

## 2001-2012 年江苏南京中考数学试题分类解析汇编 (12 专题)

## 专题 6: 函数的图象与性质

## 一、选择题

1. (江苏省南京市 2002 年 2 分) 反比例函数  $y = \frac{k^2}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象的两个分支分别位于【     】

A、第一、二象限     B、第一、三象限     C、第二、四象限     D、第一、四象限

【答案】B。

【考点】反比例函数的性质。

【分析】对于反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ )，当  $k > 0$  时，图象分别位于第一、三象限；当  $k < 0$  时，图象分别位于第二、四象限。因此， $\because k \neq 0, \therefore k^2 > 0, \therefore$  图象两个分支分别位于第一、三象限。故选 B。

2. (江苏省南京市 2003 年 2 分) 抛物线  $y = (x-1)^2 + 1$  的顶点坐标是【     】。

(A) (1, 1)     (B) (-1, 1)     (C) (1, -1)     (D) (-1, -1)

【答案】A。

【考点】二次函数的性质。

【分析】根据二次函数的顶点式是： $y = (x-h)^2 + k$  ( $a \neq 0$ ，且  $a, h, k$  是常数)，顶点坐标为  $(h, k)$ ，直接写出顶点坐标：因为  $y = (x-1)^2 + 1$  是抛物线解析式的顶点式，根据顶点式的坐标特点可知，顶点坐标是  $(1, 1)$ 。故选 A。

3. (江苏省南京市 2004 年 2 分) 抛物线  $y = (x-2)^2$  的顶点坐标是【     】

A、(2, 0)     B、(-2, 0)     C、(0, 2)     D、(0, -2)

【答案】A。

【考点】二次函数的性质。

【分析】已知抛物线  $y = (x-2)^2$  是顶点式，直接写出顶点坐标： $(2, 0)$ 。故选 A。

4. (江苏省南京市 2005 年 2 分) 反比例函数  $y = -\frac{2}{x}$  的图象位于【     】

A、第一、二象限     B、第一、三象限     C、第二、三象限     D、第二、四象限

【答案】D。

【考点】反比例函数的性质。

【分析】对于反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ )，当  $k > 0$  时，图象分别位于第一、三象限；当  $k < 0$  时，图象分别

位于第二、四象限。因此， $\because k = -2 < 0$ ， $\therefore$  图象两个分支分别位于第二、四象限。故选 D。

5. (江苏省南京市 2005 年 2 分) 二次函数  $y = (x-1)^2 + 2$  的最小值是【 】

- A、-2      B、2      C、-1      D、1

【答案】B。

【考点】二次函数的最值。

【分析】抛物线  $y = (x-1)^2 + 2$  开口向上，有最小值，顶点坐标为 (1, 2)，顶点的纵坐标 2 即为函数的最小值。故选 B。

6. (江苏省南京市 2007 年 2 分) 反比例函数  $y = -\frac{k^2}{x}$  ( $k$  为常数， $k \neq 0$ ) 的图象位于【 】

- A. 第一、二象限      B. 第一、三象限  
C. 第二、四象限      D. 第三、四象限

【答案】C。

【考点】反比例函数的性质。

【分析】对于反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ )，当  $k > 0$  时，图象分别位于第一、三象限；当  $k < 0$  时，图象分别位于第二、四象限。因此， $\because -k^2 < 0$ ， $\therefore$  图象两个分支分别位于第二、四象限。故选 C。

7. (江苏省南京市 2008 年 2 分) 已知反比例函数的图象经过点 P(-2, 1)，则这个函数的图象位于【 】

- A. 第一、三象限      B. 第二、三象限  
C. 第二、四象限      D. 第三、四象限

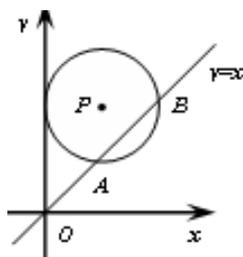
【答案】C。

【考点】反比例函数的性质，待定系数法

【分析】先根据点的坐标求出 k 值，再利用反比例函数图象的性质即可求解：

$\because$  图象过 P(-2, 1)， $\therefore k = xy = -2 < 0$ 。 $\therefore$  函数图象位于第二，四象限。故选 C。

8. (江苏省南京市 2011 年 2 分) 如图，在平面直角坐标系中， $\odot P$  的圆心是 (2, a) ( $a > 2$ )，半径为 2，函数  $y = x$  的图象被  $\odot P$  的弦 AB 的长为  $2\sqrt{3}$ ，则 a 的值是【 】



- A.  $2\sqrt{3}$     B.  $2+2\sqrt{2}$     C.  $2\sqrt{3}$     D.  $2+\sqrt{3}$

**【答案】** B.

**【考点】** 一次函数的应用, 弦径定理, 勾股定理, 对顶角的性质, 三角形内角和定理.

**【分析】** 连接 PA, PB, 过点 P 作  $PE \perp AB$  于 E, 作  $PF \perp x$  轴于 F, 交 AB 于 G, 分别求出 PD、DC, 相加即可:

$\because$  在  $Rt\triangle PAE$  中, 由弦径定理可得  $AE = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$ ,  $PA = 2$ ,

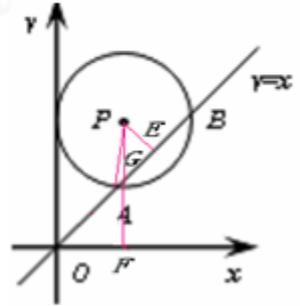
$\therefore$  由勾股定理可得  $PE = 1$ .

又由  $y = x$  可得,  $\angle OGF = \angle GOF = 45^\circ$ ,  $FG = OF = 2$ .

又  $\because PE \perp AB$ ,  $PF \perp OF$ ,

$\therefore$  在  $Rt\triangle EPG$  中,  $\angle EPG = \angle OGF = 45^\circ$ ,  $\therefore$  由勾股定理可得  $PG = \sqrt{2}$

$\therefore \alpha = FG + PG = 2 + \sqrt{2}$ . 故选 B.



