

第九讲 比较与估算

之前我们已经学习了分数的基本运算及一些较简单的速算与巧算，今天我们将进一步的研究分数与小数之间的大小关系，也就是如何比较其大小。在这里我们会学到一些学校课本以外的一些非常巧妙地分数比较方法，希望各学员学完后能够将强巩固练习，以达到熟练掌握的地步。

一、几种常用的比较大小的方法。

- 1、小数的大小比较方法：在小数点后面多写几位，使它们位数对其再比较大小。（有限小数可以在小数点后面补0，循环小数可多写几位。）例1..
- 2、分数的大小比较方法：
 - (1) 通分：分子容易找出最小公倍数的通分分子，则分母大的分数值反而小；分母容易找出最小公倍数的通分分母，则分子大的分数值就大。
 - (2) 比较倒数：倒数大的分数值反而小；倒数小的分数值反而大；
 - (3) 与1做差法：对于真分数而言，与1差距越大的，分数值就越小。对于假分数而言，与1差距越大的，分数值就越大。
 - (4) 交叉相乘法：若 $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$ 则 $bc > ad$ 。注：按分子的方向去乘。
 - (5) “糖水”法：①对于两个真分数，如果分子的差和分母的差相同，则分子和分母都大的分数比较大，即 $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$ 。
“b相当于糖，a相当于糖水，则当往糖水里再加糖时，糖水肯定越来越甜，即“子和分母都大的分数比较大”。
 - ②对于两个假分数，如果分子的差和分母的差相同，则分子和分母都大的分数比较小，即 $\frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m}$ 。
 - (6) 放缩法。

二、例题讲解。

例1、分析：此题为小数的比较大小，我们只需要让小数多写几位，位数对其，不足补0即可比较出大小关系。

解答：(1) 小数点后写出5位即可。

(2) 方法同第1小题如下所示

$$1.\dot{1}2\dot{1}=1.12112\cdots$$

$$0.123=0.123000$$

$$1.121=1.12100$$

$$0.12\dot{3}=0.123232\cdots$$

$$1.\dot{1}2=1.12121\cdots$$

$$0.12\dot{3}=0.123333\cdots$$

$$1.12121=1.12121$$

$$0.\dot{1}2\dot{3}=0.123123\cdots$$

$$1.12=1.12000$$

则不难发现 $1.\dot{1}2$ 是最大的数。

则： $0.123 < 0.\dot{1}2\dot{3} < 0.12\dot{3} < 0.123$

(3) 将分数化成小数再比较大小

$$\frac{3}{7}=0.42857\dot{1}$$

$$\frac{5}{3}=1.66666\cdots$$

$$\text{则： } 0.4\dot{2} < \frac{3}{7} < 1 < \frac{5}{3} < 1.667$$

提高练习：(1) 把 3.14、3.14、3.14、3.141、3.141 从小到大排列。

答案略

(2) 将 $\frac{131}{250}$ 、 $\frac{21}{40}$ 、0.523、0.523、0.52 从小到大排列，第三个数是多少？

答案：0.523

(3) 给下列不等式中的循环小数添加循环点：0.2012>0.2012>0.2012>0.2012

答案：0.2012>0.2012>0.2012>0.2012

(4) 在小数 1.80524102007 上加两个循环点，能得到的最小的循环小数是

提示：第一个循环点肯定要点在 0 的后面，且 0 后面还要是最小的数才可。

答案：1.80524102007

例 2、分析：此题是分数的比较大小，如果用常规的方法通分分母的话，我们会发现分母有好多的质数，所以公分母会很大，因此计算量也很大。但是我们发现分子还是比较好通分的，则我们可以通分分子，再根据分母的大小来确定分数大小即可。

解答： $\frac{10}{17} = \frac{60}{102}$ ， $\frac{12}{19} = \frac{60}{95}$ ， $\frac{15}{23} = \frac{60}{92}$ ， $\frac{20}{33} = \frac{60}{99}$ ，

则 $\frac{60}{102} < \frac{60}{99} < \frac{60}{95} < \frac{60}{92} < \frac{60}{91}$ ，即 $\frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{12}{19} < \frac{15}{23} < \frac{60}{91}$

提高练习：(1) 把下列各数按照从小到大的顺序排列： $\frac{3}{7}$ 、 $\frac{5}{13}$ 、 $\frac{9}{16}$ 、 $\frac{15}{28}$ ？

