

第四讲 因数与倍数（二）

因数与倍数现在对我们来说已经很熟悉了，因为现在学校课堂上已经讲解了很多，再加上去年秋季班我们也学习了因数与倍数（一）。那么今天，我们要在现有的基础上，再次提高一个程度，了解并掌握一些新的因数倍数题型及其解决办法。

本讲知识重难点

- 1、因数个数定理的反应用 (重点)例1、2
- 2、短除模型的应用 (重点)例3、4
- 3、因倍的综合运用 (难点)例5、6

一、基本知识复习

1、最大公因数与最小公倍数的求法

(1) 短除法：

求 72 和 126 的最大公因数？

则 72 与 126 的最大公因数为短除式中左边的数相乘： $(72, 126) = 2 \times 3 \times 3 = 18$

最小公倍数为边上与底下的数都乘。 $[72, 126] = 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 7 = 504$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 72 & 126 \\ 3 & 36 & 63 \\ 3 & 12 & 21 \\ & 4 & 7 \end{array}$$

(2) 分解质因数法： $72 = 2^3 \times 3^2$ ； $126 = 2 \times 3^2 \times 7$

则： $(72, 126) = 2 \times 3^2 = 18$ $[72, 126] = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$

(3) 辗转相除法：此方法主要用于求两个较大数的最大公因数。

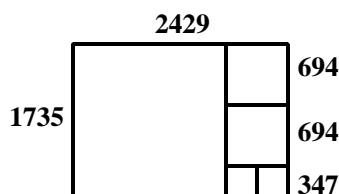
如：求 2429 和 1735 的最大公因数？

我们假设 2429 和 1735 分别是长方形的两个边长，若此长方形的长和宽都可以分解出若干个边长一样且最大的小正方形，则此正方形的边长即为长 2429 和宽 1735 的最大公因数，由图可知：

$2429 \div 1735 = 1 \cdots 694$

$1735 \div 694 = 2 \cdots 347$

$694 \div 347 = 2$



也就是说 2429 和 1735 都可以分解成边长最大为 347 的正方形。即 $(2429, 1735) = 347$

最后，我们在回顾一下求 347 的过程，始终都是用除数除以余数，除数除以余数，直到余数为 0 时的那个除数即为最大公因数，若除到最后余数为 0 时的除数为 1，则说明两数互质，即最大公因数为 1。

2、因数个数定理：先将此数分解质因数，再把每个质因数的指数（次数）加 1 相乘。

如：360 有多少个因数？ $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ；则因数个数为 $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$ 个

3、短除模型：由图可知当 a 与 b 互质时， $(A, B) = d$ ； $[A, B] = d \times a \times b$ ，

则可得到：(1) $A = d \times a$ ； $B = d \times b$ ； $A \times B = (A, B) \times [A, B]$

(2) $A+B$ ， (A, B) ， $[A, B]$ 三个量知道任意两个都可以推出其他的量。方法见例题讲解。

$$\begin{array}{r|rr} d & A & B \\ & a & b \end{array}$$

二、例题讲解

1、因数个数定理的反应用

例1、分析：首先我们先想这么一个问题：100 以内的数 A 如果只有 6 个因数，那么这个 6 是怎么来的呢？根据因数个数的求法，应该是这个数 A 分解质因数后，每个质因数的指数（次数）加 1 相乘后的结果，所以我们应该先把 6 分解成相乘的形式在还原出 A 分解质因数的形式。最后根据分解质因数的形式找到满足要求的数。

解答： $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$ （次数加 1 后是这样的，则让这些因数减 1 就是质因数的次数）

A 分解质因数的形式： $a^0 \times b^5$ 或 $a^1 \times b^2$ (a 和 b 必须是互不相同质数)

对于 $a^0 \times b^5 = b^5$ 这种形式下，100 以内的只有 2^5 这一个。

对于 $a^1 \times b^2$ 这种形式下，通过枚举可得到

$2^2 \times 3$ ； $2^2 \times 5$ ； $2^2 \times 7$ ； $2^2 \times 11$ ； $2^2 \times 13$ ； $2^2 \times 17$ ； $2^2 \times 19$ ； $2^2 \times 23$ ； 8 个