9. (2012 江苏南京 2 分) 若反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  与一次函数  $y = x + 2$  的图像没有交点, 则 k 的值可以是【    】

- A. -2    B. -1    C. 1    D. 2

**【答案】** A.

**【考点】** 反比例函数与一次函数的交点问题, 一元二次方程的判别式.

**【分析】** 把两函数的解析式组成方程组, 再转化为求一元二次方程解答题, 求出 k 的取值范围, 找出符合条件的 k 的值即可:

$\because$  反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  与一次函数  $y = x + 2$  的图像没有交点,

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{k}{x} & \text{①} \\ y = x + 2 & \text{②} \end{cases} \text{ 无解, 即 } \frac{k}{x} = x + 2 \text{ 无解, 整理得 } x^2 + 2x - k = 0,$$

$\therefore \Delta = 4 + 4k < 0$ , 解得  $k < -1$ .

四个选项中只有  $-2 < -1$ , 所以只有 A 符合条件. 故选 A.

## 二、填空题

1. (江苏省南京市 2002 年 2 分) 点 A (1, m) 在函数  $y = 2x$  的图像上, 则点 A 关于 x 轴的对称的点坐标是

\_\_\_\_\_.

**【答案】** (1, -2) .

**【考点】** 直线上点的坐标与方程的关系, 关于 x 轴对称的点的坐标.

**【分析】**首先根据点在直线上，点的坐标满足方程的关系求出  $m$  的值，然后根据关于  $x$  轴对称的点的坐标规律：横坐标相同，纵坐标互为相反数，得出结果：

$\because$  点  $A(1, m)$  在函数  $y=2x$  的图像上， $\therefore m=2 \times 1=2$ 。

$\therefore$  点  $A(1, 2)$  关于  $x$  轴的对称点的坐标是  $(1, -2)$ 。

2. (江苏省 2009 年 3 分) 反比例函数  $y = -\frac{1}{x}$  的图象在第     ▲     象限.

**【答案】**二、四。

**【考点】**反比例函数的性质。

**【分析】**根据反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  的性质：当  $k > 0$  时，图象分别位于第一、三象限；当  $k < 0$  时，图象分别位于第二、四象限： $\because$  反比例函数  $y = -\frac{1}{x}$  的系数  $k = -1 < 0$ ， $\therefore$  图象两个分支分别位于第二、四象限。

3. (江苏省南京市 2010 年 2 分) 若反比例函数的图象经过点  $(-2, -1)$ ，则这个函数的图象位于第     ▲     象限.

**【答案】**一、三。

**【考点】**待定系数法，曲线上点的坐标与方程的关系，反比例函数的意义。

**【分析】**设该反比例函数的关系式为  $y = \frac{k}{x}$ ，根据题意得  $-1 = \frac{k}{-2}$ ，所以  $k=2 > 0$ ，因此该反比例函数位于第一、三象限。

4. (江苏省南京市 2011 年 2 分) 设函数  $y = \frac{2}{x}$  与  $y = x - 1$  的图象的交点坐标为  $(a, b)$ ，则  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  的值为     ▲    。

**【答案】** $-\frac{1}{2}$ 。

**【考点】**一次函数和反比例函数图象，曲线上点的坐标与方程的关系，等量代换。

**【分析】** $\because$  函数  $y = \frac{2}{x}$  与  $y = x - 1$  的图象的交点坐标为  $(a, b)$ ， $\therefore b = \frac{2}{a}$ ， $b = a - 1$ 。 $\therefore ab = 2$ ， $b - a = -1$ 。  
 $\therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} = -\frac{1}{2}$ 。

5. (2012 江苏南京 2 分) 已知一次函数  $y = kx + k - 3$  的图像经过点  $(2, 3)$ ，则  $k$  的值为     ▲    。

**【答案】**2。

**【考点】**直线上点的坐标与方程的关系。

**【分析】**根据点在直线上，点的坐标满足方程的关系，将  $(2, 3)$  代入  $y = kx + k - 3$ ，得

$3 = 2k + k - 3$ ，解得， $k = 2$ 。

## 三. 解答题

1. (2001 江苏南京 5 分) 在某一电路中, 保持电压不变, 电流  $I$  (安培) 与电阻  $R$  (欧姆) 成反比例, 当电阻  $R=5$  欧姆时, 电流  $I=2$  安培。

(1) 求  $I$  与  $R$  之间的函数关系式; (2) 当电流  $I=0.5$  安培时, 求电阻  $R$  的值。

【答案】解: (1) 设  $I = \frac{U}{R}$ ,

$\because$  当电阻  $R=5$  欧姆时, 电流  $I=2$  安培,  $\therefore 2 = \frac{U}{5}$ , 即  $U=10$ 。

$\therefore I$  与  $R$  之间的函数关系式为  $I = \frac{10}{R}$ 。

(2) 当  $I=0.5$  安培时,  $0.5 = \frac{10}{R}$  解得  $R=20$  (欧姆)。

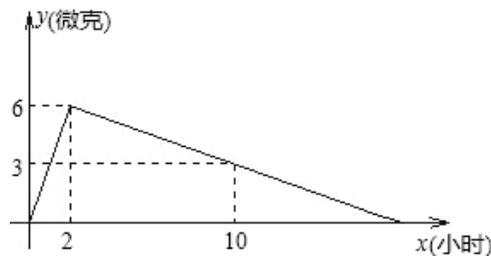
【考点】跨学科问题, 反比例函数的应用, 待定系数法, 曲线上点的坐标与方程的关系。

【分析】直接根据题意可以求出函数关系式, 然后根据函数关系式把  $I=0.5$  安培代入解析式可以求出电阻  $R$  的值。(学科网)

2. (2001 江苏南京 7 分) 某医药研究所开发了一种新药, 在试验药效时发现, 如果成人按规定剂量服用, 那么服药后 2 小时时血液中含药量最高, 达每毫升 6 微克 (1 微克=10<sup>-3</sup> 毫克), 接着逐步衰减, 10 小时时血液中含药量为每毫升 3 微克, 每毫升血液中含药量  $y$  (微克), 随时间  $x$  (小时) 的变化如图所示。当成人按规定剂量服药后,

(1) 分别求出  $x \leq 2$  和  $x \geq 2$  时,  $y$  与  $x$  之间的函数关系式;

(2) 如果每毫升血液中含药量为 4 微克或 4 微克以上时在治疗疾病时是有效的, 那么这个有效时间是多长?



