

第十一讲 不定方程

前面我们已经学习了很多方程，包括一元一次方程、分数方程、以及多元一次方程组。方程是我们解决较复杂的应用题是非常好的一种“武器”。今天，我们将要进一步学习不定方程，使我们这把“方程利剑”更加锋利。

那么，什么是不定方程呢？不定方程（组）就是指未知数的个数多于方程的个数的方程（组）。那么也就会导致不定方程的解不会像一元一次方程、多元一次方程组那样只有唯一解，而是有无穷多个解。考虑到不定方程的实际应用性，我们只研究不定方程的**整数解**。

本讲知识构架图：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{不定方程的解法(例1)} \\ \text{不定方程的应用(例3、4)} \\ \text{不定方程组的解法(例2)} \\ \text{不定方程组的解法(例6)} \end{array} \right.$$

例题讲解

1、不定方程的解法——同余法

例 1、分析：（1）首先根据原式我们可以得到一个关于 x 或 y 的表达式。

如： $x = \frac{213-9y}{7}$ 或 $y = \frac{213-7x}{9}$ ，我们只用其中一个即可。

（2）因为我们要找的都是不定方程的正整数解，则根据 $x = \frac{213-9y}{7}$ 。

我们可以得到： $213-9y$ 的差是 7 的倍数，即这个差被 7 整除，即这个差除以 7 的余数为 0。

说明 213 与 $9y$ 相对于 7 来说是同余的。

$213 \equiv 3 \pmod{7}$ ， $9y \equiv 2y \pmod{7}$ ，则 $3 \equiv 2y \pmod{7}$ ，

y 从 0 开始逐个尝试，看看哪个整数乘以 2 以后除以 7 的余数为 0，最小应该是 $y=5$ 。

除此之外在 5 的基础上加上 mod7 的若干年倍都是满足不等式中 y 的解得，因此只要找到最小解让它加上 7 的倍数都可以求出 y 的解，只要找到 y 的解，打入方程就会得到 x 的所对应的解。

解答：

$$7x+9y=213$$

$$x = \frac{213-9y}{7}$$

$$213-9y \equiv 0 \pmod{7}$$

$$213 \equiv 9y \pmod{7}$$

$$3 \equiv 2y \pmod{7}$$

$$y=5$$

把带入原式得到 $x=14$

$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 5 \end{cases}$$

同样 $y=5$ 的基础上加上 mod7 的倍数都可以

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 19 \end{cases}$$

小总结

我们发现，当找到 y 的最小的一组解时，其他 y 的解都是加上方程中 x 的系数（7）的若干倍；而其他 x 的解都是减去方程中 y 的系数（9）的若干倍，直到不能再减为止。

提高练习：(1) $6x+7y=120$

答案： $\begin{cases} x=25 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=6 \\ y=9 \end{cases}$

(2) 求 $7x+4y=89$ 的正整数解？

答案： $\begin{cases} x=3 \\ y=17 \end{cases}$ $\begin{cases} x=7 \\ y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=11 \\ y=3 \end{cases}$

2、不定方程的应用

例 3、分析：此题是应用不定方程解决应用题，方程还是比较好列出来的，解法按照例 1 的同余法解即可。

解答：设月份为 x ，日期为 y ，则得到

$$30x+11y=350$$

$$y=\frac{350-30x}{11}$$

$$350 \equiv 30x \pmod{11}$$

$$9 \equiv 8x \pmod{11}$$

$$\begin{cases} x=8 \\ y=10 \end{cases}$$

生日为 8 月 10 日

提高练习：(1) 一个学生 1991 年的年龄正好等于他出生那一年的年份的各数字之和，请问这个学生 1994 年是几岁？

提示：设出生年份为 $19xy$ ，根据题意列出方程，并将其转化为不定方程的标准形式即可。 $11x+2y=81$

答案：22 岁。

(2) 某人发现他 1993 年的年龄比他出生那一年的年份的个位数字的和大 4，问这个人 1995 年是几岁？

提示：与上题解法相同。

答案：24 岁。

(3) 某男孩在 2006 年 2 月 16 日说：“我活过的月数与我活过的年数之差，到今天为止正好就是 111。” 请问：他是哪一年出生的？

提示：设他活过 x 年零 y 个月。则总月数为 $12x+y$ ，可列出方程。

答案：1993 年 1 月 16 日。

例 4、分析：此题与例 3 相似，设出大、小客车分别为 x, y 则根据题意方程很容易列出。

$48x+30y=306$ ，但我们需要注意的是同余法解的不定方程都要是最简方程，很明显此方程的等号左右两边可以都除以 6 得到： $8x+5y=51$ 。解此方程即可。

解答： $8x+5y=51$

$$x=\frac{51-5y}{8}$$

$$51 \equiv 5y \pmod{8}$$

$$3 \equiv 5y \pmod{8}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$$

大客车 2 辆，小客车 7 辆。

提高练习：(1) 装热水瓶的盒子有大小两种，小盒子能装 5 个，大盒子能装 8 个，要把 68 个热水瓶恰好装入盒里，需要这两种盒子各多少个？

提示：略

答案：大盒子 1 个，小盒子 12 个；或大盒子 4 个，小盒子 6 个。

- (2) 小明将玻璃弹子装入两种盒子，每个大盒装 12 颗，每个小盒装 5 颗，若弹子共有 98 个，所用大小盒子的和多于 10 个，大小盒子各几个？

提示：略

答案：大盒子 4 个；小盒子 10 个。

3、不定方程组的解法

例 2、分析：此题解法首先第一步就是先消元，将其变成一个二元一次不定方程，再按照同余的解法求解即可。

解答：
$$\begin{cases} 9a + 6b + 4c = 80 & \text{①} \\ a + b + c = 15 & \text{②} \end{cases}$$

