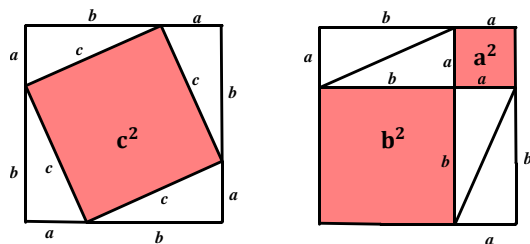


第十讲 勾股定理

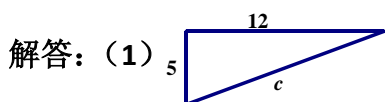
一、勾股定理的证明



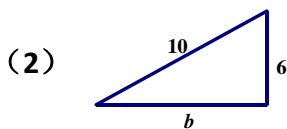
如图：从两个大小相等的正方形中（边长都为 $a+b$ ），减去 4 块一样的直角三角形后，剩下的面积应该是相等的，所以得到：在直角三角形中，两个直角边和斜边满足如下关系： $a^2 + b^2 = c^2$ 。

二、例题讲解、

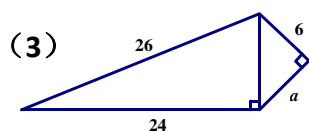
例 1、分析：此题为勾股定理的基础题型，即根据公式： $a^2 + b^2 = c^2$ 。根据任意两边长度求出第三边长度。



c 边为斜边，则 $a^2 + b^2 = c^2$. $12^2 + 5^2 = 169 = 13^2$. $c=13$



b 边为直角边，则 $c^2 - a^2 = b^2$. $10^2 - 6^2 = 64 = 8^2$. $b=8$



a 边为直角边，则需要找出斜边和另一个直角边，题中给出了另一个直角边但没给出斜边，此斜边恰好是另一个直角三角形的一个直角边，则 $26^2 - 24^2 = 100 = 10^2$; $10^2 - 6^2 = 8^2$, $a=8$

提高练习：(1) 将长为 10 米的梯子斜靠在墙上，若梯子上端到墙的底端距离为 6 米，则梯足到墙的底端距离为多少米？

提示：梯子长度，上端到墙底端的距离，梯足到低端的距离构成直角三角形，满足勾股定理。

答案：8 米。

(2) 若直角三角形一直角边和斜边分别为 17 和 145，则另一直角边为多少？

提示：勾股定理的基础应用。

答案：144。

例 2、分析：此题是勾股定理和平方差公式的结合运用。一直角边的长度为 9，说明：

斜边² - 一直角边² = 另一直角边²，即 $c^2 - b^2 = a^2 = 81 = (c+b)(c-b) = 81$ 则

$$\begin{cases} c+b=81 \\ c-b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} c+b=27 \\ c-b=3 \end{cases} \text{ 得到 } \begin{cases} c=41 \\ b=40 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} c=15 \\ b=12 \end{cases}$$

所以斜边长度为 41 或 15。

提高练习：(1) 直角三角形一直角边长为 11，另两边均为自然数，则其周长为多少？

提示：同例 2。

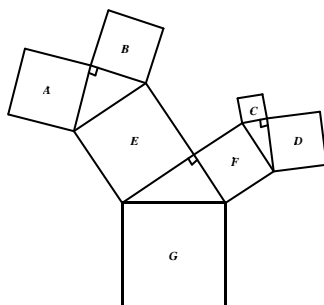
答案：周长为 132。

(2) 一个直角三角形，三条边的长度都是整数，其中一条边的长度是 5，求三角形的面积？

提示：同例 2，但此题边长 5 有可能是直角边，也有可能是斜边，所以有 2 种答案。

答案：面积为 6 或 30。

例 3、分析：

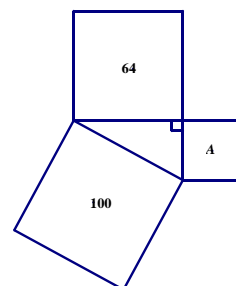


如图根据勾股定理， $S_A + S_B = S_E$ ； $S_C + S_D = S_F$ ； $S_E + S_F = S_G$
而 $S_E + S_F = S_G = 7^2$ 。所以 $S_A + S_B + S_C + S_D = S_G = 7^2 = 49$

提高练习：（1）三个正方形的面积如图，正方形的面积为多少？

提示：同例 3，两直角边上的正方形面积和等于斜边上的正方形面积。

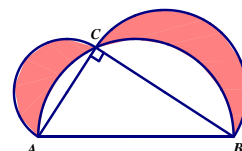
答案：36



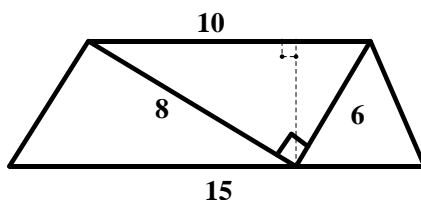
（2）如图，已知直角三角形 ABC 的面积是 13 平方厘米，求阴影面积？

提示：阴影面积=三角形+小半圆+中半圆-大半圆

答案：13 平方厘米。

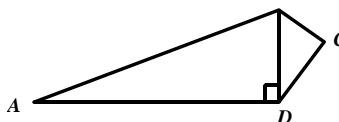


例 4、分析：如图：



根据图中直角三角形的两直角边 8 和 6 可求出其斜边为 10，即梯形的上底，再根据直角三角形的等面积原理，三角形斜边上的高 h 就等于两直角边的乘积除以斜边： $8 \times 6 \div 10 = 4.8$ ，此高也为梯形的高，则梯形的面积可求： $(10+15) \times 4.8 \div 2 = 60$