【答案】解: (1) 当  $x \leq 2$  时, 设  $y=kx$ ,

把  $(2, 6)$  代入上式, 得  $k=3$ 。

$\therefore x \leq 2$  时,  $y=3x$ 。

当  $x \geq 2$  时, 设  $y=mx+n$ ,

把 (2, 6), (10, 3) 代入上式, 得: 
$$\begin{cases} 2m+n=6 \\ 10m+n=3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m=-\frac{3}{8} \\ n=\frac{27}{4} \end{cases}.$$

$\therefore x \geq 2$  时,  $y = -\frac{3}{8}x + \frac{27}{4}$ 。

(2) 把  $y=3$  代入  $y=3x$ , 可得  $x=1$ ,

由图象可知: 逐步衰减时, 当  $x=10$  时,  $y=3$ 。

$\therefore 10-1=9$ 。

$\therefore$  这个有效时间是 9 小时。

**【考点】** 一次函数的应用, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系。

**【分析】** (1) 直接根据图象上的点的坐标利用待定系数法求解即可求得答案, 注意当  $x < 2$  时  $y$  与  $x$  成正比例函数, 当  $x > 2$  时  $y$  与  $x$  成一次函数关系。

(2) 根据图象可知每毫升血液中含药量为 3 微克是在两个函数图象上都有, 所以把  $y=3$ , 代入  $y=3x$ , 求得开始到有效所用的时间, 由图象可知衰减过程中  $y=3$  时的时间, 求其差即可求得答案。

**3. (江苏省南京市 2002 年 6 分)** 声音在空气中传播的速度  $y$  (米/秒) (简称音速) 是气温  $x$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) 的一次函数, 下表列出了一组不同气温时的音速:

气温 $x$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	0	5	10	15	20
音速 $y$ (米/秒)	331	334	337	340	343

(1) 求  $y$  与  $x$  之间的函数关系式;

(2) 气温  $x=22$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) 时, 某人看到烟花燃放 5 秒后才听到声响, 那么此人与燃放的烟花所在地约相距多远?

**【答案】** 解: (1) 根据表中数据画图象可知  $y$  与  $x$  成一次函数关系, 故设  $y=kx+b$ ,

取两点 (0, 331), (5, 334) 代入关系式得

$$\begin{cases} 331=b \\ 334=5k+b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=\frac{3}{5} \\ b=331 \end{cases}.$$

$\therefore$  所求函数关系式为  $y = \frac{3}{5}x + 331$ 。

(2) 把  $x=22$  代入  $y = \frac{3}{5}x + 331$ , 得  $y = \frac{3}{5} \times 22 + 331 = 334\frac{1}{5}$ , 且  $334\frac{1}{5} \times 5 = 1721$ 。

$\therefore$  光速非常快, 传播时间可以忽略,  $\therefore$  此人与燃放烟花的所在地相距约 1721m。

**【考点】** 一次函数的应用, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系。

**【分析】** (1) 由表中的数据可知, 温度每升高  $5^{\circ}\text{C}$ , 声速就提高 3 米/秒, 所以  $y$  是  $x$  的一次函数, 利用待

定系数法即可求出该函数解析式;

(2) 令  $x=22$ , 求出此时的声速  $y$ , 然后利用路程=速度 $\times$ 时间即可求出该距离。

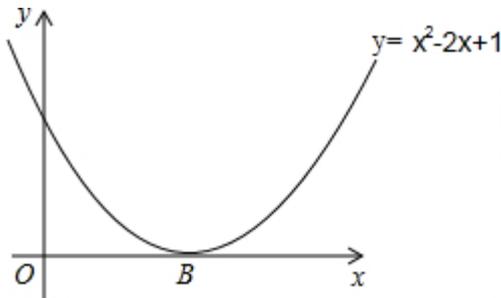
4. (江苏省南京市 2002 年 9 分) 已知抛物线  $y=a(x-t-1)^2+t^2$  ( $a, t$  是常数,  $a \neq 0, t \neq 0$ ) 的顶点是 A, 抛物线  $y=x^2-2x+1$  的顶点是 B.

(1) 判断点 A 是否在抛物线  $y=x^2-2x+1$  上, 为什么?

(2) 如果抛物线  $y=a(x-t-1)^2+t^2$  经过点 B,

①求  $a$  的值;

②这条抛物线与  $x$  轴的两个交点和它的顶点 A 能否构成直角三角形? 若能, 求出  $t$  的值; 若不能, 请说明理由。



【答案】解: (1) 由题意可知: A 点的坐标为  $(t+1, t^2)$ , 将 A 点的坐标代入抛物线  $y=x^2-2x+1$  中可得:

$$(t+1)^2 - 2(t+1) + 1 = t^2 + 2t + 1 - 2t - 2 + 1 = t^2$$

$\therefore$  A 点在抛物线  $y=x^2-2x+1$  上。

(2) ①由题意可知: B 点坐标为  $(1, 0)$ , 则有:  $0=a(1-t-1)^2+t^2$ , 解得  $a=-1$ 。

②根据①可知: 抛物线的解析式为  $y=-(x-t-1)^2+t^2$ 。

当  $y=0$  时,  $-(x-t-1)^2+t^2=0$ , 解得  $x=1$  或  $x=2t+1$

设抛物线与  $x$  轴的交点为 M, N, 那么 M 点的坐标为  $(1, 0)$ , N 点的坐标为  $(2t+1, 0)$ 。

$$\therefore AM^2=t^2+t^4, AN^2=t^2+t^4, MN^2=4t^2。$$

当  $\triangle AMN$  是直角三角形时,  $AM^2+AN^2=MN^2$ , 即  $(t^2+t^4) \times 2=4t^2$ , 解得  $t=1$  或  $t=-1$ 。

$\therefore$  能构成直角三角形, 此时  $t$  的值为 1 或 -1。

【考点】二次函数综合题, 曲线上点的坐标与方程的关系, 勾股定理和逆定理。

【分析】(1) 可将 A 点的坐标代入抛物线  $y=x^2-2x+1$  中, 即可判断出 A 点是否在这条抛物线上。

(2) ①先根据抛物线  $y = x^2 - 2x + 1$  得出 B 点的坐标, 然后将 B 点的坐标代入抛物线  $y = a(x-t-1)^2 + t^2$  中即可求出 a 的值。

②可先根据①得出的抛物线的解析式来求出抛物线与 x 轴两交点的坐标, 然后求出这两点之间和这两点与 A 之间的线段的长度, 由于 A 在这两交点的垂直平分线上, 因此只有一种情况, 即 A 为此等腰三角形的直角顶点, 因此可根据勾股定理求出 t 的值。