①-②×4 得到

消去 c

$$5a + 2b = 20$$

$$a = \frac{20-2b}{5}$$

$$20 \equiv 2b \pmod{5}$$

$$0 \equiv 2b \pmod{5}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 10 \end{cases}$$

对应出 c 的值为：c=11 c=8 c=5

提高练习：解方程组：
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 35 \\ 13x + 4y + z = 35 \end{cases}$$

答案：
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \\ z = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 10 \end{cases}$$

4、不定方程组的应用

例 6、分析：略

解答：设公鸡、母鸡、小鸡各有 x、y、z 只。根据题意列出方程

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & \text{①} \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 & \text{②} \end{cases}$$

②×3-①得：

消 z

$$14x + 8y = 200$$

$$7x + 4y = 100$$

$$x = \frac{100-4y}{7}$$

$$100 \equiv 4y \pmod{7}$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 11 \\ x = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 18 \\ x = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 25 \\ x = 0 \end{cases}$$

对应出 z 的值为：z=84 z=81 z=78 z=75

提高练习：(1) 14 个大、中、小钢珠共重 100 克，大号钢珠每个重 12 克，中号钢珠每个重 8 克，小号钢珠每个重 5 克，问：大、中、小号钢珠各有多少个？

提示：略

答案：大号 3 个、中号 3 个、小号 8 个

- (2) 甲乙两个同学在一次数学擂台赛中，试卷上有解答题、选择题、填空题各若干个，而且每个小题的分值都是自然数，结果公布后，已知甲做对了 5 道解答题，7 道选择题，9 道填空题，共得 52 分；乙做对了 7 道解答题，9 道选择题，11 道填空题，共得 68 分；问：解答题、选择题、填空题的每道小题各多少分？

提示：略

答案：解答题 4 分、选择题 2 分、填空题 2 分；或解答题 3 分、选择题 4 分、填空题 1 分。

例 5、分析：此题只有一个方程，而且未知数的个数有 3 个，那我们该怎样求出其整数解呢？
我们可以先通过两个未知数的范围来确定一个未知数，使其变为一个二元一次不定方程。解答如下。

解答：设这个三位数为 \overline{abc} ，则根据题意可得到

$$\overline{abc} = 13 \times (a+b+c)$$

$$100a+10b+c=13a+13b+13c$$

$$87a-3b-12c=0$$

$$87a-(3b+12c)=0$$

因为 a, b, c 均为 $0 \sim 9$ 的自然数，则 a 只能为 1。 $3b+12c$ 最大为 $3 \times 9 + 12 \times 9 = 135$ ，
若 $a=2$ 则得不到 $83a-(3b+12c)=0$ 。

那么可得到二元一次不定方程： $3b+12c=87$

$$\text{解得: } \begin{cases} b=1 \\ c=7 \end{cases} \quad \begin{cases} b=5 \\ c=6 \end{cases} \quad \begin{cases} b=9 \\ c=5 \end{cases}$$

则所求的三位数为：117、156、195。

提高练习：(1) $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 1370$ ，求 \overline{abcd}

提示：位置原理展开得到： $1111a+111b+11c+d=1370$ ，先判断出 $a=1$ ，则 $111b+11c+d=259$ 。

$11c+d$ 最大为 $11 \times 9 + 9 = 108$ ，则 $111b$ 在 $259-108=151$ 和 259 之间，则 $b=2$

$11c+d=259-222=37$ ，解得： $c=3, d=4$

答案： $\overline{abcd}=1234$

(2) 用十进制表示的某些自然数，恰等于它的个位数字之和的 16 倍，则满足条件的所有自然数之和为多少？

提示：我们先要判断出这些自然数为几位数。

若为 4 位数 \overline{abcd} ，则 $16(a+b+c+d) \leq 16 \times 36 < 1000$ ，所以不可能为 4 位数。

若为 2 位数 \overline{ab} ，则 $16(a+b) < 10a+b$ ，不可能得到该 2 位数，所以也不可能。

只能为 3 位数 \overline{abc} ，则 $16(a+b+c) = 100a+10b+c$

$$28a-(2b+5c)=0$$

$2b+5c \leq 2 \times 9 + 5 \times 9 = 63$ ，则 a 可以为 1, 2。

(1) 当 $a=1$ 时， $2b+5c=28$

(2) 当 $a=2$ 时， $2b+5c=56$

解出即可。

答案： $192+144+288=624$

补充练习：减法的不定方程解法

例： $5x-7y=34$

$$x = \frac{34+7y}{5}$$

$$34+7y \equiv 0 \pmod{5}$$

$$4+2y \equiv 0 \equiv 5 \pmod{5}$$

$$\text{则 } 2y \equiv 5-4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x=11 \end{cases} \quad \begin{cases} y=8 \\ x=18 \end{cases} \quad \begin{cases} y=13 \\ x=25 \end{cases} \dots\dots$$

$$y = \frac{5x-34}{7}$$

$$5x-34 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$5x \equiv 34 \pmod{7}$$

$$5x \equiv 6 \pmod{7}$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x=11 \end{cases} \quad \begin{cases} y=8 \\ x=18 \end{cases} \quad \begin{cases} y=13 \\ x=25 \end{cases} \dots\dots$$

找到最小解后，仍然是满足 x 的解随 y 的系数变化； y 的解随 x 的系数变化。但此时是要涨都涨，要降都降。

$$\text{练习: (1) } 6x-5y=39 \quad \begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \dots$$

$$(2) 11x-4y=54 \quad \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \dots$$

$$(3) 8x-5y=74 \quad \begin{cases} x=13 \\ y=6 \end{cases} \dots$$