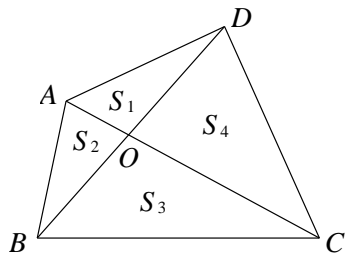


蝴蝶模型

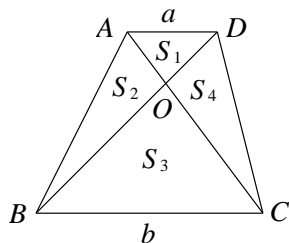
一、任意四边形中的比例关系（“蝴蝶定理”）：



① $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$ 或者 $S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$ ② $AO : OC = (S_1 + S_2) : (S_4 + S_3)$

蝴蝶定理为我们提供了解决不规则四边形的面积问题的一个途径。通过构造模型，一方面可以使不规则四边形的面积关系与四边形内的三角形相联系；另一方面，也可以得到与面积对应的对角线的比例关系。

二、梯形中比例关系（“梯形蝴蝶定理”）：

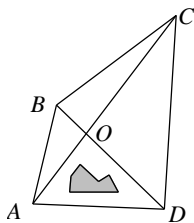


- ① $S_2 = S_4$
- ② $S_1 : S_3 = a^2 : b^2$
- ③ $S_1 : S_3 : S_2 : S_4 = a^2 : b^2 : ab : ab$
- ④ S 的对应份数为 $(a+b)^2$ 。

基础篇：

【一】

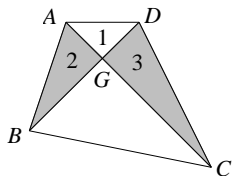
如图，某公园的外轮廓是四边形 $ABCD$ ，被对角线 AC 、 BD 分成四个部分， $\triangle AOB$ 面积为 1 平方千米， $\triangle BOC$ 面积为 2 平方千米， $\triangle COD$ 的面积为 3 平方千米，公园由陆地面积是 6.92 平方千米和人工湖组成，求人工湖的面积是多少平方千米？



【分析】 根据蝴蝶定理求得 $S_{\triangle AOD} = 3 \times 1 \div 2 = 1.5$ 平方千米，公园四边形 $ABCD$ 的面积是 $1 + 2 + 3 + 1.5 = 7.5$ 平方千米，所以人工湖的面积是 $7.5 - 6.92 = 0.58$ 平方千米

【二】

如图，四边形被两条对角线分成4个三角形，其中三个三角形的面积已知，求：(1)三角形BGC的面积；(2)AG:GC=?

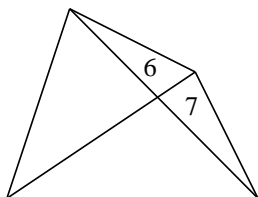


【分析】(1)根据蝴蝶定理， $S_{\triangle BGC} \times 1 = 2 \times 3$ ，那么 $S_{\triangle BGC} = 6$ ；

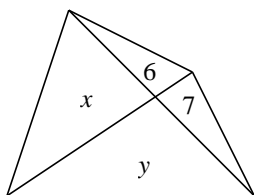
(2)根据蝴蝶定理， $AG:GC = (1+2):(3+6) = 1:3$ 。

【三】

图中的四边形土地的总面积是52公顷，两条对角线把它分成了四个小三角形，其中两个小三角形的面积分别是6公顷和7公顷，求四个三角形中最大的一个的面积。



【分析】设另两块面积分别为 x, y ，如图：



$$\begin{cases} 7x = 6y \\ x + y = 52 - (6 + 7) = 39 \end{cases}$$

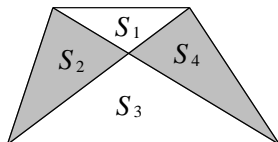
设 $x=6k, y=7k$ ，则 $x+y=13k=39 \Rightarrow k=3$

$$\therefore \begin{cases} x = 18 \\ y = 21 \end{cases}$$

四个三角形中最大的一个的面积是21

【四】

如图， $S_2 = 2, S_3 = 4$ ，求梯形的面积。

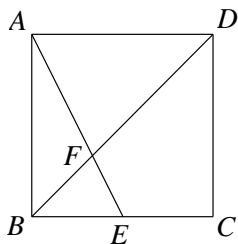


【分析】设 S_1 为 a^2 份， S_3 为 b^2 份，根据梯形蝴蝶定理， $S_3 = 4 = b^2$ ，所以 $b=2$ ；又因为 $S_2 = 2 = a \times b$ ，所以 $a=1$ ；那么 $S_1 = a^2 = 1$ ， $S_4 = a \times b = 2$ ，所以梯形面积 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1 + 2 + 4 + 2 = 9$ ，或者根据梯形蝴蝶定理， $S = (a+b)^2 = (1+2)^2 = 9$ 。