5. (江苏省南京市 2003 年 5 分) 已知二次函数  $y = ax^2 - 2$  的图象经过点 (1, -1). 求这个二次函数的解析式, 并判断该函数图象与 x 轴的交点的个数

**【答案】**解: 根据题意, 得  $-1 = a - 2$ ,  $\therefore a = 1$ 。

$\therefore$  这个二次函数解析式是  $y = x^2 - 2$ 。

$\therefore$  这个二次函数图象的开口向上, 顶点坐标是 (0, -2),

$\therefore$  该函数图象与 x 轴有两个交点。

**【考点】**曲线上点的坐标与方程的关系, 抛物线与 x 轴的交点。

**【分析】**首先将 (1, -1) 代入  $y = ax^2 - 2$  求出 a 值, 即可求出二次函数解析式。利用二次函数图象的性质可以解答与 x 轴的交点的个数。

6. (江苏省南京市 2003 年 5 分) 一定质量的氧气, 它的密度  $\rho$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) 是它的体积  $V$  ( $\text{m}^3$ ) 的反比例函数, 当  $V = 10 \text{m}^3$  时,  $\rho = 1.43 \text{kg}/\text{m}^3$ 。

(1) 求  $\rho$  与  $V$  的函数关系式;

(2) 求当  $V = 2 \text{m}^3$  时氧气的密度  $\rho$ 。

**【答案】**解: (1) 依题意, 设  $\rho = \frac{k}{V}$ ,

$\therefore$  当  $V = 10$  时,  $\rho = 1.43$ ,  $\therefore 1.43 = \frac{k}{10}$ , 即  $k = 14.3$ 。

$\therefore \rho$  与  $V$  的函数关系式是  $\rho = \frac{14.3}{V}$ 。

(2) 把  $V = 2$  代入  $\rho = \frac{14.3}{V}$  得:  $\rho = 7.15$ 。

$\therefore$  当  $V = 2 \text{m}^3$  时, 氧气的密度为  $7.15 (\text{kg}/\text{m}^3)$ 。

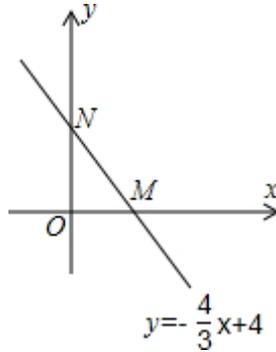
**【考点】**反比例函数的应用, 待定系数法, 曲线上点的坐标与方程的关系。

**【分析】**首先根据题意, 一定质量的氧气, 它的密度  $\rho$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) 是它的体积  $V$  ( $\text{m}^3$ ) 的反比例函数, 将数据代入用待定系数法可得反比例函数的关系式; 进一步求解可得答案。

7. (江苏省南京市 2003 年 8 分) 如图. 直线  $y = -\frac{4}{3}x + 4$  与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于点  $M$ 、 $N$ .

(1) 求  $M$ 、 $N$  两点的坐标;

(2) 如果点  $P$  在坐标轴上, 以点  $P$  为圆心,  $\frac{12}{5}$  为半径的圆与直线  $y = -\frac{4}{3}x + 4$  相切, 求点  $P$  的坐标.



**【答案】**解: (1) 当  $x=0$  时,  $y=4$ , 当  $y=0$  时,  $0 = -\frac{4}{3}x + 4$ ,  $\therefore x=3$ .

$\therefore M(3, 0)$ ,  $N(0, 4)$ .

(2) ①当  $P_1$  点在  $y$  轴上, 并且在  $N$  点的下方时,

设  $\odot P_1$  与直线  $y = -\frac{4}{3}x + 4$  相切于点  $A$ ,

连接  $P_1A$ , 则  $P_1A \perp MN$ ,  $\therefore \angle P_1AN = \angle MON = 90^\circ$ .

$\because \angle P_1NA = \angle MNO$ ,  $\therefore \triangle P_1AN \sim \triangle MON$ .  $\therefore \frac{P_1A}{MO} = \frac{P_1N}{MN}$ .

在  $Rt\triangle OMN$  中,  $OM=3$ ,  $ON=4$ ,  $\therefore MN=5$ .

又  $\because P_1A = \frac{12}{5}$ ,  $\therefore \frac{\frac{12}{5}}{3} = \frac{P_1N}{5}$ , 即  $P_1N=4$ .

$\therefore P_1$  点坐标是  $(0, 0)$ .

②当  $P_2$  点在  $x$  轴上, 并且在  $M$  点的左侧时, 同理可得  $P_2$  点坐标是  $(0, 0)$ .

③当  $P_3$  点在  $x$  轴上, 并且在  $M$  点的右侧时,

设  $\odot P_3$  与直线  $y = -\frac{4}{3}x + 4$  上切于点  $B$ ,

连接  $P_3B$ . 则  $P_3B \perp MN$ ,  $\therefore OA \parallel P_3B$ .

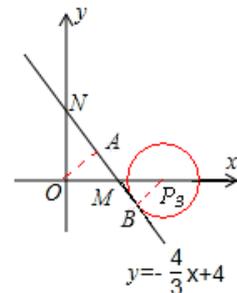
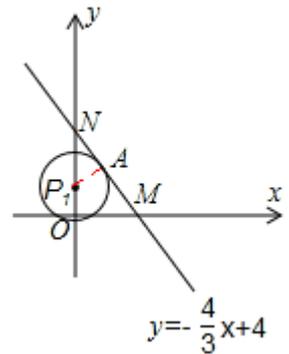
$\because OA = P_3B$ ,  $\therefore P_3M = OM = 3$ ,  $\therefore OP_3 = 6$ .

$\therefore P_3$  点坐标是  $(6, 0)$ ;

④当  $P_4$  点在  $y$  轴上, 并且在点  $N$  上方时, 同理可得  $P_4N = ON = 4$ .

$\therefore OP_4 = 8$ ,  $\therefore P_4$  点坐标是  $(0, 8)$ .

综上所述,  $P$  点坐标是  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, 8)$ .



