

第二讲 从简单情况入手

有时候我们会碰到的题目很复杂，乍一看无从入手，这时我们可以先从简单的情况出发，看看有什么规律没有，归纳总结出发现的规律，并利用此规律解题。

这种从简单情况出发，进而推演到一般情况的方法叫做归纳法。即对于未知的数学对象，我们先从个别的，简单的问题入手，探寻出其规律后，在利用这个规律去解决普遍性问题。

所以本讲的**重点**：体会，并理解如何运用归纳法。

难点：应用归纳递推解决较复杂问题。

例题讲解：

一、计算类递推

例1、分析：题是一个超多位数的除法，显然直接用除法算式是比较麻烦的（当然肯定能做出来），那我们有没有一些简单的方法呢？这就是在咱们的递推法。

首先先观察题中有没有什么规律？（1）有很多4,8,6。（2）4，8，6的个数一样多。

那我们就可以利用这些规律先从简单情况入手：

（1） $48 \div 6 = 8$ 。（那是不是结果会是6个8呢？不一定，需要我们继续递推从而总结规律。）

（2） $4488 \div 66 = 68$ 。

（3） $444888 \div 666 = 668$

此时我们已经找到规律。则原式答案为：666 666 668

注：最简单的情况不一定具有普遍性，所以递推递推，必须要继续往下“推”

巩固练习：（1）计算： $\underbrace{999 \dots 9}_{2010 \text{ 个 } 9} \underbrace{98000 \dots 01}_{2010 \text{ 个 } 8} \div \underbrace{999 \dots 9}_{2011 \text{ 个 } 9} =$ $\underbrace{999 \dots 9}_{2011 \text{ 个 } 9}$

（2）a、12345678987654321 是（ ）的平方。 111 111 111

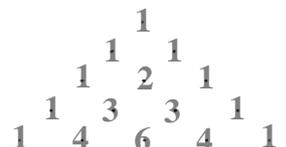
b、 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1$ 是（ ）的平方。 9

c、 $12345678987654321 \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$ 是（ ）的平方。 999999999

（3）用数字摆成下面的三角形，请仔细观察，推出第20行的各数之和。

提示：仍然是从简单情况入手现分别看前3或4行的和有什么规律。

答案： 2^{19}



二、几何类递推

例2、分析：10条直线没有平行，每两条都有交点但没有3条以上有交点的。即两两相交。求共安排多少个交警？即10条直线两两相交最多几个焦点的问题？

直线数为1时，交点0个；

直线数为2时，交点1个；与原来前1条直线相交则多出1个点。 $0+1=1$

直线数为3时，交点3个；与原来前2条直线相交则多出2个点。 $0+1+2=3$

直线数为4时，交点6个；与原来前3条直线相交则多出3个点。 $0+1+2+3=6$

直线数为5时，交点10个；与原来前4条直线相交则多出4个点。 $0+1+2+3+4=10$

直线数为n时，与原来前n-1条直线相交则多出n-1个点。 $0+1+2+3+\dots+(n-1)$

则10条直线时，共安排交警的人数为： $0+1+2+3+\dots+(10-1)=45$ 人。

例3、分析：此题为直线分圆的问题（切大饼问题）。即n条直线最多将圆分成几个区域？与上题相似，让直线在圆内两两相交则交点最多，则分得的区域就最多。

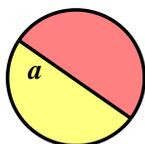


图1

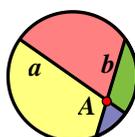


图2

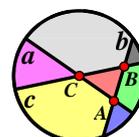


图3

- 1 条直线，圆被直线 a 分成 2 个区域。(红和黄) 如图 1.
- 2 条直线，直线 b 与 a 形成一个交点 A，则点 A 把直线 b 分成了两段，而此 2 段将原来的红黄两区域又多分出 2 个区域 (绿和蓝) 如图 2. 即: $2+2=4$
- 3 条直线，直线 c 与 a, b 新形成 2 个交点 B 和 C，则点 B 和 C 把直线 c 分成了 3 段，而此 3 段将原来的红黄绿 3 区域又多分出 3 个区域 (黑、灰、紫)。如图 3. 即 $2+2+3=7$
- 4 条直线，与原来 3 条直线相交出 3 个点，把第 4 条直线分成 4 段，则又会多出 4 个区域。总区域为: $2+2+3+4=11$

