2012年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

（1）B　（2）A　（3）C　（4）B

（5）D　（6）A　（7）A　（8）D

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

（9）18，9　（10）$18+9\pi$　（11）-1，1

（12）2　（13）$\dfrac{4}{3}$　（14）$(0,1)\cup(1,4)$

三．解答题

（15）本小题主要考查两角和与差的正弦公式、二倍角的余弦公式，三角函数的最小正周期、单调性等基础知识．考查基本运算能力．满分13分．

（Ⅰ）解：$f(x)=\sin 2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 2x\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin 2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos 2x\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos 2x$

$$=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\ .$$

所以，$f(x)$的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．

（Ⅱ）解：因为$f(x)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{8}\right]$上是增函数，在区间$\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{4}\right]$上是减函数．又$f(-\dfrac{\pi}{4})=-1$，$f(\dfrac{\pi}{8})=\sqrt{2}$，$f(\dfrac{\pi}{4})=1$，故函数$f(x)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$-1$．

（16）本小题主要考查古典概型及其概率计算公式，互斥事件、事件的相互独立性、离散型随机变量的分布列与数学期望等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的

能力，满分13分．

解：依题意，这4个人中，每个人去参加甲游戏的概率为$\frac{1}{3}$，去参加乙游戏的概率为$\frac{2}{3}$．

设“这4个人中恰有i人去参加甲游戏”为事件A_i（$i=0,1,2,3,4$），

则$P(A_i)=C_4^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}$．

（Ⅰ）这4个人中恰有2人去参加甲游戏的概率$P(A_2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$．

（Ⅱ）设“这4个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数”为事件B，

则$B=A_3\cup A_4$．由于A_3与A_4互斥，故

$$P(B)=P(A_3)+P(A_4)=C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)+C_4^4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{9}.$$

所以，这4个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率为$\frac{1}{9}$．

（Ⅲ）ξ的所有可能取值为0，2，4．

由于A_1与A_3互斥，A_0与A_4互斥，故

$$P(\xi=0)=P(A_2)=\frac{8}{27},$$

$$P(\xi=2)=P(A_1)+P(A_3)=\frac{40}{81},$$

$$P(\xi=4)=P(A_0)+P(A_4)=\frac{17}{81}.$$

所以ξ的分布列是

ξ	0	2	4
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{17}{81}$

随机变量ξ的数学期望$E\xi=0\times\frac{8}{27}+2\times\frac{40}{81}+4\times\frac{17}{81}=\frac{148}{81}$．

（17）本小题主要考查空间两条直线的位置关系，二面角、异面直线所成的角，直线与平面垂直等基础知识，考查用空间向量解决立体几何问题的方法，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力．满分13分．

方法一：

如图，以点 A 为原点建立空间直角坐标系，依题意得

$A(0,0,0)$，$D(2,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$P(0,0,2)$．

（Ⅰ）证明：易得 $\overrightarrow{PC}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$．

于是 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以 $PC\perp AD$．

（Ⅱ）解：$\overrightarrow{PC}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{CD}=(2,-1,0)$．

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-2z=0,\\ 2x-y=0.\end{cases}$ 不妨令 $z=1$，

可得 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$．

可取平面 PAC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$．

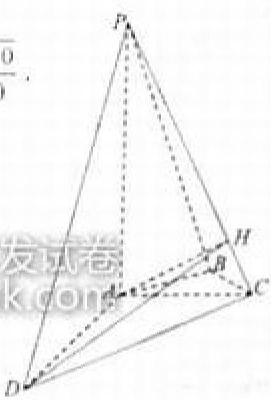
于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，从而 $\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{30}}{6}$．

所以二面角 $A-PC-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$．

（Ⅲ）解：设点 E 的坐标为 $(0,0,h)$，其中 $h\in[0,2]$．由此得 $\overrightarrow{BE}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},h)$．由 $\overrightarrow{CD}=(2,-1,0)$，故

$$\cos\left\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CD}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+h^2}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{10+20h^2}},$$

所以，$\frac{3}{\sqrt{10+20h^2}}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $h=\frac{\sqrt{10}}{10}$，即 $AE=\frac{\sqrt{10}}{10}$．



方法二：

（Ⅰ）证明：由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，可得 $PA\perp AD$．

又由 $AD\perp AC$，$PA\cap AC=A$，故 $AD\perp$ 平面 PAC．

又 $PC\subset$ 平面 PAC，所以 $PC\perp AD$．

（Ⅱ）解：如图，作 $AH\perp PC$ 于点 H，连接 DH．

由 $PC\perp AD$，$PC\perp AH$，可得 $PC\perp$ 平面 ADH．

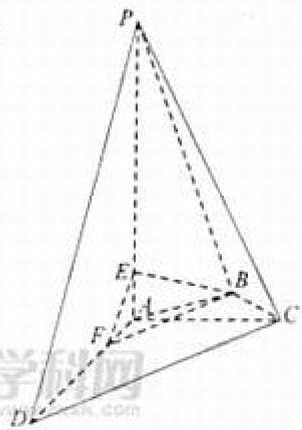
因此 $DH\perp PC$，从而 $\angle AHD$ 为二面角 $A-PC-D$ 的平面角．