**【考点】**一次函数综合题，直线上点的坐标与方程的关系，直线和圆相切的性质，相似三角形的判定和性质，

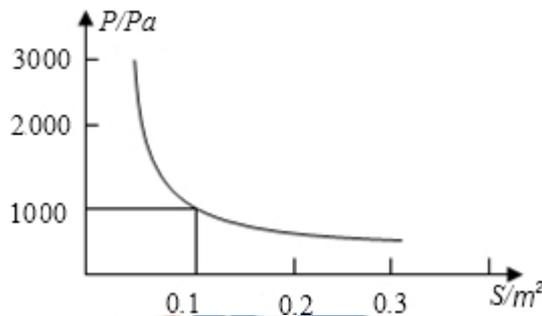
**【分析】**(1) 已知直线解析式，易求 M, N 点坐标。

(2) 分 P 点在 y 轴上，在 N 点的下方；在 y 轴上，在 N 点的上方；在 x 轴上，在 M 点的左侧；在 x 轴上，在 M 点的右侧四种情况讨论。根据圆的性质及相切的条件，又知道圆的半径，从而求出每种情况的 P 点坐标。

**8. (江苏省南京市 2004 年 6 分)** 在压力不变的情况下，某物体承受的压强 P (pa) 是它的受力面积  $S\text{m}^2$  的反比例函数，其图象如图所示。

(1) 求 P 与 S 之间的函数关系式；

(2) 求当  $S=0.5\text{m}^2$  时物体承受的压强 P。



**【答案】**解：(1) 设  $P=\frac{k}{S}$ ,

$\because$  点  $(0.1, 1000)$  在这个函数的图象上，

$\therefore 1000=\frac{k}{0.1}$ , 解得  $k=100$ 。

$\therefore P$  与  $S$  的函数关系式为  $P=\frac{100}{S}$ 。

(2) 当  $S=0.5\text{m}^2$  时,  $P=\frac{100}{0.5}=200$  (pa)。

**【考点】**反比例函数的应用，待定系数法，曲线上点的坐标与方程的关系。

**【分析】**观察图象易知 p 与 S 之间的是反比例函数关系，所以可以设  $P=\frac{k}{S}$ ，依据图象上点 A 的坐标可以求得 p 与 S 之间的函数关系式，并求得当  $S=0.5\text{m}^2$  时物体承受的压强 P。

**9. (江苏省南京市 2004 年 6 分)** (1) 如果二次函数  $y=x^2-2x+c$  的图象经过点  $(1, 2)$ ，求这个二次函数的解析式，并写出该函数图象的对称轴；

(2) 图象的对称轴是 y 轴的二次函数有无数个。试写出两个不同的二次函数解析式，使这两个函数图象的对称轴是 y 轴。

**【答案】**解：(1) 将 (1, 2) 代入  $y = x^2 - 2x + c$ , 得  $2 = 1 - 2 + c$ , 解得  $c = 3$ 。

$\therefore$  这个二次函数的解析式为  $y = x^2 - 2x + 3$ , 对称轴为  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ 。

(2) 一次项系数为 0 的二次函数的解析式:  $y = x^2 + 3$ ,  $y = 2x^2 + 6$  等, 答案不唯一。

**【考点】**待定系数法, 曲线上点的坐标与方程的关系, 二次函数的性质。

**【分析】**(1) 将 (1, 2) 代入  $y = x^2 - 2x + c$  即可求出  $c$  的值而得到这个二次函数的解析式, 化为顶点式 (或用公式) 可得该函数图象的对称轴。

(2) 图象的对称轴是  $y$  轴时一次项系数为 0, 因此写出一项系数为 0 的二次函数的解析式即可。

**10. (江苏省南京市 2004 年 6 分)** 某地举办乒乓球比赛的费用  $y$  (元) 包括两部分: 一部分是租用比赛场地等固定不变的费用  $b$ , 另一部分与参赛的人数  $x$  (人) 成正比, 当  $x = 20$  时,  $y = 1600$ , 当  $x = 30$  时,  $y = 2000$ 。

(1) 求  $y$  与  $x$  之间的函数关系式;

(2) 如果有 50 名运动员参赛, 且全部费用由运动员分摊, 那么每名运动员需支付多少元?

**【答案】**解：(1) 设  $y$  与  $x$  的函数关系式为  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ),

$$\text{则} \begin{cases} 20k + b = 1600 \\ 30k + b = 2000 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 10 \\ b = 800 \end{cases}$$

$\therefore y$  与  $x$  的函数关系式为  $y = 40x + 800$ 。

(2) 当  $x = 50$  时,  $y = 40 \times 50 + 800 = 2800$ ,

$\therefore$  全部费用由运动员分摊,  $\therefore \frac{2800}{50} = 56$ 。

答: 每名运动员需支付 56 元。

**【考点】**一次函数的应用, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系。

**【分析】**(1) 由于当  $x = 20$  时,  $y = 1600$ , 当  $x = 30$  时,  $y = 2000$ , 根据待定系数法列方程, 求函数关系式。

(2) 先根据函数解析式求出有 50 名运动员参赛时的比赛总费用, 再分摊给 50 名运动员即可。

**11. (江苏省南京市 2005 年 8 分)** 某种洗衣机在洗涤衣服时, 经历了进水、清洗、排水、脱水四个连续的过程, 其中进水、清洗、排水时洗衣机中的水量  $y$  (升) 与时间  $x$  (分钟) 之间的关系如折线图所示:

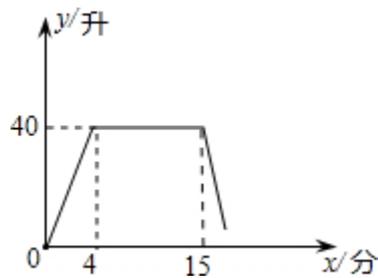
根据图象解答下列问题:

(1) 洗衣机的进水时间是多少分钟? 清洗时洗衣机中的水量是多少升?