提高篇：

【五】

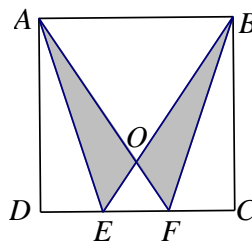
在下图的正方形 $ABCD$ 中， E 是 BC 边的中点， AE 与 BD 相交于 F 点，三角形 BEF 的面积为 1 平方厘米，那么正方形 $ABCD$ 面积是_____平方厘米。



【分析】连接 DE ，根据题意可知 $BE:AD=1:2$ ，根据蝴蝶定理得 $S_{\text{梯形}}=(1+2)^2=9$ （平方厘米）， $S_{\triangle ECD}=3$ （平方厘米），那么 $S_{\square ABCD}=12$ （平方厘米）。

【六】

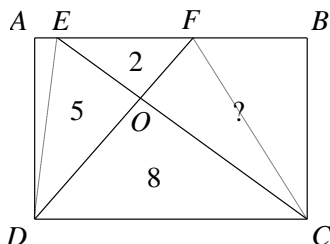
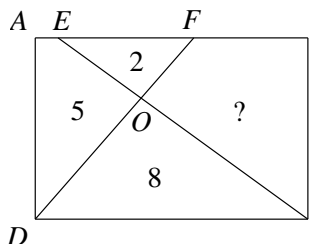
如图面积为 12 平方厘米的正方形 $ABCD$ 中， E, F 是 DC 边上的三等分点，求阴影部分的面积。



【分析】因为 E, F 是 DC 边上的三等分点，所以 $EF:AB=1:3$ ，设 $S_{\triangle OEF}=1$ 份，根据梯形蝴蝶定理可以知道 $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle OFB}=3$ 份， $S_{\triangle AOB}=9$ 份， $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BCF}=(1+3)$ 份，因此正方形的面积为 $4+4+(1+3)^2=24$ 份， $S_{\text{阴影}}=6$ 份，所以 $S_{\text{阴影}}:S_{\text{正方形}}=6:24=1:4$ ，所以 $S_{\text{阴影}}=3$ 平方厘米。

【七】

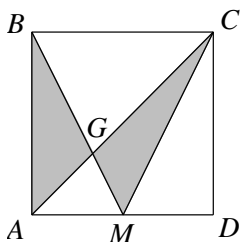
如图，长方形 $ABCD$ 被 CE, DF 分成四块，已知其中 3 块的面积分别为 2、5、8 平方厘米，那么余下的四边形 $OFBC$ 的面积为_____平方厘米。



【分析】连接 DE, CF 。四边形 $EDCF$ 为梯形，所以 $S_{\triangle EOD}=S_{\triangle FOC}$ ，又根据蝴蝶定理， $S_{\triangle EOD} \cdot S_{\triangle FOC}=S_{\triangle EOF} \cdot S_{\triangle COD}$ ，所以 $S_{\triangle EOD} \cdot S_{\triangle FOC}=2 \times 8=16$ ，所以 $S_{\triangle EOD}=4$ （平方厘米）， $S_{\triangle ECD}=4+8=12$ （平方厘米）。那么长方形 $ABCD$ 的面积为 $12 \times 2=24$ 平方厘米，四边形 $OFBC$ 的面积为 $24-5-2-8=9$ （平方厘米）。

【八】

如图，正方形 $ABCD$ 面积为 3 平方厘米， M 是 AD 边上的中点。求图中阴影部分的面积。

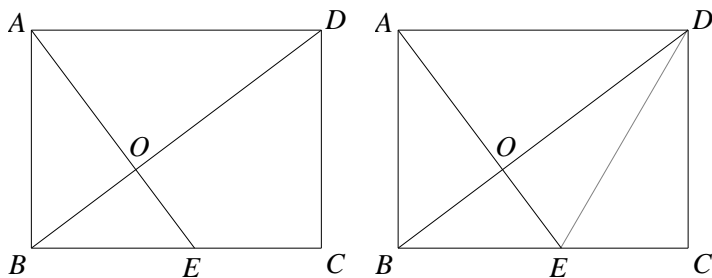


【分析】因为 M 是 AD 边上的中点，所以 $AM:BC=1:2$ ，根据梯形蝴蝶定理可以知道

$S_{\triangle AMG}:S_{\triangle ABG}:S_{\triangle MCG}:S_{\triangle BCG}=1^2:(1\times 2):(1\times 2):2^2=1:2:2:4$ ，设 $S_{\triangle AGM}=1$ 份，则 $S_{\triangle MCD}=1+2=3$ 份，所以正方形的面积为 $1+2+2+4+3=12$ 份， $S_{\text{阴影}}=2+2=4$ 份，所以 $S_{\text{阴影}}:S_{\text{正方形}}=1:3$ ，所以 $S_{\text{阴影}}=1$ 平方厘米

