

第二十二届希望杯数学邀请赛初一培训题答案

一. 选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	D	B	B	C	C	C	C
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	D	D	B	A	C	A	C	C	D	B
题号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答案	C	C	A	B	B	A	D	D	A	C

精选解答

9. 【解】当 $n=2$ 时, $a+b=7$, 结果是 (C) 7

11. 【解】原方程可以化成 $(x+1)y=9$, 9 拆成两个整数的乘积, 可以有如下组合: $1 \times 9, 9 \times 1, -1 \times (-9), -9 \times (-1), 3 \times 3, -3 \times (-3)$ 共有 6 组数据。结果选 D. 6

12. 【解】取满足条件的特殊值, $a=-1, b=1$, 代入①②③④, 即可以求出, 解为 D

14. 【解】取特殊数, $a=7, b=8$, 则 $a^2+4b=49+32=81$, 除以 5 余 1, 结果是 A. 1

15. 【解】角 $CED=180^\circ - (\text{角 } DCE+\text{角 } CDE) = 180^\circ - (\text{角 } DCA+\text{角 } CDB) / 2 = 180^\circ - (\text{角 } O+\text{角 } ODC+\text{角 } O+\text{角 } OCD) / 2 = 180^\circ - (\text{角 } O+180^\circ) / 2 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

注: 利用三角形外角与不相邻内角关系和三角形三个内角和为 180° 的定理。

16. 【解】注意 0 的相反数是 0

17. 【解】假定 1 号运动员 9 局全胜, 2 号运动员只负 1 局, 3 号负 2 局, 以此类推, 9 号运动员 9 局全负。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜
2	负	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜
3	负	负	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜
4	负	负	负	胜	胜	胜	胜	胜	胜	胜
5	负	负	负	负	胜	胜	胜	胜	胜	胜
6	负	负	负	负	负	胜	胜	胜	胜	胜
7	负	负	负	负	负	负	胜	胜	胜	胜
8	负	负	负	负	负	负	负	胜	胜	胜
9	负	负	负	负	负	负	负	负	胜	胜
10	负	负	负	负	负	负	负	负	负	胜

由上表可以看出: $x_1=9, y_1=0, x_2=8, y_2=1, \dots, x_{10}=0, y_{10}=9$. 即 $x_i+y_i=9$, 且 $\sum x_i = \sum y_i$. 由对称性得知: $M = \sum (x_i)^2 = \sum (y_i)^2 = N$

18. 【解】由于外角分别为 $180^\circ - A, 180^\circ - B, 180^\circ - C, 180^\circ - D$. 又四边形外角和 $= 180^\circ \times (4-2) = 360^\circ$, 又比例关系得知: 四个外角依次为 $360 \times 2 / 18 = 40^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 160^\circ$. 所以对应的四个内角分别为 $140, 120, 80, 20$. 只有 C 结果正确。

19. 【解】前一个加数的末尾总是 5. 后一个加数末尾是 3, 多个 3 相乘, 末尾是有规律变化的, 即 $3^1=3, 3^2=9, 3^3=27, 3^4=81, 3^5=243$, 故末尾由指数幂对 4 的模来决定。2011 模 4 为 $3, 3^3$

末尾为 7，故与前面的 5 相加，得到的各位数就是 D. 2

20. 【解】由题意得知下表

次序	盐水	盐	水
1	M	Mp%	M-Mp%
2	N/2	(N/2)q%	N/2-(N/2)q%
3	N/4	(N/4)q%	N/4-(N/4)q%
总和	M+N/2+N/4	Mp%+(N/2)q%+(N/4)q%	M(1-p%)+(N/2)(1-q%)+(N/4)(1-q%)

浓度为：盐总和/盐水总和= (mp%+(3n/4)q%)/(m+3n/4)=B

21. 【解】如果 N 可以分解质因数为 axb，a、b 都是质数。则

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} &= \frac{1}{a \cdot \square + 1} + \frac{1}{b(b+1)} \\ &= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)} \right) \\ &= \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} \end{aligned}$$

如 N=a×b×c，a, b, c 均为质数，则可以分拆成：

$$\begin{aligned} 1/N &= 1/(a \times b \times c) = (1/ab) \times [1/(c+1) + 1/c(c+1)] = (1/c) \times [1/(ab+1) + 1/ab(ab+1)] \\ &= (1/bc) \times [1/(a+1) + 1/a(a+1)] = (1/a) \times [1/(bc+1) + 1/bc(bc+1)] \\ &= (1/ac) \times [1/(b+1) + 1/b(b+1)] = (1/b) \times [1/(ac+1) + 1/ac(ac+1)] \\ &= 1/ac(a+b) + 1/bc(a+b) = 1/ab(a+c) + 1/bc(a+c) = 1/ab(b+c) + 1/ac(b+c) \\ &= 1/(abc+1) + 1/abc(abc+1)。 \end{aligned}$$

