

## 第十三讲 余数问题

余数问题我们已经学过了两讲，但那两讲主要都是应用余数性质去解决除法中的除数问题，今天我们要解决的是除法中的被除数问题——“中国剩余定理”。

本类形题的出题特点：已知两种或三种除数和余数的情况，求同时满足这些情况的被除数是多少。

例如：一个自然数除以 4 余 3，除以 9 余 4，除以 6 余 1，  
求满足条件的最小三位数？

本类形题的解题方法：根据余数的基本含义有：公倍加余法和公倍减余法。

根据同余的性质有：逐级满足法。

### 一、公倍加余法

例：求满足除以 3 余 1，除以 4 余 1 的最小两位数？

分析：根据余数的定义我们知道，余数表示被除数除以除数时没有除尽，还多出来的一些数，所以满足除以 3 余 1 的数，应该都是 3 的倍数再加上 1 即可；同理，满足除以 4 余 1 的数，应该都是 4 的倍数再加上 1 即可。那么如想两个都满足，我们只需要找到 3,4 的最小公倍数再加上这个都有的余数 1 就可以了，所以最小的两位数即为  $[3,4]+1=12+1=13$

### 二、公倍减余法

例：求满足除以 3 余 2，除以 4 余 3 的最小两位数？

分析：根据余数的定义我们知道，这个数除以 3 余 2，说明还差 1 个数就又是 3 的倍数了，则这样的数应该都是 3 的倍数再减 1 即可；同理，满足除以 4 余 3 的数，也是还差 1 个就又是 4 的倍数了，则这样的数应该都是 4 的倍数再减 1 即可。那么如想两个都满足，我们只需要找到 3,4 的最小公倍数再减去 1 就可以了。

所以最小的两位数即为  $[3,4]-1=12-1=11$

### 三、逐级满足法

例：求满足除以 7 余 2，除以 4 余 1，除以 11 余 4 的最小自然数？

分析：此题没有余数相同的，也没有差相同的，则上述两种方法均不可用。那么我们可以根据同余的性质逐级满足，最后求出同时满足三种情况的最小自然数。

过程如下：

（1）满足除以 7 余 2 的数应该是  $7a+2$  这样的数，但这样的数又要除以 4 余 1。

说明： $7a+2$  除以 4 是余 1 的，即： $7a+2 \equiv 1 \pmod{4}$

$$7a+2 \equiv 5 \pmod{4}$$

$$7a \equiv 5-2 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$3a \equiv 3 \pmod{4}$$

$$a \equiv 1$$

则满足前两种情况（除以 7 余 2，除以 4 余 1）的最小数为： $7 \times 1 + 2 = 9$

则满足前两种情况（除以 7 余 2，除以 4 余 1）的所有数为： $[7, 4] \times b + 9$

（2）那么满足除以 7 余 2，除以 4 余 1 应该是  $28b+9$  这样的数，但这样的数又要除以 11 余 4。

说明： $28b+9$  除以 11 是余 4 的，即： $28b+9 \equiv 4 \pmod{11}$

$$6b+9 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$6b \equiv 15-9 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$b \equiv 1$$

则满足三种情况（除以 7 余 2，除以 4 余 1，除以 11 余 4）的最小数为：

$$28 \times 1 + 9 = 37$$

## 例题讲解：

### 1、公倍加余法

例 1、分析：此题并不是最基本的应用最小公倍数再加上余数即可的余数问题，因为除以 3 和 4 的余数分别为 2 和 1，余数不同，但为什么还属于公倍加余法呢？是这样的。除以 3 余 2 的数难道只有 2 吗？不一定，还有 5、8、11…，同样除以 4 余 1 的数除 1 以外还有 5、9、13…。我们发现两组数中都有 5，即原题我们可以认为：“除以 3 余 5，除以 4 余 5 的数”。

则这个数最小就是 5 本身，则除以 12 以后余数还为 5。

提高练习：（1）一个自然数除以 49 余 23，除以 48 也余 23，那么这个自然数被 14 除余几？

提示：这个被除数即为 23。

答案：余数为 9。

（2）1~2009 之间同时被 3, 5, 7 除都余 2 的数有几个？

提示： $[3, 5, 7]=105$  的若干倍再加上 2。但不要忽略了余数 2 本身。

答案：20 个。

（3）一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，那么这个数除以 15 的余数是多少？

提示： $3 \times 2 + 2 = 5 + 3 = 8$ ，则可认为：除以 3 余 8，除以 5 余 8

答案：8

（4）一个教练数田径队的学生，每 4 个一数，最后剩下 2 人；每 5 个一数，最后剩下 1 人，田径队女生比男生多，女生有 15 人，男生有多少人？

提示： $4 + 2 = 5 + 1 = 6$ ，则可认为：除以 4 余 6，除以 5 余 6

答案：11 人。

（5）有一个三位数，其中个位上的数是百位上的数的 3 倍，且这个三位数除以 5 余 4，除以 11 余 3，则这个三位数是多少？

提示： $5 \times 2 + 4 = 11 + 3 = 14$ ， $[5, 11] \times a + 14 = 55a + 14$ 。从而判断出个位只能为 4 或 9。个位为 4 百位无数，个位为 9 百位为 3。则次数可求。

答案：399

### 2、公倍减余法

例 2、分析： $\begin{cases} 11 - 8 = 3 \\ 13 - 10 = 3 \end{cases}$  两个都是还差 3 个数就整除的了，则同时满足“除以 11 余 8，除以 13 余 10”的最小自然数为  $[11, 13] - 3 = 143 - 3 = 140$ 。