(2) 已知洗衣机的排水速度为每分钟 19 升。

① 求排水时  $y$  与  $x$  之间的关系式;

② 如果排水时间为 2 分钟, 求排水结束时洗衣机中剩下的水量。



**【答案】**解：(1) 由图可知洗衣机的进水时间是 4 分钟清洗时洗衣机中的水量是 40 升。

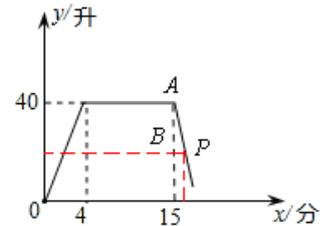
(2) ①如图，设排水时任一时间  $P(x, y)$ ，

∵排水速度为每分钟 19 升，

$$\therefore \frac{AB}{BP} = 19, \text{ 即 } \frac{40-y}{x-15} = 19$$

整理，得  $y = -19x + 325$ 。

∴排水时  $y$  与  $x$  之间的关系式为  $y = -19x + 325 (15 < x < 17)$



②∵排水的时间是 2 分钟，即  $x = 17$ 。

∴当  $x = 17$  时， $y = -19 \times 17 + 325 = 2$ 。

∴排水结束时洗衣机中剩下的水量是 2 升。

**【考点】**一次函数的应用，根据实际问题列一次函数关系式，直线上点的坐标与方程的关系。

**【分析】**(1) 由图象可知 0-4 分时是进水时间，4-15 分钟时时清洗时间，15 分钟以后是放水的时间。

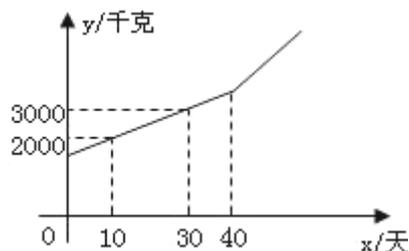
(2) ①根据图象中的信息和排水速度为每分钟 19 升列出等式即可。

②排水的时间是 2 分钟，即  $x = 17$ ，代入函数式即可求排水结束时洗衣机中剩下的水量。

**12. (江苏省南京市2006年8分)** 某块试验田里的农作物每天的需水量  $y$  (千克) 与生长时间  $x$  (天) 之间的关系如折线图所示. 这些农作物在第 10 天、第 30 天的需水量分别为 2000 千克、3000 千克，在第 40 天后每天的需水量比前一天增加 100 千克.

(1) 分别求出  $x \leq 40$  和  $x \geq 40$  时  $y$  与  $x$  之间的关系式;

(2) 如果这些农作物每天的需水量大于或等于 4000 千克时需要进行人工灌溉，那么应从第几天开始进行人工灌溉?



**【答案】**解：(1) 当  $x \leq 40$  时，设  $y = kx + b$ ，由直线经过  $(10, 2000)$ ， $(30, 3000)$  得

$$\begin{cases} 2000 = 10k + b \\ 3000 = 30k + b \end{cases}, \text{ 解这个方程组，得 } \begin{cases} k = 50 \\ b = 1500 \end{cases}.$$

∴当 $x < 40$ 时,  $y$ 与 $x$ 之间的关系式是 $y = 50x + 1500$ .

∴当 $x = 40$ 时,  $y = 50 \times 40 + 1500 = 3500$ .

∴在第40天后每天的需水量比前一天增加100千克,

∴  $\frac{y - 3500}{x - 40} = 100$ , 整理, 得 $y = 100x - 500$ .

∴当 $x \geq 40$ 时,  $y$ 与 $x$ 之间的关系式是 $y = 100x - 500$ .

(2) ∴当 $y \geq 4000$ 时,  $y$ 与 $x$ 之间的关系式是 $y = 100x - 500$ ,

∴由 $100x - 500 \geq 4000$ 得 $x \geq 45$ .

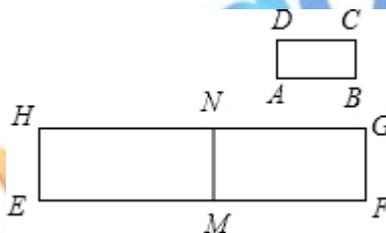
∴应从第45天开始进行人工灌溉。

**【考点】**一次函数的应用, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系, 解一元一次不等式。

**【分析】**(1) 在 $x \leq 40$ 时, 设 $y = kx + b$ . 把已知坐标代入求出 $k$ ,  $b$ 的值, 求出 $y$ 与 $x$ 的函数关系式; 在 $x \geq 40$ 时, 由在第40天后每天的需水量比前一天增加100千克, 列出等式而得到 $y$ 与 $x$ 的函数关系式。

(2) 令 $y \geq 4000$ , 转化为不等式问题求解。

**13. (江苏省南京市2006年8分)** 如图, 在矩形ABCD中,  $AB = 2AD$ , 线段 $EF = 10$ . 在 $EF$ 上取一点 $M$ , 分别以 $EM$ 、 $MF$ 为一边作矩形EMNH、矩形MFGN, 使矩形MFGN  $\sim$  矩形ABCD. 令 $MN = x$ , 当 $x$ 为何值时, 矩形EMNH的面积 $S$ 有最大值? 最大值是多少?



**【答案】**解: ∵矩形MFGN  $\sim$  矩形ABCD, ∴  $\frac{MN}{AD} = \frac{MF}{AB}$ .

∵  $AB = 2AD$ ,  $MN = x$ , ∴  $MF = 2x$ . ∴  $EM = EF - MF = 10 - 2x$ .

∴  $S = x(10 - 2x) = -2x^2 + 10x = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$ .

∴当 $x = \frac{5}{2}$ 时,  $S$ 有最大值为 $\frac{25}{2}$ .

**【考点】**二次函数综合题, 矩形的性质, 相似的性质, 二次函数的性质。

**【分析】**利用矩形相似, 可得到比例线段, 先设其中一段,  $MN = x$ , 再利用面积公式可得到 $S$ 关于 $x$ 的二次函数, 利用二次函数可求最大值。

**14. (江苏省南京市2007年7分)** 某市为了鼓励居民节约用水, 采用分段计费的方法按月计算每户家庭的水费, 月用水量不超过 $20\text{m}^3$ 时, 按 $2\text{元}/\text{m}^3$ 计费; 月用水量超过 $20\text{m}^3$ 时, 其中的 $20\text{m}^3$ 仍按 $2\text{元}/\text{m}^3$ 收费, 超过部分按 $2.6\text{元}/\text{m}^3$ 计费. 设每户家庭月用水量为 $x\text{m}^3$ 时, 应交水费 $y$ 元.

(1) 分别求出  $0 \leq x \leq 20$  和  $x > 20$  时  $y$  与  $x$  的函数表达式;

(2) 小明家第二季度交纳水费的情况如下:

月 分	四 月 份	五 月 份
交 费 金 额	30 元	34 元

小明家这个季度共用水多少立方米?