在 Rt△PAC 中，$PA=2$，$AC=1$，由此得 $AH=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

由（Ⅰ）知 $AD\perp AH$，故在 Rt△DAH 中，$DH=\sqrt{AD^2+AH^2}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$．因此 $\sin\angle AHD=\dfrac{AD}{DH}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．所以二面角 $A-PC-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．

（Ⅲ）解：如图，因为 $\angle ADC<45^\circ$，故过点 B 作 CD 的平行线必与线段 AD 相交，设交点为 F，连接 BE，EF．故 $\angle EBF$ 或其补角为异面直线 BE 与 CD 所成的角．

由于 $BF/\!/CD$，故 $\angle AFB=\angle ADC$．在 Rt△DAC 中，$CD=\sqrt{5}$，$\sin\angle ADC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，故 $\sin\angle AFB=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$．



在△AFB 中，由 $\dfrac{BF}{\sin\angle FAB}=\dfrac{AB}{\sin\angle AFB}$，$AB=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\angle FAB=\sin 135^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $BF=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$．

由余弦定理，$BF^2=AB^2+AF^2-2AB\cdot AF\cdot\cos\angle FAB$，可得 $AF=\dfrac{1}{2}$．

设 $AE=h$．

在 Rt△EAF 中，$EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=\sqrt{h^2+\dfrac{1}{4}}$，

在 Rt△BAE 中，$BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{h^2+\dfrac{1}{2}}$，

在△EBF 中，因为 $EF<BE$，从而 $\angle EBF=30^\circ$，由余弦定理得 $\cos 30^\circ=\dfrac{BE^2+BF^2-EF^2}{2BE\cdot BF}$，可解得 $h=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

所以 $AE=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

（18）本小题主要考查等差数列与等比数列的概念、通项公式、前 n 项和公式、数列求和等基础知识．考查化归与转化的思想方法．考查运算能力、推理论证能力．满分 13 分．

（Ⅰ）解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q．由 $a_1=b_1=2$，得 $a_4=2+3d$，$b_4=2q^3$，$S_4=8+6d$．由条件，得方程组 $\begin{cases}2+3d+2q^3=27,\\8+6d-2q^3=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=3,\\q=2.\end{cases}$

所以 $a_n=3n-1$，$b_n=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（II）证明：（方法一）

由（I）得

$$T_n=2a_n+2^2a_{n-1}+2^3a_{n-2}+\cdots+2^na_1,\qquad ①$$

$$2T_n=2^2a_n+2^3a_{n-1}+\cdots+2^na_2+2^{n+1}a_1.\qquad ②$$

由②－①，得

$$T_n=-2(3n-1)+3\times2^2+3\times2^3+\cdots+3\times2^n+2^{n+2}$$

$$=\frac{12(1-2^{n-1})}{1-2}+2^{n+2}-6n+2=10\times2^n-6n-10.$$

而 $-2a_n+10b_n-12=-2(3n-1)+10\times2^n-12=10\times2^n-6n-10$，故

$$T_n+12=-2a_n+10b_n,\quad n\in\mathbf{N}^*.$$

（方法二：数学归纳法）

（1）当 $n=1$ 时，$T_1+12=a_1b_1+12=16$，$-2a_1+10b_1=16$，故等式成立；

（2）假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $T_k+12=-2a_k+10b_k$，则当 $n=k+1$ 时有：

$$\begin{aligned}T_{k+1}&=a_{k+1}b_1+a_kb_2+a_{k-1}b_3+\cdots+a_1b_{k+1}\\&=a_{k+1}b_1+q(a_kb_1+a_{k-1}b_2+\cdots+a_1b_k)\\&=a_{k+1}b_1+qT_k\\&=a_{k+1}b_1+q(-2a_k+10b_k-12)\\&=2a_{k+1}-4(a_{k+1}-3)+10b_{k+1}-24\\&=-2a_{k+1}+10b_{k+1}-12.\end{aligned}$$

即 $T_{k+1}+12=-2a_{k+1}+10b_{k+1}$．因此 $n=k+1$ 时等式也成立．

由（1）和（2），可知对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$T_n+12=-2a_n+10b_n$ 成立．

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、平面内两点间的距离公式等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质，以及数形结合的数学思想方法，考查运算求解能力，综合分析和解决问题的能力．满分13分．

（I）解：设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)．由题意，有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.\qquad ①$$

由 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，得 $k_{AP}=\dfrac{y_0}{x_0+a}$，$k_{BP}=\dfrac{y_0}{x_0-a}$．