(注：abc 表示 a×b×c，其他同理。)

我们来看看，A 要拆成 3 个单位分数，且已知有一个为 1/25，故将 5/121=(5*25)/(121*25)

将分子化为：125=121+4，所以 5/121=(121+4)/(121*25)=1/25+4/(121*25)

同理 因为 759=3*11*23，将第二个加数化成：4*3*23/(11*11*25*3*23)=12*23/(759*275)
=276/(759*275)=(275+1)/(759*275)=1/759+1/(759*275)，满足 A。

同样方法拆成 5/121=15/(121*3)=(11+4)/(33*11)=1/33+4/(33*11)

4/(33*11)=(3+1)/(121*3)=1/121+1/363 B 满足

仿照 A 的拆法，知道 4/(121*25)=4*1008/(1008*121*25)=(3025+1007)/(1008*3025)
=1/1008+1007/(1008*3025) C 不满足

结果是 C。

D 的证明就不哆嗦了，也是成立的。

22. 【解】由题意知道如下数对 (x,y,z) 满足条件。共有 9 个不同的值。选 C.9

Index	x	y	z	A=2 ^x 3 ^y 5 ^z ∈ [1, 10]
1	0	0	0	1

2	1	0	0	2
3	2	0	0	4
4	3	0	0	8
5	0	1	0	3
6	0	2	0	9
7	1	1	0	6
8	0	0	1	5
9	1	0	1	10

23. 【解】首先 x, y 都不等于 0, 由于绝对值的关系, 只有 4 种可能,

(1) $x > 0, y > 0 \rightarrow x + y = 12, x + y = 6$, 无解

(2) $x > 0, y < 0 \rightarrow x + y = 12, x - y = 6, \rightarrow x = 9, y = 3 > 0$, 不符合条件

(3) $x < 0, y > 0 \rightarrow -x + y = 12, x + y = 6 \rightarrow x = -3, y = 9$, 满足条件

(4) $x < 0, y < 0 \rightarrow -x + y = 12, x - y = 6$ 无解。

结果是 A. 1

24. 【解】假设五袋杂粮编号分别为 A, B, C, D, E。由题意, 每次最多只能称 2 袋, 且必须是 2 袋, 否则就少于 50 公斤称不出来, 或者大于 70 公斤超出范围。由此可以推理:

顺序称重: 第 1 次 $A + B = m_1$, 第 2 次 $B + C = m_2$, 第三次 $A + C = m_3$, 就可以知道 B 的重量为 $(m_1 + m_2 - m_3) / 2$, A 的重量为 $(m_1 + m_3 - m_2) / 2$, C 的重量为 $(m_2 + m_3 - m_1) / 2$

第四次 $A + D = m_4$, 第五次 $A + E = m_5$. 分别得到 D, E 的重量。选 B. 5

25. 【解】由题意知道, 白球 $2 \leq W \leq 8$, 红球 $2 \leq R \leq 5$, 黑球 $B \leq 3$. 且 $W + R + B = 10$

Index	W	R	B
1	8	2	0
2	7	3	0
3	6	4	0
4	5	5	0
5	7	2	1
6	6	3	1
7	5	4	1
8	4	5	1
9	6	2	2
10	5	3	2
11	4	4	2
12	3	5	2
13	5	2	3
14	4	3	3
15	3	4	3
16	2	5	3

由上表看出只有 16 种, 选 B. 16

26. 【解】考察多边形内角和定理，n 边形内角和为 $(n-2)*180$,

1) 如果三角形所有内角都大于 60° ，则三角形 3 个内角和大于 180° ，矛盾，①正确

2) 如果凸四边形所有内角都小于 90° ，则它的 4 个内角和小于 $90^\circ *4=360^\circ$ ，矛盾，

②正确

3) 如果凸五边形所有内角都大于 108° ，则它的 5 个内角和大于 $108^\circ *5=540^\circ$ ，矛盾，

③正确

4) 如果凸六边形所有内角都大于 90° ，则它的 6 个内角和大于 540° 。而实际内角和为 $4*180=720^\circ$ 。错误，可以都大于 90° 。

正确答案是 A.