【九】

如图，长方形 $ABCD$ 中， AOB 是直角三角形且面积为 54， OD 的长是 16， OB 的长是 9。那么四边形 $OECD$ 的面积是_____。



【分析】解法一：连接 DE ，依题意 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times BO\times AO=\frac{1}{2}\times 9\times AO=54$ ，所以 $AO=12$ ，

$$\text{则 } S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times DO\times AO=\frac{1}{2}\times 16\times 12=96.$$

$$\text{又因为 } S_{\triangle AOB}=S_{\triangle DOE}=54=\frac{1}{2}\times 16\times OE, \text{ 所以 } OE=6\frac{3}{4},$$

$$\text{得 } S_{\triangle BOE}=\frac{1}{2}\times BO\times EO=\frac{1}{2}\times 9\times 6\frac{3}{4}=30\frac{3}{8},$$

$$\text{所以 } S_{OECD}=S_{\triangle BDC}-S_{\triangle BOE}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BOE}=(54+96)-30\frac{3}{8}=119\frac{5}{8}.$$

解法二：由于 $S_{\triangle AOD}:S_{\triangle AOB}=OD:OB=16:9$ ，所以 $S_{\triangle AOD}=54\times\frac{16}{9}=96$ ，而

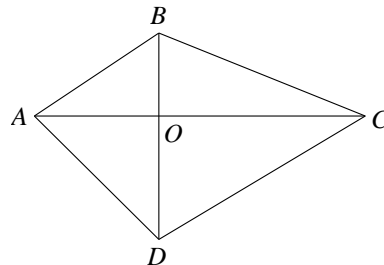
$S_{\triangle DOE}=S_{\triangle AOB}=54$ ，根据蝴蝶定理， $S_{\triangle BOE}\times S_{\triangle AOD}=S_{\triangle AOB}\times S_{\triangle DOE}$ ，所以

$$S_{\triangle BOE}=54\times 54\div 96=30\frac{3}{8},$$

$$\text{所以 } S_{OECD}=S_{\triangle BDC}-S_{\triangle BOE}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BOE}=(54+96)-30\frac{3}{8}=119\frac{5}{8}.$$

【十】

如下图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 交于 O 点，已知 $AO=1$ ，并且 $\frac{\text{三角形} ABD \text{的面积}}{\text{三角形} CBD \text{的面积}} = \frac{3}{5}$ ，那么 OC 的长是多少？

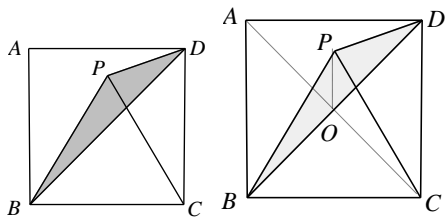


【分析】根据蝴蝶定理， $\frac{\text{三角形} ABD \text{的面积}}{\text{三角形} CBD \text{的面积}} = \frac{AO}{CO}$ ，所以 $\frac{AO}{CO} = \frac{3}{5}$ ，又 $AO=1$ ，所以 $CO = \frac{5}{3}$ 。

挑战篇：

【一】

如下图，正方形 $ABCD$ 的面积是 a ，正三角形 $\triangle BPC$ 的面积是 b ，求阴影 $\triangle BPD$ 的面积。



【分析】连接 AC 交 BD 于 O 点，并连接 PO 。如图所示，

可得 $PO \parallel DC$ ，所以 $\triangle DPO$ 与 $\triangle CPO$ 面积相等(同底等高)，所以有：

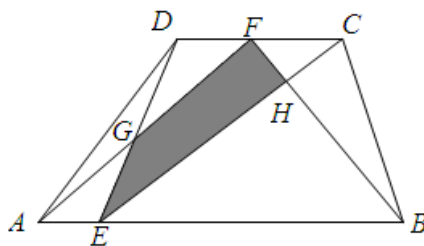
$$S_{\triangle BPO} + S_{\triangle CPO} = S_{\triangle BPO} + S_{\triangle DPO} = S_{\triangle BPD},$$

$$\text{因为 } S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} a, \text{ 所以 } S_{\triangle BPD} = b - \frac{1}{4} a.$$

【二】

(2009 年第 14 届华杯总决赛压轴题) 右图中， $ABCD$ 是梯形，面积是 1. 已知 $\frac{DF}{FC} = \frac{3}{4}$ ，

$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{5}$ ， $\frac{DC}{AB} = \frac{c}{d}$ ，问：(1) 三角形 ECD 的面积是多少？(2) 四边形 $EHFG$ 的面积是多少？



【分析】(1) 由于 $DC:AB=c:d$ ，则三角形 DCE 的面积与三角形 ECB 的面积之比为 $c:d$ ，

则三角形 ECD 的面积为： $\frac{c}{c+d}$

(2) 连接 EF ，则三角形 DEF 的面积为： $\frac{3}{7}\left(\frac{c}{c+d}\right)$ ；而三角形 EFC 的面积为 $\frac{4}{7}\left(\frac{c}{c+d}\right)$ 。

则 $AE:DF=\frac{1}{6}d:\frac{3}{7}c=7d:18c=GE:DG$ ，所以三角形 $O E$ 的面积为

$$\frac{7d}{18c+7d} \times \frac{3}{7}(c+d) \times c = \frac{3cd \times (c+d)}{18c+7d} ;$$

同理，三角形 EFH 的面积为 $\frac{20cd}{(35d+24c)(c+d)}$ ，则他们的和为：

$$\frac{c \times d}{c+d} \times \left(\frac{3}{7d+18c} + \frac{20}{35d+24c} \right)$$