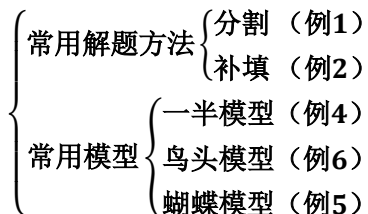


第六讲 复合图形的分拆

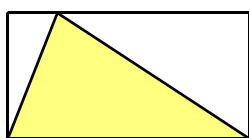
继上一讲行程模块以后本讲将迎来我们奥数学习的又一大模块几何模块。本讲主要是重点介绍近几年杯赛几何考点中常用到的一些方法和模型，这些方法我相信各位学员的奥数老师应该也都讲解过一些，所以从某种意义上来说，本讲知识还是比较简单的，希望各学员课下加强联系以进一步强化巩固这些几何中比较重要的知识点。

本讲知识构架图：

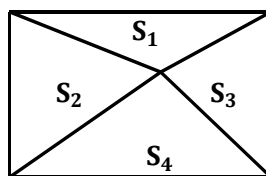


一、模型复习：

1、一半模型：

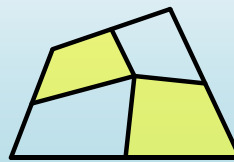
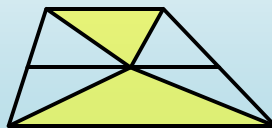
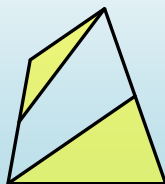
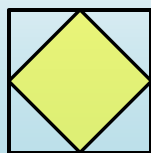
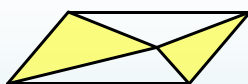
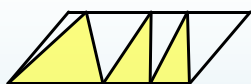
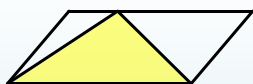


$$S_{\text{黄色}} = S_{\text{长方形}} \div 2$$



$$S_1 + S_4 = S_2 + S_3 = \frac{1}{2} S_{\text{长方形}}$$

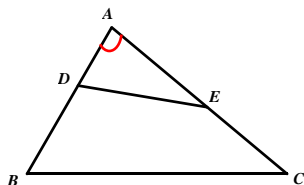
常用一半模型



2、鸟头模型：(1) 两个三角形中有一个角相等或互补，这两个三角形叫做共角三角形。

(2) 两共角三角形的面积比等于对应角（相等或互补角）两夹边的乘积比。

下面 3 图为鸟头模型的常用模型

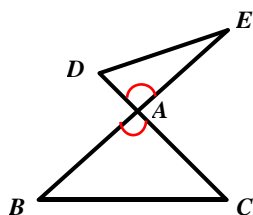


$\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 都有顶角 $\angle A$ ，所以这两个三角形为共角三角形。

$\triangle AED$ 中夹 $\angle A$ 的两个边为 AD 和 AE ； $\triangle ABC$ 中夹 $\angle A$ 的两个边为 AB 和 AC ，

则我们可以得到两三角形的面积比为：

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC}$$

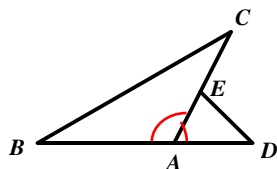


$\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC = \angle DAE$ ，所以这两个三角形为共角三角形。

$\triangle AED$ 中夹 $\angle DAE$ 的两个边为 AD 和 AE ； $\triangle ABC$ 中夹 $\angle BAC$ 的两个边为 AB 和 AC ，

则我们可以得到两三角形的面积比为：

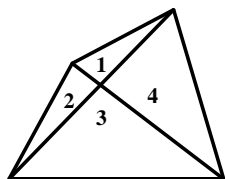
$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC}$$



$\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC + \angle DAE = 180^\circ$ (互补), 所以这两个三角形为共角三角形。
 $\triangle AED$ 中夹 $\angle DAE$ 的两个边为 AD 和 AE ; $\triangle ABC$ 中夹 $\angle BAC$ 的两个边为 AB 和 AC ,