27. 【解】由于 $\frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4}(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2})$ ，所以

$$A = 12(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{95} - \frac{1}{99} + \frac{1}{96} - \frac{1}{100} + \frac{1}{97} - \frac{1}{101} + \frac{1}{98} - \frac{1}{102})$$

$$= 12(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{99} - \frac{1}{100} - \frac{1}{101} - \frac{1}{102})$$

$$= 12(2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{99} - \frac{1}{100} - \frac{1}{101} - \frac{1}{102})$$

$$\approx 25 - 12(0.01 + 0.01 + 0.01 + 0.01)$$

得到：结果是 D. 25

28. 【解】结论是 D 4

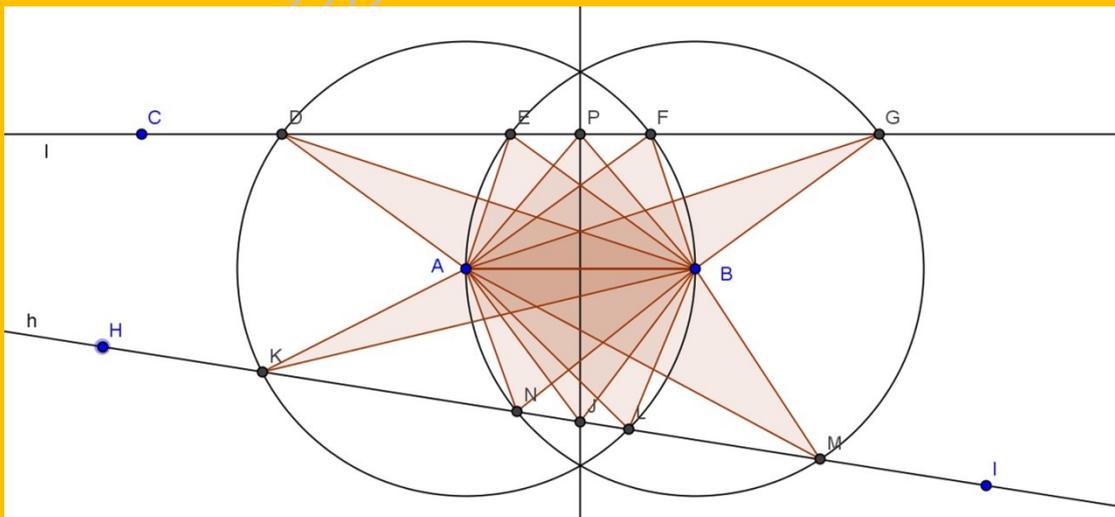
线段 AB 所在的直线和直线 l 在同一个平面的位置关系有 3 种，

1 相互平行， 2. 相交， 3.重合（不能构成三角形，除外）

下图非常清楚的画出了可能性。最多还可以达到 5 个点。

直线 $l \parallel AB$ ：当我们移动直线 l，使得 P 到 AB 的距离大于 AB 的长度时，就只有一个点 P 与 AB 构成等腰三角形。..... 动态图形参见 geogebra 的文件。

直线 h 与 AB 所在直线相交：同理可以移动 H 点或 l 点，使之与 A 或 B 重合，



29. 【解】GIMPS 互联网梅森素数大搜索，最近发现了第 47 个梅森素数为 2 的 42643801 次方减 1. 它有 12837064 位数，如果用普通字号将这个巨数写下来，它的长度将超过 50 千米。

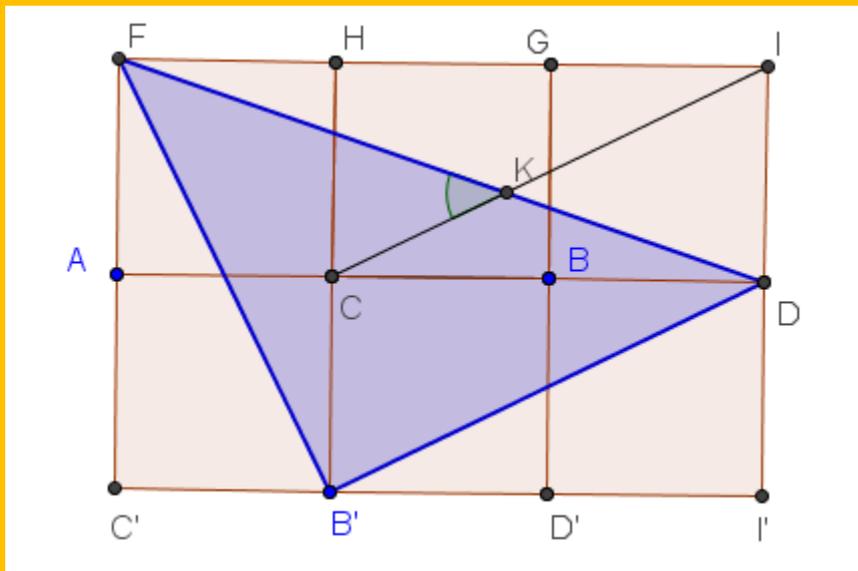
通过观察 2 的 n 次幂，其个位的变化有如下规律：

$$2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, \dots$$

每 4 个循环一次。而 $42643801 \bmod 4 = 1$ （取 4 的模为 1），故 $2^{42643801-1}$ 的末尾数为 $(2-1) = 1$ 。结果是 A 1