n 条直线时，被分出的总区域为: $2+2+3+4+\dots+n=1+1+2+3+4+\dots+n=1+\frac{(1+n)\times n}{2}$

此题要切出不少于 50 块，则最少得画出 9 条直线。 $2+2+3+4+5+6+7+8+9=46$

- 巩固练习: (1) 平面上有 30 条直线，其中没有两条直线互相平行，也没有三条直线或三条以上直线相交于一点，则平面上这 30 条直线最多有多少个交点? (提示: 同例 2. 答案: 435)
- (2) 把一块烙饼分给 11 个小朋友，只允许切 6 刀，每个小朋友最多分到多少块? (提示: 同例 3. 答案: 11)
- (3) 平面上 10 条直线最多将平面分成多少个区域? (提示: 同例 3. 答案: 56)
- (4) 平面上 10 个两两相交的圆最多能将平面分割成多少个区域? (答案: 92)

- 分析: 1 个圆分出的区域 $F_1=2$
 2 个圆分出的区域 $F_2=2+2\times 1=4$
 3 个圆分出的区域 $F_3=4+2\times 2=8$
 4 个圆分出的区域 $F_4=8+2\times 3=14$
 5 个圆分出的区域 $F_5=14+2\times 4=22$
 n 个圆分出的区域 $F_n=F_{n-1}+2\times (n-1)$

规律解释:

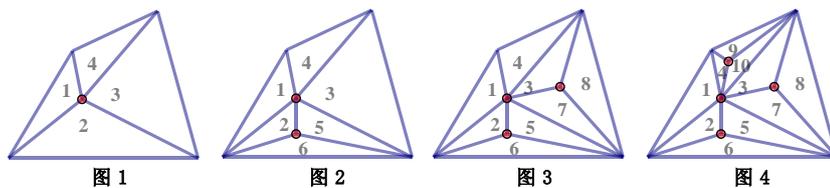
每多一个圆时 (第 n 个)，此圆就会与原来的 n-1 个圆形成 $2\times (n-1)$ 个交点，每一个交点又会将原来的弧分成两段，即原来的每个区域都会再多分出一个，也就是说，每多出来的一个交点就会再多分出一个区域。所以每多一个圆时，就会在原来的基础上再多出 $2\times (n-1)$ 个区域。

n 条直线形成交点个数: $1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n\times(n-1)}{2}$

n 条直线分圆或平面个数: $1+1+2+3+4+\dots+n=1+\frac{(1+n)\times n}{2}$

n 个圆分平面个数: $F_n=F_{n-1}+2\times(n-1)$

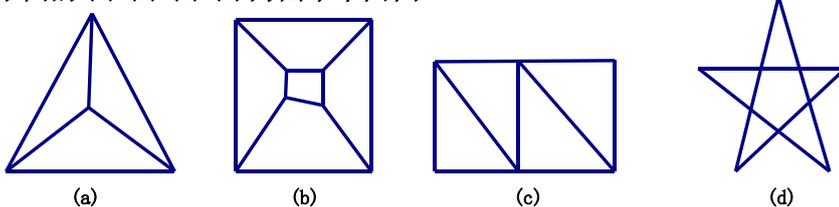
例 4、分析:



- 当四边形内只有 1 个点时，可剪出 4 个三角形。如图 1.
- 当四边形内只有 2 个点时，可剪出 6 个三角形。如图 2.
- 当四边形内只有 3 个点时，可剪出 8 个三角形。如图 3.
- 当四边形内只有 4 个点时，可剪出 10 个三角形。如图 4.
- 则每多 1 个点就会多出 2 个三角形.
- 当四边形内只有 n 个点时，可剪出 $4+2\times(n-1)$ 个三角形.

最后答案: $4+2\times(100-1)=202$

巩固练习: 下面的 (a) (b) (c) (d) 为四个平面图。



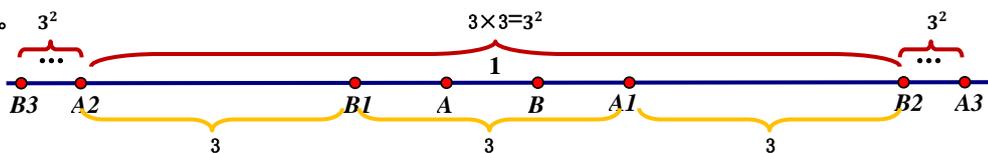
(1) 数一数，每个平面图各有多少个顶点？多少条边？它们分别围成了多少个区域？填入表中。