**【答案】**解: (1) 当  $0 \leq x \leq 20$  时,  $y$  与  $x$  的函数表达式是  $y = 2x$ ;

当  $x > 20$  时,  $y$  与  $x$  的函数表达式是  $y = 2 \times 20 + 2.6(x - 20)$ , 即  $y = 2.6x - 12$ 。

(2)  $\because$  小明家四、五月份的水费都不超过 40 元, 六月份的水费超过 40 元,

$\therefore$  把  $y = 30$  代入  $y = 2x$  中, 得  $x = 15$ ;

把  $y = 34$  代入  $y = 2x$  中, 得  $x = 17$ ;

把  $y = 42.6$  代入  $y = 2.6x - 12$  中, 得  $x = 21$ 。

$\therefore 15 + 17 + 21 = 53$ 。

答: 小明家这个季度共用水  $53\text{m}^3$ 。

**【考点】**一次函数的应用。

**【分析】**(1) 由月用水量不超过  $20\text{m}^3$  时, 按  $2\text{元}/\text{m}^3$  计费得出当  $0 \leq x \leq 20$  时,  $y$  与  $x$  的函数表达式。

(2) 由月用水量超过  $20\text{m}^3$  时, 其中的  $20\text{m}^3$  仍按  $2\text{元}/\text{m}^3$  收费, 超过部分按  $2.6\text{元}/\text{m}^3$  计费得出当  $x > 20$  时,  $y$  与  $x$  的函数表达式。

**15. (江苏省南京市 2008 年 8 分)** 已知二次函数  $y = x^2 + bx + c$  中, 函数  $y$  与自变量  $x$  的部分对应值如下表:

	-1	0	1	
--	----	---	---	--

10

5

2

- (1) 求该二次函数的关系式；
- (2) 当  $x$  为何值时， $y$  有最小值，最小值是多少？
- (3) 若  $A(m, y_1)$ ， $B(m+1, y_2)$  两点都在该函数的图象上，试比较  $y_1$  与  $y_2$  的大小。

**【答案】**解：(1) 根据题意，当  $x=0$  时， $y=5$ ；当  $x=1$  时， $y=2$ 。

$$\therefore \begin{cases} 5=c \\ 2=1+b+c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b=-4 \\ c=5 \end{cases}.$$

$\therefore$  该二次函数关系式为  $y=x^2-4x+5$ 。

$$(2) \because y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1,$$

$\therefore$  当  $x=2$  时， $y$  有最小值，最小值是 1。

(3)  $\because A(m, y_1)$ ， $B(m+1, y_2)$  两点都在函数  $y=x^2-4x+5$  的图象上，

$$\therefore y_1=m^2-4m+5, \quad y_2=(m+1)^2-4(m+1)+5=m^2-2m+2.$$

$$\therefore y_2-y_1=(m^2-2m+2)-(m^2-4m+5)=2m-3.$$

$\therefore$  当  $2m-3 < 0$ ，即  $m < \frac{3}{2}$  时， $y_1 > y_2$ ；

当  $2m-3=0$ ，即  $m=\frac{3}{2}$  时， $y_1=y_2$ ；

当  $2m-3 > 0$ ，即  $m > \frac{3}{2}$  时， $y_1 < y_2$ 。

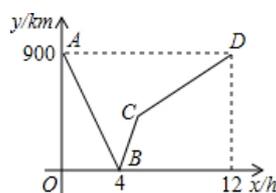
**【考点】**待定系数法求二次函数解析式，曲线上点的坐标与方程的关系，二次函数的最值。

**【分析】**(1) 从表格中取出 2 组解，利用待定系数法求解解析式。

(2) 利用顶点坐标求最值。

(3) 利用二次函数的单调性比较大小。

**16. (江苏省南京市 2008 年 10 分)** 一列快车从甲地驶往乙地，一列慢车从乙地驶往甲地，两车同时出发，设慢车行驶的时间为  $x(\text{h})$ ，两车之间的距离为  $y(\text{km})$ ，图中的折线表示  $y$  与  $x$  之间的函数关系。



根据图象进行以下探究:

### 信息读取

(1) 甲、乙两地之间的距离为\_\_\_\_\_km;

(2) 请解释图中点  $B$  的实际意义;

### 图象理解

(3) 求慢车和快车的速度;

(4) 求线段  $BC$  所表示的  $y$  与  $x$  之间的函数关系式, 并写出自变量  $x$  的取值范围;

### 问题解决

(5) 若第二列快车也从甲地出发驶往乙地, 速度与第一列快车相同. 在第一列快车与慢车相遇 30 分钟后, 第二列快车与慢车相遇. 求第二列快车比第一列快车晚出发多少小时?

**【答案】解:** (1) 900.

(2) 图中点  $B$  的实际意义是: 当慢车行驶 4h 时, 慢车和快车相遇.

(3) 由图象可知, 慢车 12h 行驶的路程为 900km, 所以慢车的速度为  $\frac{900}{12} = 75(\text{km/h})$ ;

当慢车行驶 4h 时, 慢车和快车相遇, 两车行驶的路程之和为 900km, 所以慢车和快车行驶的速度之和为  $\frac{900}{4} = 225(\text{km/h})$ , 所以快车的速度为 150km/h.

(4) 根据题意, 快车行驶 900km 到达乙地, 所以快车行驶  $\frac{900}{150} = 6(\text{h})$  到达乙地, 此时两车之间的距离为  $6 \times 75 = 450(\text{km})$ , 所以点  $C$  的坐标为 (6,450).

设线段  $BC$  所表示的  $y$  与  $x$  之间的函数关系式为  $y = kx + b$ , 把 (4,0), (6,450) 代入得

$$\begin{cases} 0 = 4k + b \\ 450 = 6k + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 225 \\ b = -900 \end{cases}.$$

$\therefore$  线段  $BC$  所表示的  $y$  与  $x$  之间的函数关系式为  $y = 225x - 900$ .

自变量  $x$  的取值范围是  $4 \leq x \leq 6$ .

(5) 慢车与第一列快车相遇 30 分钟后与第二列快车相遇, 此时, 慢车的行驶时间是 4.5h.

把  $x = 4.5$  代入  $y = 225x - 900$ , 得  $y = 112.5$ .