答案略

例 3、分析：(1) 法 1：与 1 做差法。

我们发现 a, b 为假分数，c, d 为真分数，则 a, b 肯定大于 c, d。而且每个分数都和 1 比较接近，则可以让每一个分数与 1 做差，则假分数与 1 的差越大的分数越大；真分数与 1 的差越大的分数越小

$$a-1=\frac{101}{100}-1=\frac{1}{100}, \quad b-1=\frac{102}{101}-1=\frac{1}{101}, \quad a>b;$$

$$1-c=1-\frac{101}{102}=\frac{1}{102}, \quad 1-d=1-\frac{102}{103}=\frac{1}{103}, \quad c<d;$$

则 $c<d<b<a$ ，最小的是 c。最大的是 a

法 2：“糖水”法。

此题的分子与分母的差都是 1 则可以应用糖水的方法比较其大小。

对于假分数 a 和 b，分子分母都大的分数反而小，则 $a>b$ ；

对于真分数 c 和 d，分子分母都大的分数反而大，则 $d>c$ ；

则 $c<d<b<a$ ，最小的是 c。最大的是 a

(2) 我们可以先根据重叠数的特性将分数化简，之后我们会发现所比较的数与第 1 小问是相同的，同样可一应用“与 1 做差法”和“糖水法”去比较。

$$\frac{19981998}{19991999} = \frac{1998 \times 10001}{1999 \times 10001} = \frac{1998}{1999},$$

$$\frac{19991999}{20002000} = \frac{1999 \times 10001}{2000 \times 10001} = \frac{1999}{2000},$$

$$\frac{20002000}{20012001} = \frac{2000 \times 10001}{2001 \times 10001} = \frac{2000}{2001},$$

$$\frac{1998}{1999} < \frac{1999}{2000} < \frac{2000}{2001}, \quad \text{即} \quad \frac{19981998}{19991999} < \frac{19991999}{20002000} < \frac{20002000}{20012001}.$$

提高练习：(1) 如果 $a = \frac{2005}{2006}$, $b = \frac{2006}{2007}$, 那么 a, b 中较大的数是多少？

提示：多种方法都可以。倒数法，与 1 做差法，糖水法，交叉相乘法。

答案：b 较大。

(2) 在 $\frac{\overbrace{2008 \cdots 2008}^{2011 \text{个} 2008}}{\overbrace{2009 \cdots 2009}^{2011 \text{个} 2009}}$, $\frac{\overbrace{2009 \cdots 2009}^{2011 \text{个} 2009}}{\overbrace{2010 \cdots 2010}^{2011 \text{个} 2010}}$, $\frac{\overbrace{2010 \cdots 2010}^{2011 \text{个} 2010}}{\overbrace{2011 \cdots 2011}^{2011 \text{个} 2011}}$ 中，最小的是哪一个？

提示：应用重叠数的特性将分数化简再用倒数法，与 1 做差法，糖水法都可。

答案： $\frac{\overbrace{2008 \cdots 2008}^{2011 \text{个} 2008}}{\overbrace{2009 \cdots 2009}^{2011 \text{个} 2009}}$

(3) 若 $a = \frac{2005 \times 2006}{2007 \times 2008}$, $b = \frac{2006 \times 2007}{2008 \times 2009}$, $c = \frac{2007 \times 2008}{2009 \times 2010}$, 则 a, b, c 的大小关系是？

提示：可先比较 a 和 b，因为 a, b 中都有 $\frac{2006}{2008}$ ，则 $\frac{2005}{2007}$ 和 $\frac{2007}{2009}$ 的大小既可以判断 a 和 b 的大小。同理 b 和 c 也可判断出来。

答案： $a < b < c$

例 4、分析：(1) 法 1：倒数法

$\frac{111}{1111}$ 的倒数为 $\frac{1111}{111} = 10\frac{1}{111}$ ； $\frac{1111}{11111}$ 的倒数为 $\frac{11111}{1111} = 10\frac{1}{1111}$ ；则 $10\frac{1}{111} > 10\frac{1}{1111}$ ，

则 $\frac{111}{1111} < \frac{1111}{11111}$ 。倒数大的分数反而小。

法 2：糖水法

$\frac{111}{1111} = \frac{1110}{11110}$, $\frac{1111}{11111} = \frac{1110+1}{11110+1}$ ，则对于真分数我们得到： $\frac{111}{1111} < \frac{1111}{11111}$