	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)			
(c)			
(d)			

(2) 观察上表，推断一个平面图的顶点数、边数、区域数之间有什么关系？

(3) 现已知一个平面图有 999 个顶点，它围成了 999 个区域，试根据以上关系确定这个图有多少个边？ (1997)

例 5、分析：先从各跳一、二、三次入手，看看原来在 A 点青蛙的位置到 B 点的距离 A_1B 、 A_2B 、 A_3B 之间有什么规律。



假设 $AB=1$ 。则各跳完一次后，两青蛙之间的距离 $A_1B_1=3$ ， $A_1B = 1$

则各跳完两次后，两青蛙之间的距离 $A_2B_2=A_2B_1 + B_1A_1 + A_1B_2=3+3+3=3 \times 3=3^2$ ，

$$A_2B = A_2B_1 + B_1A + AB = 3+1+1=5$$

则各跳完三次后，两青蛙之间的距离 $A_3B_3=B_3A_2 + A_2B_2 + B_2A_3=3^2+3^2+3^2=3^2 \times 3=3^3$ ，

$$A_3B = B_2A_3 + A_1B_2 + A_1B = 3^2+3+1=13$$

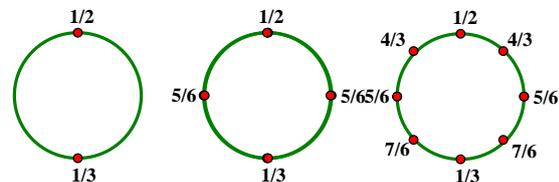
规律总结： $\begin{cases} \text{当跳的次数 } n \text{ 为偶数时： } A_nB_n = 3^n; A_nB = 3^{n-1} + \dots + 3^2 + 3 + 1 + 1 \\ \text{当跳的次数 } n \text{ 为奇数时： } A_nB_n = 3^n; A_nB = 3^{n-1} + \dots + 3^2 + 3 + 1 \end{cases}$

答案： $A_7B = 3^6 + 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 1093$

提高练习：今要在一圆周上标一些数，第一次先把圆周二等分，在两个分点旁边标上 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，第二次把两段半圆弧二等分，在分点旁标上相邻两分点的数字之和 $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ，第三次把四段圆弧二等分，并在 4

个分点上标上相邻两分点的数字之和 $1\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$ ， $1\frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$ ，如此下去，当第 8 次标完数之后，

圆周上所有数的总和是多少？



提示：因为增加的每个数都是原来两数之和，所以每次增加数的总和恰好是原来所有总数和的 2 倍，则增加后圆周上的总和为前一步总和的 3 倍，则第 8 次标完数后，圆周上的

$$\text{总和为：} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times 3 = 1822\frac{1}{2}$$

三、计数问题递推

例 6、分析：法一：上 1 级台阶的方法数：1 种；

上 2 级台阶的方法数：2 种（11 或 2）

上 3 级台阶的方法数：3 种（111 或 12 或 21）

上 4 级台阶的方法数：5 种（1111、121、211、112、22）

每一级的方法数是前两级的和。则推出上到 10 级共有 89 种方法。

法二：加法原理倒推。

要想上到第 10 级，只能从第 9 或 8 级上去，所以第 10 级的方法数是第 9 级与第 8 级方法数的和；

同理，要想上到第 9 级，只能从第 8 或 7 级上去，所以第 9 级的方法数是第 8 级与第 7 级方法数的和；

以此类推得到每一级的方法数都是前两级的和。到 10 级共有 89 种方法

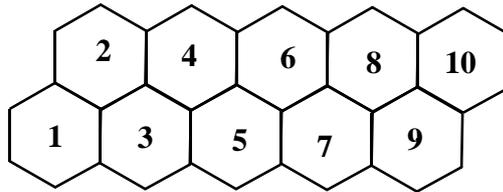
提高练习：(1) 用 10 个 1×2 的小长方形去覆盖 2×10 的方格网，一共有多少种不同的覆盖方法？



提示：与例 6 相似，每个方法数是前 2 个方法的和。

答案：89

(2) 如图所示，数字 1 处有一颗棋子，现移动这颗棋子到数字 10 处，规定每次只能移动到临近一格，且总是向右移动，问共有多少种不同的移动方法？



提示：与例 6 相似，每个方法数是前 2 个方法的和。例如数字 3 的方法数只能是数字 1 和 2 的和，而 4 的方法数只能是 2 和 3 的方法数之和...

答案：55