由 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\dfrac{1}{2}$，可得 $x_0^2=a^2-2y_0^2$，代入①并整理得 $(a^2-2b^2)y_0^2=0$．由于 $y_0\neq 0$，故 $a^2=2b^2$．于是 $e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，所以椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

（Ⅱ）证明：（方法一）

依题意，直线 OP 的方程为 $y=kx$，设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)．由条件得 $\begin{cases} y_0=kx_0, \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1. \end{cases}$

消去 y_0 并整理得

$$x_0^2=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}. \qquad ②$$

由 $|AP|=|OA|$，$A(-a,0)$ 及 $y_0=kx_0$，得 $(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2$．整理得

$(1+k^2)x_0^2+2ax_0=0$．而 $x_0\neq 0$，于是 $x_0=\dfrac{-2a}{1+k^2}$，代入②，整理得

$(1+k^2)^2=4k^2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+4$．由 $a>b>0$，故 $(1+k^2)^2>4k^2+4$，即 $k^2+1>4$，因此 $k^2>3$，

所以 $|k|>\sqrt{3}$．

（方法二）

依题意，直线 OP 的方程为 $y=kx$，可设点 P 的坐标为 (x_0,kx_0)．由点 P 在椭圆上，

有 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{k^2x_0^2}{b^2}=1$．因为 $a>b>0$，$kx_0\neq 0$，所以 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{k^2x_0^2}{a^2}<1$，即

$$(1+k^2)x_0^2<a^2. \qquad ③$$

由 $|AP|=|OA|$，$A(-a,0)$，得 $(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2$，整理得 $(1+k^2)x_0^2+2ax_0=0$，于是 $x_0=\dfrac{-2a}{1+k^2}$，代入③，得 $(1+k^2)\dfrac{4a^2}{(1+k^2)^2}<a^2$，解得 $k^2>3$，所以 $|k|>\sqrt{3}$．

（20）本小题主要考查导数的运算、利用导数研究函数的单调性、不等式等基础知识，考查函数思想、分类讨论思想，考查综合分析和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）解：$f(x)$ 的定义域为 $(-a,+\infty)$．

$f'(x)=1-\frac{1}{x+a}=\frac{x+a-1}{x+a}$．由 $f'(x)=0$，得 $x=1-a>-a$．

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-a,1-a)$	$1-a$	$(1-a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

因此，$f(x)$ 在 $x=1-a$ 处取得最小值，故由题意 $f(1-a)=1-a=0$，所以 $a=1$．

（Ⅱ）解：当 $k\leqslant 0$ 时，取 $x=1$，有 $f(1)=1-\ln 2>0$，故 $k\leqslant 0$ 不合题意．

当 $k>0$ 时，令 $g(x)=f(x)-kx^2$，即 $g(x)=x-\ln(x+1)-kx^2$．

$g'(x)=\frac{x}{x+1}-2kx=\frac{-x[2kx-(1-2k)]}{x+1}$．令 $g'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\frac{1-2k}{2k}>-1$．

（1）当 $k\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1-2k}{2k}\leqslant 0$，$g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，因此 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，从而对于任意的 $x\in[0,+\infty)$，总有 $g(x)\leqslant g(0)=0$，即 $f(x)\leqslant kx^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立．

故 $k\geqslant\frac{1}{2}$ 符合题意．

（2）当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1-2k}{2k}>0$，对于 $x\in(0,\frac{1-2k}{2k})$，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1-2k}{2k})$ 内单调递增．因此当取 $x_0\in(0,\frac{1-2k}{2k})$ 时，$g(x_0)>g(0)=0$，即 $f(x_0)\leqslant kx_0^2$ 不成立．

故 $0<k<\frac{1}{2}$ 不合题意．

综上，k 的最小值为 $\frac{1}{2}$．

（Ⅲ）**证明**：当 $n=1$ 时，不等式左边 $=2-\ln 3<2=$ 右边，所以不等式成立．

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2}{2i-1}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2}{2i-1}-\ln\left(1+\frac{2}{2i-1}\right)\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}[\ln(2i+1)-\ln(2i-1)]\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1).\end{aligned}$$

[illegible]中取 $k=\dfrac{1}{2}$，得 $f(x)\leqslant\dfrac{x^2}{2}$（$x\geqslant0$），从而

$$f\left(\frac{2}{2i-1}\right)\leqslant\frac{2}{(2i-1)^2}<\frac{2}{(2i-3)(2i-1)}\quad(i\in\mathbf{N}^*,\ i\geqslant2).$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2}{2i-1}\right)=f(2)+\sum_{i=2}^{n}f\left(\frac{2}{2i-1}\right)<2-\ln3+\sum_{i=2}^{n}\frac{2}{(2i-3)(2i-1)}$$

$$=2-\ln3+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{2i-3}-\frac{1}{2i-1}\right)=2-\ln3+1-\frac{1}{2n-1}<2.$$

综上，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2$，$n\in\mathbf{N}^*$.