

第八讲 同余

寒假班我们已经学习了余数问题，那一讲我们掌握了一些有关余数的基本性质，并解决了一些简单余数问题，本讲则是在此基础之上的进一步拓展与提高，因此本讲首先是基本性质应用的复习（例 1、3、5），其次将是解决一些较复杂的综合余数问题（例 2、4、6）。

一、基本性质的复习

1、带余数除法算式： $a \div b = q \dots r$ （ a 、 b 、 q 、 r 均为整数）

从中我们应该得到：（1） $b > r$ 除数大于余数

（2） $a - r = b \times q$ 被除数减去余数则会出现整除关系，

则带余数问题就可以转化为整数问题。

2、余数的性质：（1）可加性：和的余数等于余数的和。

即：两数和除以 m 的余数等于这两个数分别除以 m 的余数和。

例： $7 \div 3 = 2 \dots 1$ $5 \div 3 = 1 \dots 2$ ，

则 $(7+5) \div 3$ 的余数就等于 $(1+2) \div 3$ 的余数 0。

（2）可减性：差的余数等于余数的差。

即：两数差除以 m 的余数等于这两个数分别除以 m 的余数差。

例： $17 \div 3 = 5 \dots 2$ $5 \div 3 = 1 \dots 2$ ，

则 $(17-5) \div 3$ 的余数就等于 $(2-2) \div 3$ 的余数 0。

（3）可乘性：积的余数等于余数的积。

即：两数积除以 m 的余数等于这两个数分别除以 m 的余数积。

例： $64 \div 7 = 9 \dots 1$ $45 \div 7 = 6 \dots 3$ ，

则 $(64 \times 45) \div 7$ 的余数就等于 $(1 \times 3) \div 7$ 的余数 3。

二、同余式

在生活中，若两个自然数 a 和 b 都除以同一个除数 m 时，余数相同该如何表示呢？在代数中我们称之为同余。即： a 与 b 同余于模 m 。意思就是自然数 a 和 b 关于 m 来说是余数相同的。用同余式表达为： $a \equiv b \pmod{m}$ 。

注：若 a 与 b 同余于模 m ，则 a 与 b 的差一定被 m 整除。（余数的可减性）

三、例题讲解

例 1、分析：此题实际上是带余数除法算式的一个应用。“1013 除以一个两位数余数为 12”，说明 1013 减去 12 以后就会被这个两位数整除，则这个两位数应该是 $1013-12=1001$ 的因数，且是大于 12 的两位因数。

解答： $1013-12=1001$ $1001=7 \times 11 \times 13$ 则可以组合出大于 12 的两位因数有：13、77、91。

提高练习：当 2011 被正整数 N 除时，余数为 16，请问 N 的所有可能值有多少个？

提示： N 为 $2011-16$ 的因数，且要大于 16。（求出其因数的个数再从中淘汰不符合的。）

答案：11 个。

例 2、分析：(1) 任意连续 9 个自然数（等差数列）的和都是 9 的倍数。

设这 9 个数的中间数为 a ，则这 9 个数为 $a-4, a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3, a+4$ ，

其和为 $9a$ 是 9 的倍数。

(2) 根据 9 的整除特性：这 9 个自然数的数字之和必为 9 的倍数。

题中共有 2009 个数， $2009 \div 9 = 223 \dots 2$ ，由 (1) 可知这串数除以 9 的余数即为最后两个数 20082009 除以 9 的余数 3，

这串数除以 9 的商即为减去 3 以后除以 9 的商，即 1234567891011...20082006 除以 9 的商，个位只能为 4

提高练习：(1) 求多位数 1234567891011...20102011 除以 9 的余数？

提示：同例题 2. $2011 \div 9 = 223 \dots 4$ ，2008200920102011 除以 9 的余数为 1

答案：1

(2) 将从 1 开始的到 103 的连续奇数依次写成一个多位数： $a=135791113...9799101103$ ，

则数 a 共有多少位？数 a 除以 9 的余数为几？

提示：(1) 一位数 5 个，两位数 45 个，三位数 2 个，则位数可求。

(2) 103 是第 52 个数，连续 9 个数的和是 9 的倍数， $52 \div 9 = 5 \dots 7$ ，补两个数

应该是整除的，但 105107 除以 9 与 5 则 a 除以 9 余 4。

答案：(1) 101 位 (2) 余 4。

(3) 一个多位数 1234567.....979899，问除以 11 的余数是多少？

提示：奇数位之和减去偶数位之和。

奇数位之和： $9 \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9+0) + 9+7+5+3+1=430$

偶数位之和： $10 \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9+0) + 8+6+4+2=470$