30. 【解】作图看出来是 45° ，如果允许带量角器，可以用量角器测量。（投机取巧办法，为了竞赛）。严谨学风参照下图：

将两条相交线中短的一条向下平移 1 个单位（假设正方形为单位长 1）。



很容易证明： $Rt\triangle FC'B' \cong Rt\triangle B'I'D$ (SAS)，所以 $\triangle B'FD$ 为等腰三角形，且是等腰直角三角形。故角 $FDB' = 45^\circ$

二、填空题

31. 【解】考察学生的小数、分数、幂次方计算。 $0.125=1/8=2^{-3}$, $0.75=3/4=3 \cdot 2^{-2}$

$$= 2^{-3 \cdot 2} \div (3^3 \times 2^{-6}) + (3^3 \times 2^{-6} \div 2^{-6})$$

$$= 3^{-3} + 3^3 = 27 \frac{1}{27}$$

32. 【解】考察绝对值的理解。取特例 $a=0, b=1, c=2$ ，代入原式 $=1+1-2=0$ 。或者：利用绝对值的定义得到： $|a-b|=b-a, |b-c|=c-b, |c-a|=c-a$ ，代入原式得到 0。

33. 【解】

A 可能在 B 的左边，也可能在 B 的右边。故 A 点有两种可能。而 P 同样可以在 A 的左边或右边，故有四种可能。（-7,3,9,19）

1 A 在 B 的左边，见题目中的图，则 A 点坐标为 -2，故 P 可能是 -7 或 3

2 A 在 B 的右边，则 A 的坐标为 $6+8=14$ ，故 P 的坐标可能是 $14-5=9, 14+5=19$

34. 【解】由题意知，A 的坐标为 0，则 C 的坐标 ≥ 5 ， $B \leq 4$ ， $D \leq B+6 \leq 10$ ，则 $CD=D-C \leq 10-5$ 故结果是 ≤ 5

35. 【解】关于原点对称，说明就是相反数。所以 $a/2+2=-(a/3+3)$ ， $5a/6=-5$ ，所以 $a=-6$
M 的坐标为 -1，N 的坐标为 1

36. 【解】解为 $x=0.5$ ，即 $x-0.5=0$ ，同时 x 的系数为 -2，所以 $-2(x-0.5)=0$

即 $-2x+1=0$

37. 【解】考察学生三线八角是否熟悉和理解，平行线的判定定理。

同位角相等，内错角相等，同旁内角互补。

38. 【解】因为绝对值是不小于 0 的数，两个不小于 0 的数的和为 0，说明这两个数必须是 0。所以 $a-2b+5=0$ ， $5a+6b-39=0$ ，解得 $a=3$ ， $b=4$ ，由勾股定理得到斜边长为 5。

(记住我国古代的勾 3 股 4 弦 5)

39. 【解】原式 = $(1 - (3-1)) / (-14/8) = 8/7$

40. 【解】9 只能写成 $1 * (-1) * (-3) * 3$ 这样的 4 个不同的整数的乘积。

故可以假定 $9+m=1$ ， $9+n=-1$ ， $9+p=3$ ， $9+q=-3$ ，求和为 $36 + (m+n+p+q) = 0$
 $m+n+p+q = -36$

41. 【解】既然 $x < 10$ 时， $(a+x) / (-bx-5) = 2$ 成立，所以，可取特殊值，如 $x=0$ 时，可得 $a=-10$ ，取 $x=1$ 时，可得 $-9 = -2(b+5)$ ， $b=4.5-5=0.5$ ，故 $a^2 - b^2 = 100 - 0.25 = 99.75$

42. 【解】考察三角形面积之比和边长之比的关系（同底或等高时）

设平行四边形面积为 22，故四边形的一半的面积就是 11，三角形 ACD 和三角形 ACD 都是面积 11。因为 $BF:FC = 7:4$ ，所以三角形 BFD 面积为 7，FCD 面积为 4，

ACE 与 BFD 的面积之比为 33:35，则 ACE 的面积是 $7 * 33 / 35 = 33/5$ ，故 ECD 的面积是 $11 - 33/5 = 22/5$ ，所以 $AE:ED = (33/5) / (22/5) = 33:22$ ，答案是 $33/22$

