 分

当 $\frac{1}{4}<m<2$ 时，$m>0$，$m-2<0$.

∴ $-3m(m-2)>0$，$-3m(m-2)+1>1>0$，$\Delta>0$.

∴ 当 $\frac{1}{4}<m<2$ 时，此方程有两个不相等的实数根. ……7 分

解法二：直接分析 $\frac{1}{4}<m<2$ 时，函数 $y=(m-2)x^2-(m-1)x+m$ 的图象，

∵ 该函数的图象为抛物线，开口向下，与 y 轴正半轴相交，

∴ 该抛物线必与 x 轴有两个不同交点. ……6 分

∴ 当 $\frac{1}{4}<m<2$ 时，此方程有两个不相等的实数根. ……7 分

解法三：$\Delta=[-(m-1)]^2-4m(m-2)=-3m^2+6m+1=-3(m-1)^2+4$ ……6 分

结合 $\Delta=-3(m-1)^2+4$ 关于 m 的图象可知，（如图 6）

当 $\frac{1}{4}<m\leq 1$ 时，$\frac{37}{16}<\Delta\leq 4$；

当 $1<m<2$ 时，$1<\Delta<4$.

∴ 当 $\frac{1}{4}<m<2$ 时，$\Delta>0$.

∴ 当 $\frac{1}{4}<m<2$ 时，此方程有两个不相等的实数根.

……7 分

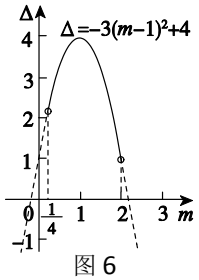


图 6

24.解：（1）抛物线 $y=ax^2-(a+c)x+c$ 与 x 轴交点的横坐标是关于 x 的方程 $ax^2-(a+c)x+c=0$（其中 $a\neq 0$，$a\neq c$）的解.

解得 $x_1=1$，$x_2=\frac{c}{a}$. …… 1 分

∴ 抛物线与 x 轴交点的坐标为 $(1,0)$，$(\frac{c}{a},0)$ …… 2 分

（2）抛物线 $y=ax^2-(a+c)x+c$ 的顶点 A 的坐标为 $(\frac{a+c}{2a},-\frac{(a-c)^2}{4a})$.

∵ 经过此抛物线顶点 A 的直线 $y=-x+k$ 与此抛物线的另一个交点为 $B(\frac{a+c}{a},-c)$，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{(a-c)^2}{4a}=-\frac{a+c}{2a}+k, & ① \\ -c=-\frac{a+c}{a}+k, & ② \\ -c=a(\frac{a+c}{a})^2-(a+c)\times\frac{a+c}{a}+c. & ③ \end{cases}$$

由③得 $c=0$. ……3 分

将其代入①、② 得 $\begin{cases} -\frac{a}{4}=-\frac{1}{2}+k, \\ 0=-1+k. \end{cases}$

解得 $a=-2$.

∴ 所求抛物线的解析式为 $y=-2x^2+2x$ …… 4 分

（3）作 $PE\perp x$ 轴于点 E，$PF\perp y$ 轴于点 F.（如图 7）

抛物线 $y=-2x^2+2x$ 的顶点 A 的坐标 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

点 B 的坐标为 $(1,0)$，点 C 的坐标为 $(0,1)$.

设点 P 的坐标为 (m,n).

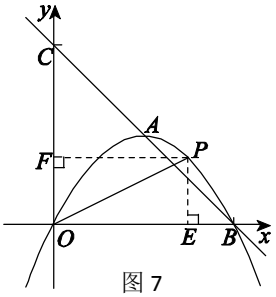


图 7

∵ 点 P 在 x 轴上方的抛物线 $y=-2x^2+2x$ 上，

∴ $n=-2m^2+2m$，且 $0<m<1$，$0<n<\frac{1}{2}$.

∴ $\tan\angle POB=\frac{PE}{OE}=\frac{n}{m}$， $\tan\angle POC=\frac{PF}{OF}=\frac{m}{n}$.

∵ $\tan\angle POB=\frac{1}{4}\tan\angle POC$，

∴ $m^2=4n^2$.

解得 $m=2n$，或 $m=-2n$（舍去）. ……5 分

将 $m=2n$ 代入 $n=-2m^2+2m$，得 $8n^2-3n=0$.

解得 $n_1=\frac{3}{8}$， $n_2=0$（舍去）.

∴ $m=2n=\frac{3}{4}$.