$430 \equiv 1 \pmod{11}$ $470 \equiv 8 \pmod{11}$ $1+11-8=4$

答案：4

例 3、分析：假设班级个数为 n 则根据题意可知这三种物品除以 n 以后的余数应该是相同的，则这三个数

关于 n 来说是同余的，即 $118 \equiv 67 \equiv 33 \pmod{n}$ ，则任意两个数的差都倍 n 整除，所以 n 为

118、67、33 中任意两数差的公因数（最大公因数的所有因数）

解答： $118-67=51$ ， $67-33=34$ ， $(51, 34)=17$ ，则 n 为 17 的所有因数，所以共有 17 个班。

提高练习：(1) 用一个数除 200 余 5，除 300 余 1，除 400 余 10，求这个数？

提示：减去余数是整除的，找减去余数以后的公因数。

答案：13。

(2) 甲乙丙丁四个旅行团分别有游客 69 人，85 人、93 人、97 人。现在要把这四个旅行团分

别进行分组，使每组有 A 名游客，以便乘车前往参观游览，已知甲乙丙三个旅行团分成

每组 A 人的若干组后，所剩的人数都相同，问丁旅行团分成每组 A 人的若干组后还剩几

人？

提示：根据甲乙丙分成 A 人一组后余数相同可求出 A 的值，则可求出丁组除以 A 的余数

答案：A=8 或 4 或 2，最后丁组剩 1 人。

(3) 若 2836、4582、5164、6522 四个自然数都被同一个自然数相除，所得余数相同且为两位数，则除数和余数的和为？

提示：余数相同可让四个数两两做差找公因数确定除数，再根据余数为两位数选出符合要求的除数。

答案：5164-4582=582, 6522-5164=1358, (1358,582)=194=2×97

除数为 2 的话，余数达不到两位数。

除数为 194 的话，2836÷194=14……120 余数为 3 位数，不符。

除数与余数的和为：97+23=120

例 4、分析：这串数除以 5 的余数是由周期性变化的，分别为：1、1、2、3、0、3、3、1、4、0、4、4、

3、2、0、…。每 5 个数出现一个 5 的倍数。

解答：2009÷5=401……4，有 401 个 5 的倍数。

提高练习：(1) 有一列数：1,3,9,25,69,189,517……，其中第一个数是 1，第二个数是 3，从第三个数

起，每个数是前两个数之和的 2 倍再加 1，那么这串数中第 2008 个数除以 6 的余数是多少？

提示：找出每个数除以 6 的余数规律即可。3 个一循环

答案：1

(2) 70 个数排成一行，除了两头的两个数以外，每个数的 3 倍都恰好等于它两边两个数的和，

这一行最左边的两个数的和为：0,1,3,8,21……，问最右边一个数除以 6 的余数是多少？

提示：找出每个数除以 6 的余数规律即可。12 个一循环

答案：4

例 5、分析：本题依据的是余数的基本性质 3，可乘性。判断 365×1234 除以 19 的余数，可先求余数在相乘。

解答： $1234 \equiv 18 \pmod{19}$ ， $365 \equiv 14 \pmod{19}$ ， $1234 \times 365 \equiv 18 \times 14 \equiv 15 \pmod{19}$

最后一包有 15 个零件。

提高练习：(1) 2007 年 4 月 15 日 (星期日) 是第 5 届小学“希望杯”全国数学邀请赛举行的 2 试的日子，那么这天以后的第 $2007+4 \times 15$ 天是星期几？

提示：基本性质的应用，可先求出余数在用余数进行运算。

答案： $2007+4 \times 15 \equiv 5+4 \times 1 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$ 所以是星期二。

(2) 算式 $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 2007$ 计算结果的末两位数字是多少？

提示：首先个位肯定是奇数，其次末两位实际上是考察的除以 4 或 25 的余数，这个乘积肯定是 25 的倍数，因为个位是奇数，所以末两位只能是 25 或 75，再看除以 4 的余数分别为 1,3,1,3,1,3，...，所以这个乘积除以 4 的余数 1。(每 4 个数乘积除以 4 的余数都为 1，共 1004 个数，所以最后乘积除以 4 的余数为 1)，25 和 75 中只有 25 是除以 4 余 1 的，所以末两位为 25。

例 6、分析：设这个两位数、三位数、四位数分别为 \overline{ab} , \overline{cde} , \overline{efgh} ，由题意得 $\overline{ab} + \overline{cde} + \overline{efgh} = 2010$ ，则

$\overline{ab} + \overline{cde} + \overline{efgh} \equiv 2010 \equiv 3 \pmod{9}$ 即各位数字之和除以 9 的余数为 3。

但 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+0 \equiv 45 \pmod{9}$ 所以肯定没有数字 6。

提高练习：一个四位数是这个数的数字和的 83 倍，求这个四位数？

提示： $\overline{abcd} = 83(a+b+c+d)$ ，且 $\overline{abcd} - (a+b+c+d) = 999a + 99b + 99c$ 是 9 的倍数，即

$\overline{abcd} - (a+b+c+d) \equiv 0 \pmod{9}$ 又因为：

$\overline{abcd} - (a+b+c+d) \equiv 83(a+b+c+d) - (a+b+c+d) \equiv 82(a+b+c+d) \equiv (a+b+c+d) \equiv 0 \pmod{9}$

则数字之和是 9 的倍数，18、27、36。

验证得到： $\overline{abcd} = 83 \times 18 = 1494$ 符合；

$\overline{abcd} = 83 \times 27 = 2241$ 但 2241 数字和不是 27，不符；

$\overline{abcd}=83\times 36=2988$ 但 2988 数字和不是 36，不符；

所以只有 1494.