43. 【解】由题意可知 $x=4$ 或 -4 ， $y=9$ 或 -9 ，又因为 $xy < 0$ ，所以只有 2 种可能，即

$x=4$ and $y=-9$ ， $x+y=-5$ ，或者 $x=-4$ and $y=9$ ， $x+y=5$

44. 【解】1 式乘上 3 减去 2 式乘上 7 得到：

$18(x-y) - 28(y-x) = -12 - 18 * 7$ ， $46(x-y) = -138$ ， $x-y = -3$

考察灵活消元法。保留有用的代数式。

45. 【解】从图上可以数出来，MN 的距离等于 9 个正三角形的边长，即为 9。

A 点落地，经过了三轮，每一轮包括 2 个 120 度，即共旋转了 $6 * 120$ 度 = 2 个圆周长。

即 $2 * 2 * \pi * r = 4\pi = 12.56$ (保留 4 位有效位)

46. 【解】从 2 开始写出来几个质数，2,3,5,7,11,13,17，除了 2 以外，其它质数都是奇数，而 3 个质数的和为 26，是偶数，则三个质数中必定含有 2，再寻找另外 2 个质数，其和为 24，如 $11+13=24$ ， $7+17=24$ ，满足任意 2 个的差的绝对值不小于 5 的，只有 2,7,17

47. 【解】由题意知道：内部 FJIHG 为正五边形，其任意一个内角为 108° ，而 β 与 γ 互补，所以 $\beta = 72^\circ$ ，而 $\alpha + 2\beta = 180^\circ$ ，所以 $\alpha = 36^\circ$ 。故 $\alpha:\beta:\gamma = 1:2:3$

48. 【解】 $4 \odot 5 = (4+5)(4-5) = -9$ ， $3 \odot (-9) = (3+(-9))(3-(-9)) = -6 * 12 = -72$

49. 【解】取 $x=2$ ，得 $24-2k-15=1$ ， $k=4$

50. 【解】因为 $|x+1| + |x-2|$ 当 $x \geq -1$ and $x \leq 2$ 时 结果为 $x+1+2-x=3$ ，这是它的极小值。

同样， $|y-1| + |y-3|$ ，当 $1 \leq y \leq 3$ 时，结果为 $y-1+3-y=2$ ，这是它的最小值。

$|z-1| + |z+2|$ ，当 $-2 \leq z \leq 1$ 时，结果为 $1-z+z+2=3$ ，这是它的最小值。

由题意，三者之积 = 18，有前面的分析知道，三者之积最小值为 $3 * 2 * 3 = 18$ ，故必定是在最小值状态下，才成立。所以得出 x, y, z 的取值范围只能是：

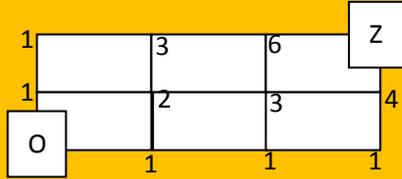
$-1 \leq x \leq 2$ ， $1 \leq y \leq 3$ ， $-2 \leq z \leq 1$

为了保证 $x+2y+3z$ 有最小值，则只要 x, y, z 取最小值，即 $-1+2-6=-5$

当 x, y, z 取最大值时, $x+2y+3z$ 有最大值, 即 $2+6+3=11$

51. 【解】设 $\angle DAE=x$, 则 $\angle B=2x$, 有等腰三角形的性质定理, 得 $\angle BAD=\angle B=2x$, 由外角定理, $\angle ADE=4x=\angle AED$, 故在 $\triangle ADE$ 中, $9x=180$ (三角形内角和定理), $x=20$, $\angle BAC=5x=100^\circ$

52. 【解】从 O 点到 Z 点的最短路径, 要求只能向右或向上行进, 否则就是走回头路, 不是最短路径。我们标出其中经过的每个点有多少种最短路径走法。最后到 Z 点有 $6+4=10$ 种



53. 【解】还需要增加一个条件 $|y+1|\leq 4$, 这时, x, y 的取值范围分别是:

$-3\leq x\leq 5, -5\leq y\leq 3$. $2x-3y$ 的最大值 $=2x5-3x(-5)=25$, $2x-3y^2$ 的最小值 $=2x(-3)-3x(-5)^2=-81$

54. 【解】题中已知是 $EG\parallel CD$. 不妨取 G 点与 E 点重合, 五边形就压缩成了三角形 FCE .