$3^2 \times 2$ ； $3^2 \times 5$ ； $3^2 \times 7$ ； $3^2 \times 11$ ； 4 个

$5^2 \times 2$ ； $5^2 \times 3$ ； 2 个

$7^2 \times 2$ ； 1 个

总个数 = $8 + 4 + 2 + 1 = 16$ 个

巩固练习：1~100 以内，恰好有 8 个约数的数有多少个？

提示： $8=1 \times 8=2 \times 4=2 \times 2 \times 2$ ，所以分解质因数的形式有 3 种。 a^7 ； $a \times b^3$ ； $a \times b \times c$

答案：10 个

例 2、分析：先根据“39 个约数”求出这个数的平方（ A^2 ）的分解质因数形式，然后可以找到这个数 A 分解质因数的形式，最后应用约数个数定理求出这个数 A 的约数个数。

解答： $39=1 \times 39=3 \times 13$

则这个数的平方 A^2 分解质因数的形式为： a^{38} 或 $a^2 \times b^{12}$

则 A 的分解质因数形式为： a^{19} 或 $a^1 \times b^6$ （原来的每个次数都除以 2）

则 A 的约数个数有（1） $19+1=20$ 个

（2） $(1+1) \times (6+1)=14$ 个

巩固练习：（1）一个数有 6 个约数，那么这个数的立方有多少个约数？

提示：根据 6 个约数先确定这个数 A 的分解质因数的形式，那么这个数的立方的分解质因数形式中需要让原来的每个次数都乘以 3 即可，则新数的约数个数可根据约数个数定理求出。

答案：16 或 28

（2）求所有能被 30 整除，恰好有 30 个不同约数的自然数。

提示：如果能被 30 整除， $30=2 \times 3 \times 5$ 则这个数 A 的质因数必同时有 2, 3, 5 且每个至少一个，将其分解质因数应为 $A=2^a \times 3^b \times 5^c \times \dots$ 但 A 又只有 30 个约数，则次数加 1 相乘后得 30，而 30 分解成不同的质数最多 3 个即 $30=2 \times 3 \times 5$ ，那么也就是说 A 中的次数 $(a+1) \times (b+1) \times (c+1)=2 \times 3 \times 5$ 。则 a, b, c 分别为 1, 2, 4。最后将 1, 2, 4 分配到 A 的质因数的次数上有 6 种情况。 $2^1 \times 3^2 \times 5^4$ ； $2^1 \times 3^4 \times 5^2$ ； $2^2 \times 3^1 \times 5^4$ ； $2^2 \times 3^4 \times 5^1$ ； $2^4 \times 3^1 \times 5^2$ ； $2^4 \times 3^2 \times 5^1$
（搭配方法相当于将 1, 2, 4 全排列）

答案：6 个。

（3）1001 的倍数中，有多少个数恰好有 1001 个约数？

提示：与练习 2 相同

答案：6 个

（4）210 的倍数中，有多少个数恰好有 210 个约数？

提示：与练习 2, 3 相似，此题是能分解成 2, 3, 5, 7 四个数，所以会将次数分配到这 4 个质因数的次数上，共有 24 中搭配方法。

答案：24 个。

（5）一个两位数有 6 个因数，且这个数最小的 3 个因数之和为 10，那么此数是几？

提示：这 3 个最小的因数中肯定有 1，则另两个和必为 9，可知第二小的为 2，第 3 小的只能是 7，说明这个数肯定是 14 的倍数，但因数中没有 3, 4, 5, 6。那么 14 的倍数中只能有 14 和 98 这两个两位数，而 14 只有 4 个因数，所以只能是 98。

答案：98

挑战练习：（6）一个正整数，它的 2 倍的约数恰好比它自己的约数多 2 个，它的 3 倍的约数恰好比它自己的约数多 3 个，那么这个数是多少？

提示：首先这个数的因子只能是 2 和 3 这两个。设 $A=2^a \times 3^b$ ，则 A 的因数个数为 $(a+1) \times (b+1)$ 。根据题意，2 倍以后变为 $2A=2^{a+1} \times 3^b$ ，则 $(a+1+1) \times (b+1)$ 比 $(a+1) \times (b+1)$ 多 2 个，说明 $b+1=2$ ， $b=1$ ，同理可推出 a 的值。

