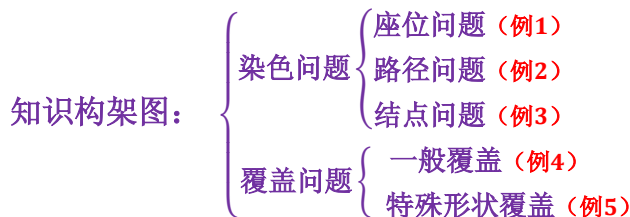


第三讲 染色与覆盖

本讲我们将一起学习染色与覆盖。而这里所说的染色问题并不是要求如何染色，然后有多少种染色方法等数学问题。而是一种解决逻辑推理题的一种方法，一种将研究对象分类的形象化的方法。通过将要解决的问题适当的染色，可以使我们更形象的观察分析其中所蕴含的关系，在经过一定的推理从而得到问题的答案。

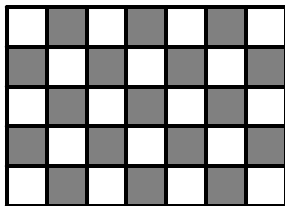


例题讲解

一、染色问题

1、座位染色问题

例 1：分析题中规定每个座位的前后左右都是他的邻座，那么 35 名同学每个人都恰好坐到它的邻座上能否办到？像这种问题我们该如何考虑呢？直接一步一步操作吗？很显然是很不现实的，那么有什么方法能让我们更直接的找到答案呢？染色。我们将 35 个座位染成黑白相间的形式，一眼就能看出，每个黑色的座位都是白色座位的邻座，也就是说如果 35 名同学每个人都恰好能坐到它的邻座上，那么必然是，黑白位置对换，但从图中我们看到黑色 17 格，白色 18 格，黑白个数不相等，所以无法办到。



提高练习：(1) 某影院有 31 排，每排 29 个座位，某天放映了两场电影，每个座位上都坐了一个观众，如果要求每个观众在看第二场电影时必须跟他前后左右相邻的某一观众交换座位，这样能办到吗？

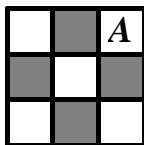
提示：总共 $31 \times 29 = 899$ 个座位，染成黑白相间的情况时黑白个数不相等，所以办不到。

(2) 五年级一班有 49 名同学，共分成 7 排，每排 7 个人。新年到了，每个同学都准备了一个礼物送给自己前后左右相邻的某一个同学，那么有没有可能每个同学都刚好收到一个别人送的礼物？

提示：总共 49 名同学，染成黑白相间的情况时黑白个数不相等，所以不可能。

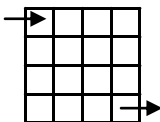
2、路径问题

例 2：分析如果一次次的操作的话很难看出是否能够按要求办到。所以我们按例 1 的方法，将 9 个小格染成黑白相间的颜色，很明显就能看出是不能办到的。因为从 A 格出去，第一步不管往哪走都会走入黑格，接着第二步又都会走入黑格，即走奇数步后进黑格，偶数步后进白格，这个人若要从 A 格出去又要回到 A 格，必须走 9 个格，所以最后一格必为黑才可以，而 A 格为白格，所以不可以。



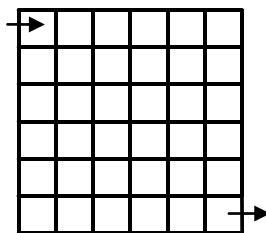
提高练习：(1) 有一次车展共 $4 \times 4 = 16$ 个展室，如图，每个展室与相邻的展室都有门相通，入口和出口如图所示，参观者能否从入口进去，不重复的参观完每个展室再从出口出来？

提示：仍是黑白相间染色，根据奇偶性判断出不可以。



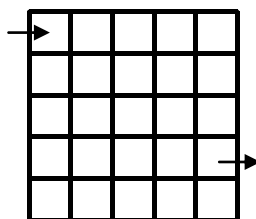
- (2) 有一次车展共 $6 \times 6 = 36$ 个展室，如图，每个展室与相邻的展室都有门相通，入口和出口如图所示，参观者能否从入口进去，不重复的参观完每个展室再从出口出来？

提示：仍是黑白相间染色，根据奇偶性判断出不可以。



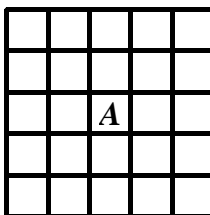
- (3) 有一次车展共 $5 \times 5 = 25$ 个展室，如图，每个展室与相邻的展室都有门相通，入口和出口如图所示，参观者能否从入口进去，不重复的参观完每个展室再从出口出来？