其面积 $=1-(S_{\triangle BFC}+S_{\triangle AFE}+S_{\triangle CDE})=1-(0.5+1/3+1/3)/2=2/3-1/4=5/12$

55. 【解】取 $x=-1$, 得到 $1=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$, 所以 $-a_0+a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=-1$

56. 【解】原式 $=2011^4-2010\times 2011^3-2010\times(2011^2+2011-2)$
 $=2011^3\times(2011-2010)-2010\times(2011^2+2011-2)$
 $=2011^2\times(2011-2010)-2010\times(2011-2)$
 $=2011-2010\times 2=1-2010=-2009$

57. 【解】70 岁以上的人共有 $182+(2674-1326)$, 80 岁以上人数共有 $68+102=170$
 比例为 $170/1530=1/9$

58. 【解】35 可以写成 2 或多个连续自然数的和, $35=5\times 7$ (5 个 7 或 7 个 5)
 $35=17+18=5+6+7+8+9=2+3+4+5+6+7+8$. 有 3 种和式。

59. 【解】设甲乙相遇所化时间为 t 小时, 甲乙两站距离为 S 公里, 则
 $S=(80+70)t$, 且相遇后 2 小时甲丙相遇, 即 $70t-50t=(80+50)\times 2$,
 所以 $S=150\times 13=2150$ 千米

60. 【解】不超过 15 的质数包括 2,3,5,7,11,13, 共 6 个。算术平均数 $M=(2+3+5+7+11+13)/6=41/6$, 在 6 和 7 之间, 最接近的整数是 7。

61. 【解】 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}>1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}<1$, 故满足条件的只有 (1,2,3) (2,3,4)

62. 【解】因为有一个乘数的末尾是 5, 故结果的末尾只能是 0 或 5, 如果是 0, 则 $z=0$,
 $50000=5^5\times 2^4$ 则 x 只能是偶数, 但 2^4 最多只能是 16, 故不成立。所以 $Z=5$ 。
 $50005=137\times 5\times 73=137\times 365$ (分解质数)。故 $x=7, xyz=765$

63. 【解】凑平方数,

$$(2-x)+(x+3)=5, \text{ 两边平方得到: } (2-x)^2+2(2-x)(x+3)+(x+3)^2=25$$

$$\text{将已知条件代入, 得到 } 15+2(2-x)(x+3)=25, \text{ 则 } (2-x)(x+3)=5$$

64. 【解】因为 $|x-2|$ 总不小于 0, 所以当不等式右边 <0 时, 不等式总成立, 即 $x<2$

65. 【解】考察幂的运算, $P=10/(10^2/10^3)=100, Q=10^2/(10^3/10)=1, R=10^3/(10/10^2)=10^4$
 最大的是 $R=10^4$, 最小的是 $Q=1$

66. 【解】不等式组的 (1) $x>1$, (2) $x<a$, 使得二者无解, 即 $a\leq 1$

67. 【解】假设 A 点离地面高为 h 厘米, 根据题意, 第一次弹起到 B 点, B 点离地面高为 $0.8h$

厘米。第二次弹起到 C 点，C 点离地面的高度为 $(0.8h-20) \times 0.8+20$ 。

由题意，A 点比 C 点高出 68 厘米。所以 $h - (0.8h-20) \times 0.8-20=68$

$$(1-0.64)h+16=88, h=72/0.36=200 \text{ 厘米}$$

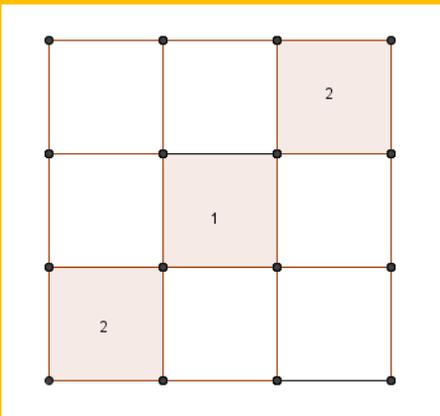
68. 【解】也可以转化为整数解求法。设等腰三角形的腰长为 x ，底为 y ，则

$$2x+y=20, \text{ 其中 } x, y \text{ 为整数。且满足三角形条件: } 2x>y>0$$

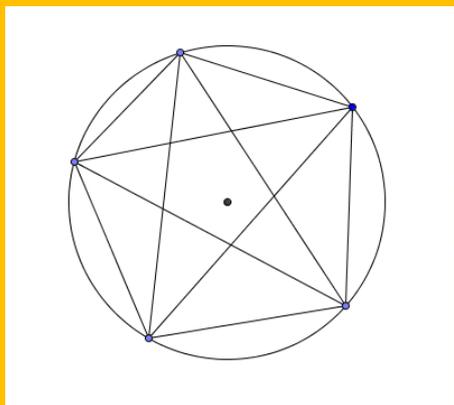
y 必定是偶数，故 y 可取 $2 (x=9), 4 (x=8), 6 (x=7) 8 (x=6)$