∴ 点 P 的坐标为 $(\frac{3}{4},\frac{3}{8})$. ……6 分

（4）N 关于 n 的函数关系式为 $N=4n$. ……7 分

说明：二次函数 $y=-2x^2+2x$ 的自变量 x 在 $n\leq x<n+1$（n 为正整数）的范围内取值，此时 y 随 x 的增大而减小，

∴ $-2n^2-2n<y\leq-2n^2+2n$，

其中的整数有 $-2n^2-2n+1$， $-2n^2-2n+2$，…$-2n^2+2n$.

$N=(-2n^2+2n)-(-2n^2-2n)=4n$.

25.（1）当 $A'B'$ 边经过点 B 时，$\alpha=$ 60 °； …… 1 分

（2）猜想：①如图 8，点 D 在 AB 边上时，$m=2$；

②如图 9，点 D 在 AB 的延长线上时，$m=4$.

（阅卷说明：为与后边证明不重复给分，猜想结论不设给分点）

证明：① 当 $0°<\alpha<90°$ 时，点 D 在 AB 边上（如图 8）.

（阅卷说明：①、②两种情况没写 α 的取值范围不扣分）

∵ $DE\parallel A'B'$，

∴ $\frac{CD}{CA'}=\frac{CE}{CB'}$.

由旋转性质可知，$CA=CA'$， $CB=CB'$， $\angle ACD=\angle BCE$.

∴ $\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}$.

∴ $\triangle CAD\backsim\triangle CBE$. ……2 分

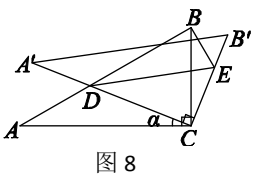


图 8

∴ $\angle A=\angle CBE=30°$.

∵ 点 D 在 AB 边上，$\angle CBD=60°$，

∴ $\angle CBD=2\angle CBE$，即 $m=2$. ……3 分

② 当 $90°<\alpha<120°$ 时，点 D 在 AB 的延长线上（如图 9）.

与①同理可得 $\angle A=\angle CBE=30°$.

∵ 点 D 在 AB 的延长线上，$\angle CBD=180°-\angle CBA=120°$，

∴ $\angle CBD=4\angle CBE$，即 $m=4$. ……4 分

（阅卷说明：第（2）问用四点共圆方法证明的扣 1 分.）

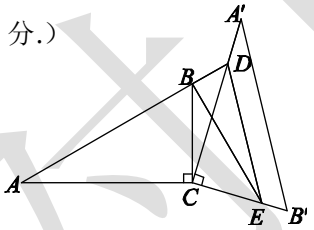


图 9

（3）解：在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=1$，

∴ $AB=2$，$AC=\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $\triangle CAD\backsim\triangle CBE$ 得 $\frac{AD}{AC}=\frac{BE}{BC}$.

∵ $AD=x$，

∴ $\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{BE}{1}$，$BE=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

①当点 D 在 AB 边上时，$AD=x$，$BD=AB-AD=2-x$，$\angle DBE=90°$.

此时，$S=S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\times BE=\frac{1}{2}(2-x)\times\frac{\sqrt{3}x}{3}=\frac{-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x}{6}$.

当 $S=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ 时，$\frac{-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

整理，得 $x^2-2x+1=0$.

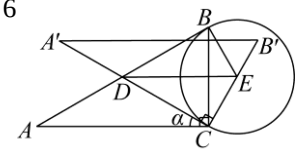


图 10

解得 $x_1=x_2=1$，即 $AD=1$……5 分

此时 D 为 AB 中点，$\angle DCB=60°$，$\angle BCE=30°=\angle CBE$.（如图 10）

∴ $EC=EB$.

∵ $\angle A'CB'=90°$，点 E 在 CB' 边上，

∴ 圆心 E 到 $A'C$ 的距离 EC 等于⊙E 的半径 EB.

∴ 直线 $A'C$ 与⊙E 相切. ……6 分

②当点 D 在 AB 的延长线上时，$AD=x$，$BD=x-2$，$\angle DBE=90°$.（如图 9）.

$S=S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\times BE=\frac{1}{2}(x-2)\times\frac{\sqrt{3}x}{3}=\frac{\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x}{6}$.

当 $S=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ 时，$\frac{\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

整理，得 $x^2-2x-1=0$.

解得 $x_1=1+\sqrt{2}$， $x_2=1-\sqrt{2}$（负值，舍去）.

即 $AD=1+\sqrt{2}$ ..... 7 分

此时 $\angle BCE=\alpha$，而 $90°<\alpha<120°$，$\angle CBE=30°$，

∴ $\angle CBE<\angle BCE$.

∴ $EC<EB$，即圆心 E 到 $A'C$ 的距离 EC 小于⊙E 的半径 EB.

∴ 直线 $A'C$ 与⊙E 相交. .....8 分

智康1对1