答案： $A=2^2 \times 3=12$

（7）已知 m, n 两个数都只含有质因数 3 和 5，他们的最大公约数为 75，已知 m 有 12 个约数，n 有 10 个约数，则 m+n 的只是多少？

提示： $75=3 \times 5^2$ ，设 $m=3^a \times 5^b$ ； $n=3^x \times 5^y$ 则 a, x 中较小的为 1，b, y 中较小的为 2。根据 m, n 的约数得到 $(a+1) \times (b+1)=12=3 \times 4$ 或 2×6 ； $(x+1) \times (y+1)=10=2 \times 5$ 。因为 b, y 中较小的为 2，则 $y+1 \geq 3$ ，即 $y+1=5$ ，则所有数求出。

答案： $m+n=2550$

2、短除模型的应用

基础练习：（1）两个自然数的最大公约数是 6，最小公倍数为 72，已知其中一个自然数是 18，求另一个数

提示： $A \times B = (A, B) \times [A, B]$

答案：24

（2） $(a, 24) = 4$ ； $[a, 24] = 168$ ，求 a 的值？

提示： $4 \mid \frac{a \cdot 24}{x \cdot 6}$ 则 $4 \times x \times 6 = 168$

答案：a=28

例3、 分析：此题相当于已知 (A, B) ， $[A, B]$ ，那我们该怎么求出其他的量呢？首先根据

$A \times B = (A, B) \times [A, B]$ 可得到 $(A, B) = 240 \div 60 = 4$ 。

则列出短除模型可得到： $4 \times a \times b = 60$ ， $a \times b = 15$ ，且 a 与 b 必须互质。

$$4 \mid \begin{array}{r} A \quad B \\ a \quad b \end{array}$$

则 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 15 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$ $A = 4 \times a$ ； $B = 4 \times b$ 可得出这两个数为 4 和 60；或 12 和 20

巩固练习：（1）已知 $(A, B) = 8$ ， $[A, B] = 64$ ，求 $A + B = ?$

提示：同例 3。先求出 a=1 和 b=8。

答案：72。

（2）两个自然数的最大公约数是 7，最小公倍数是 210，且两个自然数的和是 77，求这两个数？

提示：同例 3。先求出 a 和 b 的所有选择，最后留下满足要求的一组。

答案：35 和 42。

（3）如果两个合数互质，它们的最小公倍数是 126，求这两个数的和是多少？

提示：两数互质则它们的最小公倍数就是这两个数的乘积。则将 126 分解质因数找出满足要求的两个合数。

答案：9+14=23

（4）已知 $(A, B) = 13$ ， $[A, B] = 78$ ，求 $A - B = ?$

提示：同例 3。先求出 a 和 b。

答案：65 或 13。

例4、 分析此题相当于已知 $A + B$ 和 (A, B) 求其他的量。同样根据短除模型得到： $A = 36 \times a$ ， $B = 36 \times b$

则 $A + B = 36 \times a + 36 \times b = 36 \times (a + b) = 432$ ，即 $a + b = 432 \div 36 = 12$ ，且 a 与 b 必须互质，则得到 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 11 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases}$ ，那么根据 $A = 36 \times a$ ， $B = 36 \times b$ 可求出 A、B 两数。

答案：36 和 396，或 180 和 252。

巩固练习：（1）两个自然数的和是 50，它们的最大公因数是 5，是求这两个数的差？

提示：根据短除模型得到 $A + B = 5 \times a + 5 \times b = 5 \times (a + b) = 50$ ，即 $a + b = 50 \div 5 = 10$ 且 a 与 b 必须互质，可求出 a 和 b。

答案： $A - B = 40$ 或 20

（2）已知 $A + B = 45$ ， $[A, B] = 168$ ，求 a, b 的值？

$$d \mid \begin{array}{r} A \quad B \\ a \quad b \end{array}$$

提示：此题是已知了 $A + B$ ， $[A, B]$ 求其他的量。设最大公因数为 d，仍然是通过短除模型得 $\begin{cases} d \times (a + b) = 45 \\ d \times a \times b = 168 \end{cases}$

即 $\begin{cases} a + b = \frac{45}{d} \\ a \times b = \frac{168}{d} \end{cases}$ 则 d 是 45 和 168 的因数。即 d 是 $(45, 168) = 3$ 的因数。所以 d 为 1 或 3。

（1）d=1 时 $\begin{cases} a + b = 45 \\ a \times b = 168 \end{cases}$ （将 168 分解质因数找出两数和为 45 的情况）无解

（2）d=3 时 $\begin{cases} a + b = 15 \\ a \times b = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 21 \\ B = 24 \end{cases}$

(3) 已知 $A+B=60$, $(A, B)+[A, B]=84$, 求 A, B 的值?