有 4 个这样的三角形。

69. 【解】至少需要 5 个小正方体。让三组小立方体沿着正方形的对角线摆放就可以了。俯视图如下：



70. 【解】有 10 条线段。



71. 【解】解方程组得到 $a=0, b=-1$. 故原式 $=0 - (-1)^{2011} = 1$

72. 【解】3 个不同质数的和是偶数，说明必定含有 2 这个质数。除了 2 的质数都是奇数。

列表可以看到结果：共有 6 组。

Index	P1	P1	P3	P1+p2+p3
1	2	3	5	10
2	2	3	7	12
3	2	3	11	16
4	2	3	13	18
5	2	5	7	14
6	2	5	11	18

73. 【解】假设是 3 个，则满足 $a=bc, b=ac, c=ab$ ，由对称性，可以得到 $a^2=b^2=c^2=1$ ，

而 $x^2=1$ ，最多只能有 2 个不同的解 $(+1, -1)$ ，不合题意。

4 个肯定不行，因为相对两个数相等。即 $a=c=bd, b=d=ac$

5 个呢，推出 $ac=cd=be=1$ ，故 $a=d$ ，也不成立。

6个数时, $a_1=a_6 \cdot a_2, a_2=a_1 \cdot a_3, a_3=a_2 \cdot a_4, a_4=a_3 \cdot a_5, a_5=a_4 \cdot a_6, a_6=a_5 \cdot a_1$

得到 $a_1 \cdot a_4=1, a_2 \cdot a_5=1, a_3 \cdot a_6=1$, 这时只要找三个不同的数 a_1, a_2, a_3 , 使得 $a_2=a_1 \cdot a_3$, 如 $(2, 6, 3)$, 就可以了。这六个数依次为 $(2, 6, 3, 1/2, 1/6, 1/3)$ 满足。所以 n 最小为 6

74. 【解】由已知条件可得 $a=2, b=3$. 原式可以化为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a+2013} - \frac{1}{b+2014} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3-2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2014} \\ &= \frac{1007-1}{2014} \\ &= \frac{503}{1007} \end{aligned}$$

75. 【解】1罐咖啡, 甲单独要 12 天喝完, 每天喝 $1/12$ 罐, 甲乙同时喝, 10 天喝完, 说明乙单独喝, 每天喝 $(1/10 - 1/12) = 1/60$ 罐。

同理, 1罐奶茶, 乙单独要 20 天喝完, 每天喝 $1/20$ 罐, 甲乙同时喝, 12 天喝完, 说明甲单独喝奶茶, 每天喝 $(1/12 - 1/20) = 1/30$ 罐。

由题意, 刚开始, 甲单独喝奶茶, 乙单独喝咖啡。谁先喝完, 就接着与对方喝剩下的奶茶或咖啡。

根据上面的分析, 显然是甲先将奶茶喝完, 再与乙一起喝咖啡。

- (1) 甲需要 30 天喝完奶茶, 乙同时喝完 30 天的咖啡,
- (2) 剩下的咖啡, 甲乙一起喝。 $(1 - 1/30) / (1/12 + 1/60) = 29/3$
- (3) 故一共需要 $30 + 29/3 = 39 \frac{2}{3}$ 天。

三、解答题

76. 【解】若 $[y]=n$, 则 $y-1 < n \leq y$. 故由原方程可得: $\frac{3x+a}{4} - 1 < 2 \leq \frac{3x+a}{4}$

解得: $8 \leq 3x+a < 12$, 由于 a 是正有理数, 故 x 可以取的正整数只能是 1, 2, 3.

注: 既然没有确定 a 的值, 但是确定了 a 的取值范围。

77. 【解】设丙车队有 y 辆车, 甲车队有 x 辆车, 则乙车队有 $3y-x$ 辆车。

甲乙丙三个车队某日分别行驶里程为 $325x, 250(3y-x), 150y$, 有题目已知得到:

$$325x + 250(3y-x) + 150y = 21600$$

$$y = (21600 - 75x) / 900 = 24 - x/12$$

$\therefore x, y, 3y-x$ 都为正整数, \therefore 可能的取值为:

$$X=12, y=23, 3y-x=27$$

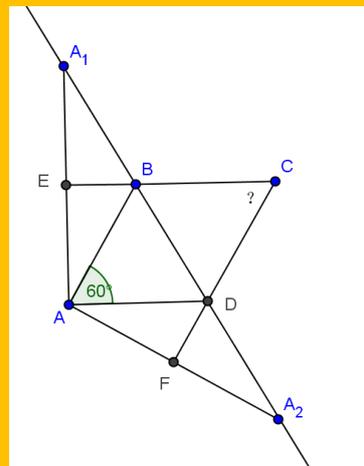
$$X=24, y=22, 3y-x=12$$

故 y 最大值为 23

78. 【解】由对称性知道: $CE \perp AA_1, CF \perp AA_2$, 且 $\angle AA_1B = \angle A_1AB$,

$\angle AA_2D = \angle A_2AD$

在 $\triangle AA_1A_2$ 中 (这是关键, 因为 A_1, B, D, A_2 共线), 由三内角和为 180° , 得到:



$$\angle A1AB + \angle A2AD = (180^\circ - 60^\circ) / 2 = 60^\circ .$$

在四边形 AECF 中, 已知三个角分别为 90° , 120° , 90° , 剩下的 $\angle C = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ$.