(2) 法 1：与 $\frac{1}{2}$ 做差法

$\frac{1}{2} - A = \frac{1}{2} - \frac{111111110}{222222221} = \frac{111111110.5}{222222221} - \frac{111111110}{222222221} = \frac{0.5}{222222221}$

$\frac{1}{2} - B = \frac{1}{2} - \frac{444444443}{888888887} = \frac{444444443.5}{888888887} - \frac{444444443}{888888887} = \frac{0.5}{888888887}$

$\frac{0.5}{222222221} > \frac{0.5}{888888887}$ ，真分数与 $\frac{1}{2}$ 差的越大的分数越小。

则 $A < B$ 。

法 2：倒数法

$\frac{1}{A} = \frac{222222221}{111111110} = 2\frac{1}{111111110}$ ； $\frac{1}{B} = \frac{888888887}{444444443} = 2\frac{1}{444444443}$

$\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 。则 $A < B$ 。

法 3：糖水法

$A = \frac{111111110}{222222221} = \frac{111111110 \times 4}{222222221 \times 4} = \frac{444444440}{888888884}$

$B = \frac{444444443}{888888887} = \frac{444444440+3}{888888884+3}$

则 $A < B$ 。

提高练习：如果 $A=\frac{222221}{222223}$, $B=\frac{333331}{333334}$, 那么 A, B 中较大的数是哪一个？

提示：糖水法即可

答案：A 大。

例 5、分析：法 1：交叉相乘法

$$24 \times \square < 80 \times 31$$

$$\square < 2480 \div 24$$

$$\square < 103.3$$

$$102.8 < \square < 103.3. \text{ 则 } \square=103$$

$$7 \times \square > 80 \times 9$$

$$\square > 720 \div 7$$

$$\square > 102.8$$

法 2：加成分数法

对于任意两个分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$, 把分子与分子相加, 分母与分母相加, 所得到的分

数 $\frac{a+c}{b+d}$ 即为加成分数。则我们可以得到: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ 。

$$80=24+7 \times 8, \text{ 则 } \frac{7}{9} = \frac{56}{72}, \frac{24}{31} < \frac{80}{103} < \frac{56}{72}, \square=103$$

提高练习：○△□分别表示三个小木块，它们的质量各不相同，可能是 1 克，2 克，3 克，4 克或 5 克，根据图可判断出○△□分别是多少克吗？



提示：2 个△小于 1 个○，3 个○小于 2 个□，则得到 $2\triangle < \bigcirc < \frac{2}{3}\square$,

$$2 \times 1 < \bigcirc < \frac{2}{3} \times 5, 2 < \bigcirc < 3\frac{2}{3}, \bigcirc \text{ 的质量可得到, 则 } \triangle \text{ 和 } \square \text{ 也可推出。}$$

答案：○=3 克，△=1 克，□=5 克。

例 6、分析：此题的方法也是数学中常用到的一些方法，尤其在初中应用更为广泛，即放缩法。

我们观察分母这 10 个分数发现， $\frac{1}{10}$ 是最大的， $\frac{1}{19}$ 是最小的，则这是个分数的和肯定小于 10 个 $\frac{1}{10}$ 的和，但大于 10 个 $\frac{1}{19}$ 的和。

$$\text{即 } \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{19} < \frac{1}{10} \times 10 = 1; \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{19} > \frac{1}{19} \times 10 = \frac{10}{19}$$

分母是小于 1，大于 $\frac{10}{19}$ 的数，那么所求数就应该为大于 1，小于 $\frac{19}{10}$ 的数（取倒数）

所求数的整数部分为 1。

提高练习：(1) 求数 $a=\frac{10}{100} + \frac{10}{101} + \frac{10}{102} + \cdots + \frac{10}{110}$ 的整数部分？

$$\text{提示：} 11 \times \frac{10}{110} < a < 11 \times \frac{10}{100}$$

答案：1

(2) 已知： $S=\frac{1}{\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\frac{1}{1982}+\cdots+\frac{1}{1991}}$, 求 S 的整数部分？

$$\text{提示：} 12 \times \frac{1}{1991} < \frac{1}{S} < 12 \times \frac{1}{1980} = \frac{1}{165},$$

$$165 < S < 1991 \div 12 = 165.91\bar{6}$$

答案：165。