则我们可以得到两三角形的面积比为: $\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC}$

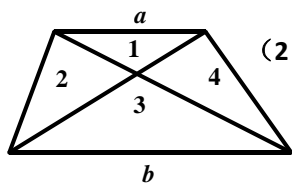
3、蝴蝶模型



(1) 任意四边形蝴蝶模型: 任意四边形对角线相连, 将四边形分成了 4 个三角形。

则这 4 个三角形满足下列关系: a、 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$

b、 $S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$



(2) 梯形蝴蝶模型: 除满足以上关系以外, 若知道上底与下底的比, 我们可以得到这 4 个三角形面积的连比。

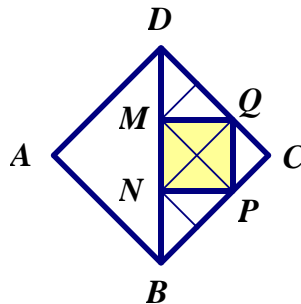
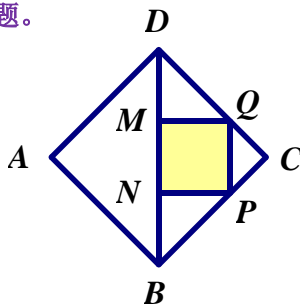
$S_1 : S_3 : S_2 : S_4 = a^2 : ab : b^2 : ab$

4、燕尾模型: 参照秋季班电子讲义第十讲内容。 <http://bbs.eduu.com/thread-445527-1-1.html>

二、例题讲解

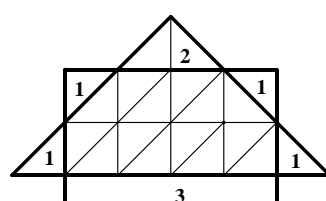
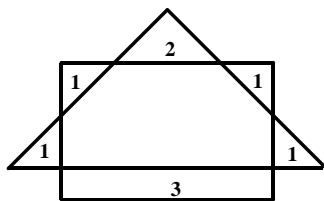
1、分割法的应用

例 1、分析: 在正方形里求阴影面积通常是将正方形分隔成等腰直角三角形, 看看阴影占几个小等腰三角形从而解决问题。



$\triangle BCD$ 的面积是正方形的一半 9cm^2 , 将其分成 9 个相同的小等腰直角三角形, 则阴影正方形占其中的 4 个, 所以阴影面积为: $9 \div 9 \times 4 = 4\text{cm}^2$

提高练习: (1) 一个长方形和一个等腰直角三角形如图所示, 图中六块面积分别为 1, 1, 1, 1, 2, 3。大长方形的面积是多少?



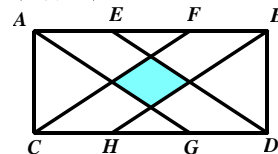
提示: 将三角形分割成若干小的等腰直角三角形, 且都是面积为 1 的。则长方形面积可求。

答案: 19。

(2) 在长方形 ABCD 中 $AE=EF=FB=DG=GH=HC$, 阴影部分的面积占长方形 ABCD 面积的几分之几?

提示: 分割成阴影一样的小菱形。

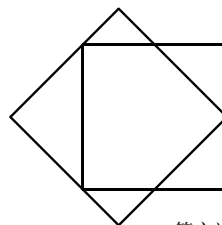
答案: $\frac{1}{12}$



(3) 两个正方形如图放置, 图中的每个三角形都是等腰直角三角形, 若其中较小正方形的边长为 12cm , 那么大正方形的面积是多少?

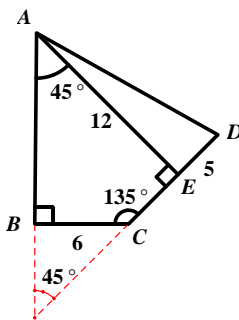
提示: 分割成若干小等腰直角三角形

答案: 162



2、补填法

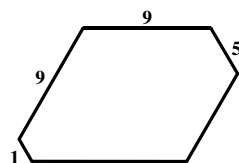
例2、分析：此题出现好多直角，且有两个边长为5,12，所以我们很容易想到勾股定理，但求出的AD边对于四边形面积并没有什么用处，所以此路不通。
还有一个 135° ，那我们也应该想到它的补角为 45° ，那么我们只要把下面的角给它补上，就会出现两个等腰直角三角形 ($\triangle BFC$ 和 $\triangle AEF$) 且 $\triangle BFC$ 面积和边EF可求，那么四边形面积只需要用 $\triangle AFD - \triangle FBC$ 。如图所示