79. 【解】已知任意 66 人持有股份总额 $\geq 50\%$, 假定 100 人中, 有 99 人持有股份最小值为 $50\%/66$, 则满足上述条件, 持有股份最多的那个人拥有 $1 - 50\%/66 \times 99 = 25\%$

80. 【解】先用特例, 假定质数 $p=7$, 得到 $7p^4 + 5 = 7^5 + 5 = 16812 = 336 \times 50 + 12$, 所以结果基本可以确定为 12. 由此我们可以经过适当变形, 将原式化为:

$$7p^4 + 5 = 7(p^4 - 1) + 12 \quad \text{①}$$

问题就可以转为为求证 $336 \mid [7(p^4 - 1)]$

$$336 = 2^4 \times 3 \times 7 \quad (\text{分解质因数}) \quad \text{②}$$

只需要证明 $2^4 \times 3 \mid (p^4 - 1)$

$$p^4 - 1 = (p^2 + 1)(p + 1)(p - 1) \quad (\text{因式分解}) \quad \text{③}$$

先证上述表达式③有 3 这个因子, 考虑到三个连续整数可以表示成 $3k-1, 3k, 3k+1$ (k 为整数), p 是质数, $p \neq 3k$, 所以 p 只有可能是 $3k-1$ 或 $3k+1$,

则 $(p+1)(p-1)$ 中必有一个是 $3k$, 有 3 的因子。

同理: 证上述表达式③中有 2^4 这个因子, 考虑到 p 是质数, 所以 p 不是偶数, 而是奇数, 假定 $p=2m+1$ (m 为整数), 则表达式可以化为:

$$[(2m+1)^2 + 1](2m+2)(2m) = 2^3(2m^2 + 2m + 1)(m+1)m \quad \text{④}$$

显然上述表达式④包含了 2^3 因子, 而 $m(m+1)$ 是两个连续整数的乘积, 一定有一个是偶数, 故表达式④包含了 2^4 因子. 证毕。

81.【解】包含 2 个数字的质数有：

11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
	2+11	2+3+5+7	2+17	2+3+5+13	2+3+5+19	2+29	3+5+29	2+3+5+7+11+13	2+41	2+3+5+37
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
2+3+5+43	5+7+47	2+59	3+5+59	2+3+5+61	2+71	3+5+71	2+3+5+73	2+3+5+79	3+5+89	

- (1) 只有 11 不能分成两个或两个以上的不同质数和。
- (2) 最大的 n 为 6，即 $41=2+3+5+7+11+13$

82.【解】这道英文题看似复杂，其实很简单。由已知列方程组：

$$\begin{aligned}
 a+b+c+d=10 &\rightarrow a+d=10-(b+c)=5 \\
 e+b+f+d=18 &\rightarrow e+f=18-(b+d)=18-(3+4)=11 \\
 b+c+b+c=10 &\rightarrow b+c=5 \\
 e+b+g+a=17 &\rightarrow g=17-(6+3+1)=7 \\
 a+e+b+e=16 &\rightarrow e=(16-(a+b))/2=(16-4)/2=6 \\
 b+b+c+b=11 &\rightarrow 3b+c=11 \\
 c+f+b+g=17 &\rightarrow f+g=17-5=12 \rightarrow f=12-7=5 \\
 d+d+c+a=11 &\rightarrow a+2d=11-c=9 \\
 \end{aligned}$$

逐一消元法，就可以求得解。
 先求 $b=(11-5)/2=3, c=2$ ；再求 $d=9-5=4, a=1$ ；
 再求出 $e=6, g=7, f=5$ ，
 故 abcdefg=1324657

83.【解】根据题意，可以画出机器人行走的路线图。正六边形周长为 100cm，按照回到 AB 为一圈，可以发现经过 2 圈就回到了起始点。（当起始点 P1 不是 AB 的中点时，否则一圈就到了）画出图形，并标明字母。

正六边形的周长为 100cm，则边长为 $100/6=50/3$ cm, $AD=100/3$
 由等腰梯形 BCDA 中位线 LM 性质定理可得：
 $n+r=2LM=BC+AD=50/3+100/3=150/3=50$ cm,

由对称性可以观察得到： $n=s=q, r=p=t$ ，
 故机器人行走距离= $n+p+q+r+s+t = 3n+3r=3(n+r)=3 \times 50=150$ cm
 答：机器人行走距离为 150cm