又因为  $140 < 200$ 。则所求答案即为 140。

提高练习：（1）顺次写出除以 4 余 2，除以 5 余 3 的三个数？

提示：都差 2 个就整除了。 $[4, 5]$  的若干倍在减 2 即可。

答案：18, 38, 58。

### 3、逐级满足法

热身练习：一个自然数除以 19 余 9，除以 23 余 7，那么这个自然数最小是几？

分析：满足“除以 23 余 7”的数应为： $23a + 7$  的形式，但这个数还要满足“除以 19 余 9”，则说明  $23a + 7$  除以 19 余 9，

即： $23a + 7 \equiv 9 \pmod{19}$ ， $4a + 7 \equiv 9 \pmod{19}$ ， $4a \equiv 2 \pmod{19}$   $a = 10$

则满足条件的最小自然数为  $23 \times 10 + 7 = 237$

例 3、分析：能被 3 和 5 除余 1 的数应为： $15a + 1$  的形式，这个数还要被 7 整除。

即： $15a + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ ， $a + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ ， $a \equiv 6 \pmod{7}$ ， $a = 6$

则 1~100 以内满足要求的数为： $15 \times 6 + 1 = 91$ 。

提高练习：（1）一个自然数既能被 3 又能被 5 整除，同时它被 7 除余数是 4，试求满足条件的最小自然数？

提示： $15a \equiv 4 \pmod{7}$

答案：60。

（2）某数除以 11 余 8，除以 13 余 10，除以 17 余 12，那么满足条件的最小自然数是多少？

提示：可先用公倍减余法求出满足“除以 11 余 8，除以 13 余 10”的数为： $[11, 13] \times a - 3 = 143a - 3$   
在满足“除以 17 余 12”的数。 $143a - 3 \equiv 12 \pmod{17}$ ,  $7a - 3 \equiv 12 \pmod{17}$ ,  $7a \equiv 15 \pmod{17}$

答案： $a=7$ 。所求数位  $143 \times 7 - 3 = 998$ 。

例 4、分析： $3 \times 2 + 1 = 5 + 2 = 7$ ，则可用公倍加余法先求出满足“除以 3 余 1，除以 5 余 2”数为： $15a + 7$ 。

在满足除以 7 余 3 的数，即为： $15a + 7 \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $a + 0 \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $a = 3$

则同时满足三个条件的最小数为： $15 \times 3 + 7 = 52$ 。

但要求是 1000~1200 之间的，则应为 $[3, 5, 7]$ 的若干倍在加上 52 即可。

最后答案为： $105 \times 10 + 52 = 1102$

提高练习：（1）一个自然数被 4 除余 3，被 9 除余 4，被 6 除余 1，求符合条件的最小三位数？

提示：公倍减余法先求满足“被 9 除余 4，被 6 除余 1”： $54a - 5$ 。在满足“被 4 除余 3”

$54a - 5 \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $a = 2$

答案：103

（2）“例 5”题略

提示：公倍加余法先求出“除以 3 余 1，除以 7 余 1”的数为： $21a + 1$ 。

再满足第三个条件“除以 5 余 2”： $21a + 1 \equiv 2 \pmod{5}$ ,  $a = 1$ 。则最小值为  $21 \times 1 + 1 = 22$

该年级一百多人，则 $[3, 5, 7]$ 的若干倍再加上 22 即可。

答案：127 人。

（3）布袋里装有玻璃弹子若干个，如果每次取 2 个，最后剩下 1 个；如果每次取 3 个，最后剩下 1 个；如果每次取 7 个，最后剩下 3 个，这个布袋中至少有多少个玻璃弹子？

提示：先用公倍加余法求出满足“除以 2 余 1，除以 3 余 1”： $6a + 1$ 。

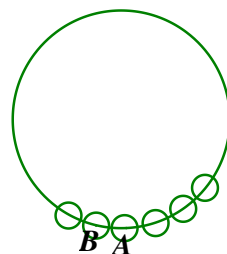
在满足“除以 7 余 3”： $6a + 1 \equiv 3 \pmod{7}$

答案：31

（4）在一个圆圈上有几十个孔（不到 100 个），小明像玩跳棋那样，从 A 孔出发沿着逆时针方向，每隔几孔跳一步，希望一圈以后能跳回到 A 孔。他先试着每隔 2 孔跳一步，结过只能跳到 B 孔，他又试着每隔 4 孔跳一步，结果也只能跳到 B 孔，最后他每隔 6 孔跳一步，正好跳回 A 孔，你知道这个圈上共有多少个孔吗？

提示：除以 3 余 1，除以 5 余 1，除以 7 余 0。

答案：91 个孔



例 6、分析：此题需要满足多个条件，仍按逐级满足法即可。先用公倍加余法满足

“除以 2 余 1，除以 4 余 1，除以 5 余 1”的数： $20a + 1$ 。在满足“除以 3 余 2”的数  
 $20a + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $a = 2$ 。

则最小数为： $20 \times 2 + 1 = 41$ 。

提高练习：（1）大科学家爱因斯坦曾经做过这样一道数学题：在你前面有一条长长地阶梯，如果你每步跨 2 级，最后剩下 1 级；如果你每步跨 3 级，最后剩下 2 级；如果你每步跨 5 级，最后剩下 4 级；如果你每步跨 6 级，最后剩下 5 级；只有当你每步跨 7 级时，最后正好走完，1 级不剩，这条阶梯最少有多少级？

提示：“除以 2 余 1；除以 3 余 2；除以 5 余 4；除以 6 余 5；除以 7 余 0；”公倍减余法先求出  
满足前 4 个的自然数条件： $[2, 3, 5, 6] \times a - 1 = 30a - 1$ ，在满足最后一个： $30a - 1 \equiv 0 \pmod{7}$

答案：119 级。