提高练习：(1) 一个六边形的6个角都是 120° ，其连续四边的长依次是1厘米，9厘米，9厘米，5厘米，求这个六边形的周长？

提示： 120° 的补角是 60° ，所以若有两个相等边的话会有等边三角形出现，则会解决很多边长问题。

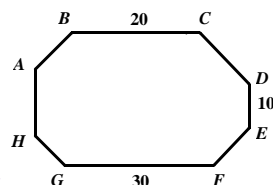
答案：42 厘米。



(2) 八边形的8个内角都是 135° ，已知 $AB=EF, BC=20, DE=10, FG=30$ 求 AH 的长度？

提示：与上题原理相似，将角上补全即可。

答案：20。

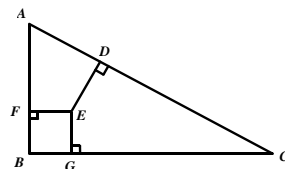


例3、分析：因为图中有好多直角，且大直角三角形ABC的面积可求，则我们可以连接EA,EB,EC，因为 $\triangle AEC$ 和 $\triangle EBC$ 和 $\triangle ABE$ 的底都给出。而 $\triangle AEC$ 的高为95厘米， $\triangle EBC$ 和 $\triangle ABE$ 的高都为正方形的边长，则根据3个三角形的总面积为 $\triangle ABC$ 的面积列出方程，求出正方形的边长。

解答：如图：设正方形边长 $FE=EG=x$ 则根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BCE}$ 列出方程

$$24 \times 18 \div 2 = (30 \times 9.5 + 18x + 24x) \div 2$$

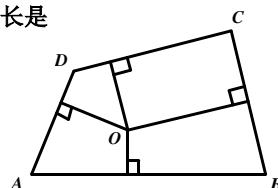
$$\text{解得 } x = 3.5,$$



提高练习：(1) 四边形ABCD内有一点O，O点到四条边的垂线都是4厘米，四边形的周长是36厘米，四边形的面积是多少平方厘米？

提示：连接OA,OB,OC,OD,四边形分成4个三角形的总和即可

答案：72



3、一半模型的应用

例4、分析：题中让我们求长方形EFGH的面积，根据常规的方法，应该是找出该长方形的长和宽，但我们发现长和宽好像是不太好找。

另辟蹊径，如图所示：

我们如果连接ED,DF，就会发现 $\triangle EDF$ 正好是长方形的一半（一半模型），只要求出 $\triangle EDF$ 的面积即可。在正方形ABCD中，边长为6， $AE=1.5$ ， $CF=2$ ，则 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFD$ 和 $\triangle BEF$ 的面积可求，则 $\triangle EDF$ 的面积可求，此题可解。

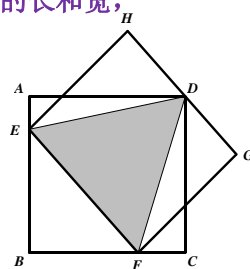
$$\text{解答： } S_{\triangle AED} = 1.5 \times 6 \div 2 = 4.5$$

$$S_{\triangle BEF} = 4.5 \times 4 \div 2 = 9$$

$$S_{\triangle CFD} = 2 \times 6 \div 2 = 6$$

$$S_{\triangle FED} = 6 \times 6 - 4.5 - 9 - 6 = 16.5$$

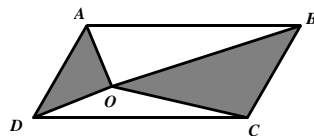
$$S_{\text{长方形EFGH}} = 16.5 \times 2 = 33$$



提高练习：(1) 如图，平行四边形ABCD的面积36， $\triangle AOD$ 的面积为8， $\triangle BOC$ 的面积为多少？

提示：一半模型

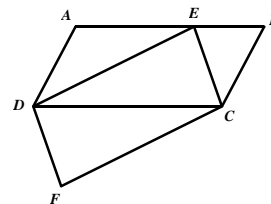
答案：10



- (2) 如图, $\triangle BEC$ 的面积等于 20 平方厘米, E 是 AB 边上靠近 B 点的四等分点, $\triangle AED$ 的面积是多少平方厘米?
 平行四边形 DECF 的面积是多少平方厘米?