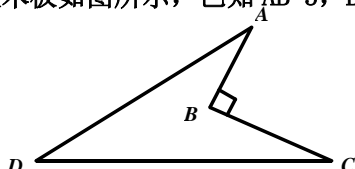
提高练习：（1）已知四边形 ABCD 中如图， $AB=13$ ， $BC=3$ ， $CD=4$ ， $DA=12$ ，并且 BD 与 AD 垂直，则四边形 ABCD 的面积等于多少？



提示：直角三角形 ABD 中求出直角边 BD 的长度为 5，则三角形 BCD 的三边也满足勾股定理，即为直角三角形，面积可求。

答案：36

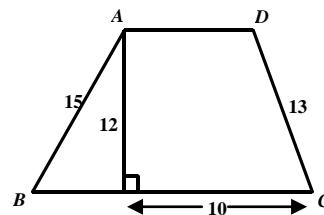
（2）一块木板如图所示，已知 $AB=3$ ， $BC=4$ ， $DC=13$ ， $AD=12$ ，木板的面积为多少？



提示：连接 AC，则与练习 1 原理相同，根据直角三角形 ABC 推出 $AC=5$ ，则三角形 ADC 也为直角三角形，则四边形面积可求。

答案：24.

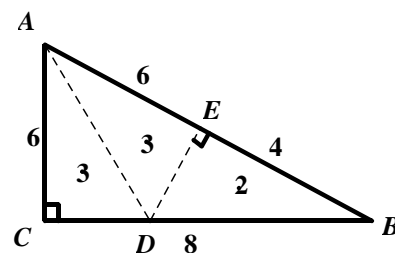
(3) 根据题中所给出的条件，求梯形 ABCD 的面积？



提示：过 D 点做梯形的高，仍是 12，则可得新的直角三角形，上下底都可求出，面积也就 OK 了。

答案：144.

例 5、分析：如图根据勾股定理： $AC=6$; $BC=8$ ，得到斜边 $AB=10$ ，由于是对折过去的，则 $AE=AC=6$ ，那么 $BE=4$ 。三角形 ADE 和三角形 BDE 的顶点相同底边共线，则 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{AE}{BE} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
即：△ADC、△ADE、△ADE 分别为 3 份、3 份、2 份。
△ADC 占整个△ABC 的 $\frac{3}{8}$ 。

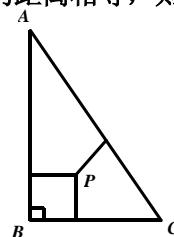


$$\text{所以 } S_{\triangle ADC} = \frac{3}{8} \times S_{\triangle ABC} = \frac{3}{8} \times 6 \times 8 \div 2 = 9$$

提高练习：(1) 如图直角三角形 ABC 中，两直角边长为 7，24，三角形内有一点 P 到各边的距离相等，则这个距离是多少？

提示：设这个距离为 x，根据直角三角形的总面积列出方程。

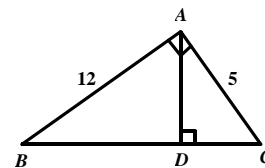
答案：3。



(2) 如图直角三角形 ABC, $AB=12$, $AC=5$ ，则 $AD=?$

提示：AD 为斜边上的高，则可根据直角三角形的等面积计算求出 AD。

$$\text{答案：} AD = \frac{60}{13}$$

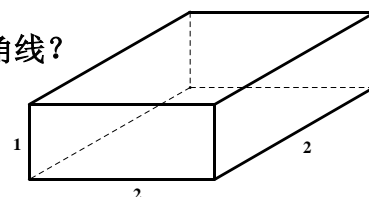


例 6、分析：此题属于立体图形中勾股定理的应用。因为圆柱体的侧面展开图是一个长方形，所以从 A 点到 B 点的最短距离应为展开图的对角线，即：长为底面圆半圆周长，高为圆柱高的长方形的对角线，则根据勾股定理可求出这个最短距离。

解答：展开图的长 $= \pi r = 3 \times 4 = 12$ 分米，宽为 5 分米，则最短距离： $12^2 + 5^2 = 13^2$ 。

最短距离=13 分米

提高练习：如图长方体的长宽高分别为 1、2、2，求该长方体的体对角线？



提示：底面对角线、长方体的高、体对角线满足直角三角形勾股定理。

答案：3