提示: 根据短除模型列出方程 $\begin{cases} d \times (a+b) = 60 \\ d + d \times a \times b = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = \frac{60}{d} \\ 1+a \times b = \frac{84}{d} \end{cases}$ 则 d 是 $(60, 84)=12$ 的因数:

1, 2, 3, 4, 6, 12. 一一验证即可得出。

答案: $d=12 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=24 \\ B=36 \end{cases}$

(4) 已知甲乙两数的和加上它们的最大公约数恰好等于它们的最小公倍数, 求它们的最小公倍数除以它们的最大公约数所得的商是几?

提示: 通过通过模型列出方程: $A+B+d=d \times a \times b \Rightarrow d(a+b)+d=d \times a \times b \Rightarrow a+b+1=a \times b$ 不难试出 $a=2, b=3$, 则 A, B 可求。

答案: $[A, B] \div (A, B) = d \times a \times b \div d = 6$

(5) 已知两个自然数的和为 54, 它们的最小公倍数与最大公约数的差为 114, 求这两个数?

提示: 通过通过模型列出方程: $\begin{cases} d \times (a+b) = 54 \\ d \times a \times b - d = 114 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = \frac{54}{d} \\ a \times b - 1 = \frac{114}{d} \end{cases}$ 求出 a, b 即可。

答案: 24 和 30

3、综合运用

例 5、分析: 假设 $A>B$. 因为 $[A, B]=72=2^3 \times 3^2$, 说明 (1) A, B 是 72 的因数; (2) A, B 分解质因数的因子只能是 2 或 3, 且次数最高分别为 2 的 3 次方, 3 的 2 次方。72 共有 12 个因数: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

当 $A=72$ 时, B 有 11 种可能都行。

当 $A=36$ 时, $36=2^2 \times 3^2$, 则 B 中的质因数 2 必须是 3 次方的 (8 的倍数) 才能保证 $[A, B]=72$ 所以 $B=8, 24$. 2 种可能。

当 $A=24$ 时, $24=2^3 \times 3$, 则 B 中的质因数 3 必须是 2 次方的 (9 的倍数) 才能保证 $[A, B]=72$ 所以 $B=9, 36$. 2 种可能。

当 $A=18$ 时, $18=2 \times 3^2$, 则 B 中的质因数 2 必须是 3 次方的 (8 的倍数) 才能保证 $[A, B]=72$ 所以 $B=8$, 1 种可能。

当 $A=12$ 时, $12=2^2 \times 3$, 则 B 中的质因数 2 必须是 3 次方的 (8 的倍数) 且质因数 3 必须是 2 次方的 (9 的倍数) 才能保证 $[A, B]=72$, 但这种情况下 $A<B$. 所以无解

当 $A=9$ 时, $9=3^2$, 则 B 中的质因数 2 必须是 3 次方的 (8 的倍数) 才能保证 $[A, B]=72$ 所以 $B=8$, 1 种可能。

共有 $11+2+2+1+1=17$ 种可能。

例 6、分析: 两个数的公倍数必然是这两个数的倍数, 那么公倍数中若没有哪个因子, 则这两个数中肯定也没有这个因子。依据这一点我们将 90, 105, 126 分解质因数发现: $90=2 \times 3^2 \times 5$; $105=3 \times 5 \times 7$; $126=2 \times 3^2 \times 7$ 。

甲乙中只能含有质因数 2, 3, 5 且 2, 3^2 , 5 在甲乙中至少出现一次。同理因数 3, 5, 7 在乙丙中至少出现一次; 2, 3^2 , 7 在甲丙中至少出现一次。

(1) 在甲丙的公倍数 126 中没有因数 5, 说明在 $[甲, 乙]=90$ 中甲没有 5;

(2) $[甲, 乙]=90$ 和 $[甲, 丙]=126$ 中都有 $2 \times 3^2 = 18$, 但 $[乙, 丙]=105$ 中没有 18, 说明乙丙的因数中没有 18, 则 18 必为甲的因数。

那么在 $[甲, 乙]=90$ 中甲没有因数 5, 有 $2 \times 3^2 = 18$ 则甲=18.