提示: “E 是 AB 边上靠近 B 点的四等分点” 则三角形 AED 的面积可求,
 且这两个三角形的面积也是一半模型。

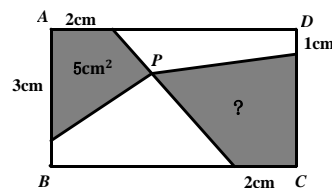
答案: 60, 160.



- (3) 如图, 有一个长 6cm 宽 4cm 的长方形 ABCD, 在各边上取点 E, F, G, H, 再连接 H, F, 并在其上取点 P, 与点 E, G, 相连, 当四边形 AEPH 的面积是 5cm^2 时, 求四边形 PFCG 的面积?

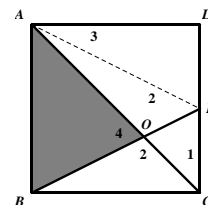
提示: 连接 HE, HG, FG, FE, 则平行四边形 EFGH 里三角形 PHE 和三角形 PFG 满足一半模型。
 求出平行四边形 EFGH 的面积, 三角形 PFG 的面积也就求出, 则四边形 CFPG 也就求出。

答案: 8



例 5、分析, 在长方形 (正方形) 中出现交叉线, 很明显可以构造四边形的蝴蝶模型, 甚至是梯形中的蝴蝶模型。如图连接 AE, 则根据梯形蝴蝶, 模型可得,
 $CE:AB=1:2$, 则 $S_{\triangle CEO}:S_{\triangle AEO}:S_{\triangle ABO}:S_{\triangle CBO}=1:2:4:2$,
 且 $S_{\triangle AED}$ 与 $S_{\triangle AEC}$ 是相同的,
 则阴影面积可求。

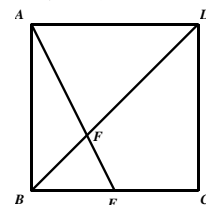
答案: 48 平方厘米



- 提高练习: (1) 在正方形 ABCD 中, E 是 BC 的中点, AE 与 BD 相交于点 F, 三角形 BEF 的面积为 1 平方厘米, 那么正方形 ABCD 的面积是多少平方厘米?

提示: 同例 5, 连接 DE 构造梯形蝴蝶模型

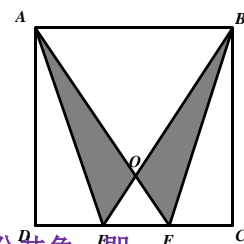
答案: 12 平方厘米。



- (2) 面积为 12 平方厘米的正方形 ABCD 中, E, F 是 DC 边上的三等分点, 求阴影面积?

提示: 仍然是构造梯形蝴蝶模型, 找出阴影所占份数比即可。

答案: 3 平方厘米。



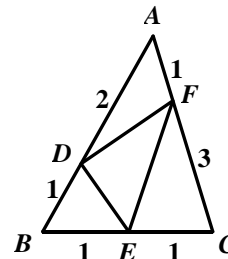
例 6、分析: 此题是典型的鸟头模型, 因为图中 $\triangle AFD$, $\triangle BED$, $\triangle CEF$ 都和大 $\triangle ABC$ 有公共角, 即鸟头模型中的第一类图, 则这三个三角形的面积占大 $\triangle ABC$ 的面积份数可求出, 那么 $\triangle DEF$ 的也可求出, 最后就能得到大 $\triangle ABC$ 的面积。

$$\text{解答: 在 } \triangle ABC \text{ 和 } \triangle AFD \text{ 中, } \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AF \times AD}{AB \times AC} = \frac{1 \times 2}{3 \times 4} = \frac{1}{6}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 和 } \triangle AFD \text{ 中, } \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD \times BE}{AB \times BC} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 和 } \triangle AFD \text{ 中, } \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CE \times CF}{BC \times AC} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

$$\text{则 } \triangle DEF \text{ 的份数为 } 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{3}{8} = \frac{7}{24}, \text{ 则 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } 7 \div \frac{7}{24} = 24$$



提高练习：（1）如图，已知三角形 ABC 的面积为 1，延长 AB 到 D，使 $BD=AB$ ；延长 BC 至 E，使 $CE=2BC$ ；延长 CA 至 F，使 $AF=3AC$ ，求三角形 DEF 的面积？

提示：此题与例 6 相似，但属于鸟头模型的第三类图。

答案：18