提示：仍是黑白相间染色，根据奇偶性判断出不可以。



- (4) 在 5×5 方格的 A 格中有一只爬虫，它每次只是朝上下左右四个方向爬到相邻格中，那么它能否不重复的爬遍每个方格再回到 A 格？

提示：仍是黑白相间染色，根据奇偶性判断出不可以。

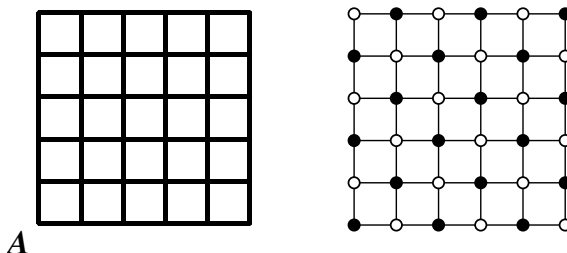


3、结点问题

例 3、分析与路径问题相似，只不过我们这回染得不再是小格而是点，染成黑白相间的点。我们会发现一共 14 个点，6 个黑点 8 个白点，每次的路线仍是从黑点走到白点或者从白点走到黑点，所以若想每个点不重复的都走一遍的话必须黑白相等或相差 1 个，但本题黑白差 2 个，所以不可以。

提高练习：(1) 一只电动老鼠从右图的 A 点出发，沿格线奔跑，并且每到一个格点不是向左转就是向右转，当这只电动老鼠又回到 A 点时，甲说它共转动了 83 次弯，乙说它共转动了 84 次弯，如果甲乙二人有一人说对了，那么谁对了？

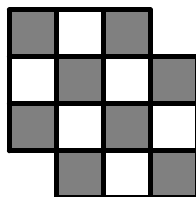
提示：将格点染成黑白相间的形式。若想从 A 点出发再回到 A 点，必须是从黑点出又回到黑点，从图中我们发现，从黑点到黑点必须转奇数次，所以甲对了。



二、覆盖问题

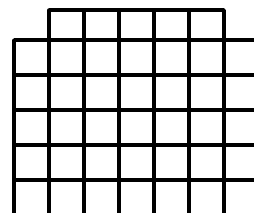
1、一般覆盖


例 4、将这 14 个小格染成黑白相间的，那么 7 个相邻两方格应该是一黑一白的，所以如果能覆盖的话，14 个格中的黑白格数应该是相等的，但图中有 8 个黑格，6 个白格。所以不可以。



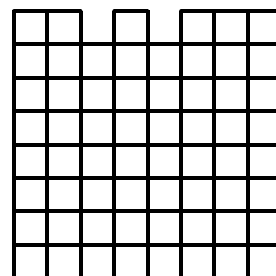
提高练习：(1) 右图是由 40 个小格组成的图形，能否将它裁成 20 个相同的长方形？


提示：黑白相间染色，最后黑白个数不相等，所以不可以。



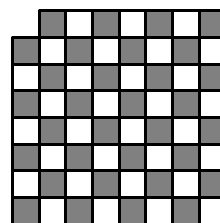
(2) 如图缺两格的 8×8 方格有 62 个格，能否用 31 个  图不重复的盖住它且不留空隙？

提示：黑白相间染色，最后黑白个数不相等，所以不可以。






(3) 一个 8×8 国际象棋去掉对角上两格后，是否可以用 31 个 2×1 的“骨牌”  把象棋盘上的 62 个小格完全覆盖？

提示：黑白相间染色，最后黑白个数不相等，所以不可以。



2、特殊覆盖

例 5、分析 6×6 的棋盘黑白格各 18 个，而用 1 个形状  的图形去覆盖的话会盖住 3 个黑格或 3 个白格（奇数个），那么 9 张卡片盖住的黑格总数肯定还是个奇数，所以与总数 18 个不符，则不能。

提高练习：(1) 用 11 个  和 5 个  能否盖住 8×8 的大正方形？

提示：  能盖住 2 黑 2 白，用 5 个以后，还剩下 22 黑 22 白，与例 5 相似奇数个



图形是无法把 22 黑或 22 白完全覆盖的。

(2) 在 6×6 的方格中，用若干有 3 个单位方格组成的 L 形纸片和由 4 个单位方格组成的凸形纸片将其完全覆盖，所用纸片最少多少张？

提示：共有 4 种搭配方法。9 张凸；6 张凸，4 张 L；3 张凸 8 张 L；12 张 L。其中只有 6 张凸，4 张 L 满足要求，所以最少 10 张。

例 6、分析因为每次有两个数同时加上或减去同一个数（假设次数为 a ），因此经过一次这样的操作后，相当于加上或减去了 a 的 2 倍，那么 9 个数总和就会多或者少偶数个数，也就是说 9 个数的总和为 45，经过 1 次操作后总和加上或减去一个偶数后应该还是奇数，但表（2）中的总和是 4，所以不可能。

提高练习：（1）下表中，在有公共边的两格内的数同时加上 1 或同时减去 1 叫做一次操作，经过有限次操作后由左下表变为右下表，那么由下表中的 A 处的数是多少？

提示：染成黑白相间的形式后会发现一次操作后是不影响黑格数字总和与白格数字总和的差的，即永远是 5，则可推断出 A 处数字为 5.

1	0	1
0	1	0
1	0	1

A	2010	2010
2010	2010	2010
2010	2010	2010