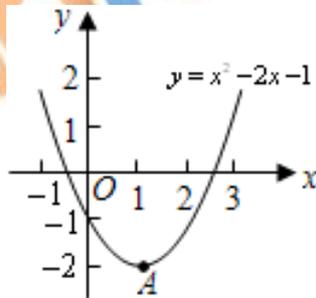
此时, 慢车与第一列快车之间的距离等于两列快车之间的距离是 112.5km, 所以两列快车出发的间隔时间是  $112.5 \div 150 = 0.75(\text{h})$ , 即第二列快车比第一列快车晚出发 0.75h.

**【考点】** 一次函数综合和应用题, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系.

- 【分析】**(1) 由图可知, 两车之间的距离开始和终了时相距 900 km, 即甲、乙两地之间的距离为 900 km。
- (2) 因为点  $B$  在  $x$  轴上, 即此时两车之间的距离为 0, 慢车和快车相遇。
- (3) 由图象慢车 12h 行驶的路程为 900km, 求出慢车的速度; 根据慢车行驶 4h 时, 慢车和快车相遇, 两车行驶的路程之和为 900km 求出快车的速度。
- (4) 求出点  $C$  的坐标, 用待定系数法即可求出线段  $BC$  所表示的  $y$  与  $x$  之间的函数关系式和自变量  $x$  的取值范围 (由点  $B$  和点  $C$  的横坐标确定)。
- (5) 慢车与第一列快车相遇 30 分钟后与第二列快车相遇, 此时, 慢车的行驶时间是 4.5h。由于  $4 \leq x \leq 6$ , 所以此时慢车在  $BC$  段上。因此, 代入  $y = 225x - 900$ , 求得慢车与第一列快车之间的距离 (即两列快车之间的距离), 除以速度, 即得两列快车出发的间隔时间 (即第二列快车比第一列快车晚出发时间)。

**17. (江苏省 2009 年 10 分)** 如图, 已知二次函数  $y = x^2 - 2x - 1$  的图象的顶点为  $A$ , 二次函数  $y = ax^2 + bx$  的图象与  $x$  轴交于原点  $O$  及另一点  $C$ , 它的顶点  $B$  在函数  $y = x^2 - 2x - 1$  的图象的对称轴上。

- (1) 求点  $A$  与点  $C$  的坐标;
- (2) 当四边形  $AOBC$  为菱形时, 求函数  $y = ax^2 + bx$  的关系式。



**【答案】**解: (1)  $\because y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ ,  $\therefore$  顶点  $A$  的坐标为  $(1, -2)$ , 对称轴为  $x=1$ 。

又  $\because$  二次函数  $y = ax^2 + bx$  的图象经过原点, 且它的顶点在二次函数  $y = x^2 - 2x - 1$  图象的对称轴  $x=1$  上,

$\therefore$  点  $C$  和点  $O$  关于直线  $x=1$  对称。  $\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(2, 0)$ 。

(2)  $\because$  四边形  $AOBC$  是菱形,

$\therefore$  点  $B$  和点  $A$  关于直线  $OC$  对称。  $\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(1, 2)$ 。

$\therefore$  二次函数  $y = ax^2 + bx$  的图象经过点  $B(1, 2)$ ,  $C(2, 0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} a+b=-2 \\ 4a+2b=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

$\therefore$  二次函数  $y = ax^2 + bx$  的关系式为  $y = -2x^2 + 4x$ 。

**【考点】** 二次函数的性质，点关于直线对称的性质，菱形的性质，曲线上点的坐标与方程的关系。

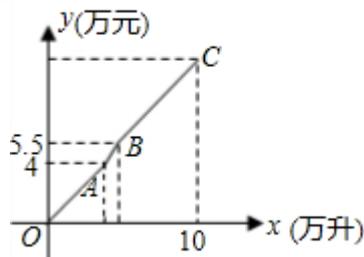
**【分析】** (1) 把  $y = x^2 - 2x - 1$  化为顶点式，即可求得点  $A$  的坐标。根据  $y = ax^2 + bx$  的图象经过原点，且它的顶点在二次函数  $y = x^2 - 2x - 1$  图象的对称轴  $x=1$  上，可知点  $C$  和点  $O$  关于直线  $x=1$  对称，从而根据点关于直线对称的性质求得点  $C$  的坐标。

(2) 由于四边形  $AOBC$  是菱形，根据菱形的性质，知点  $B$  和点  $A$  关于直线  $OC$  对称，从而求得点  $B$  的坐标。由二次函数  $y = ax^2 + bx$  的图象经过点  $B(1,2)$ ， $C(2,0)$ ，根据点在曲线上点的坐标满足方程的关系，列方程组求解即可。

**18. (江苏省 2009 年 12 分)** 某加油站五月份营销一种油品的销售利润  $y$  (万元) 与销售量  $x$  (万升) 之间函数关系的图象如图中折线所示，该加油站截止到 13 日调价时的销售利润为 4 万元，截止至 15 日进油时的销售利润为 5.5 万元。(销售利润 = (售价 - 成本价) × 销售量)

请你根据图象及加油站五月份该油品的所有销售记录提供的信息，解答下列问题：

- (1) 求销售量  $x$  为多少时，销售利润为 4 万元；
- (2) 分别求出线段  $AB$  与  $BC$  所对应的函数关系式；
- (3) 我们把销售每升油所获得的利润称为利润率，那么，在  $OA$ 、 $AB$ 、 $BC$  三段所表示的销售信息中，哪一段的利润率最大？(直接写出答案)



五月份销售记录	
1日:	有库存6万升, 成本价4元/升, 售价5元/升.
13日:	售价调整为5.5元/升.
15日:	进油4万升, 成本价4.5元/升.
31日:	本月共销售10万升.

**【答案】** 解: (1) 根据题意, 当销售利润为 4 万元, 销售量为  $4 \div (5 - 4) = 4$  (万升)。

答: 销售量  $x$  为 4 万升时销售利润为 4 万元。

(2)  $\because$  点  $A$  的坐标为  $(4,4)$ , 从 13 日到 15 日利润为  $5.5 - 4 = 1.5$  (万元),

$\therefore$  销售量为  $1.5 \div (5.5 - 4) = 1$  (万升)。  $\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(5.5, 5.5)$ 。

设线段  $AB$  所对应的函数关系式为  $y = kx + b$ ,

$$\text{则} \begin{cases} 4 = 4k + b \\ 5.5 = 5k + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 1.5 \\ b = -2 \end{cases}.$$

$\therefore$  线段  $AB$  所对应的函数关系式为  $y = 1.5x - 2 (4 \leq x \leq 5)$ 。

$\therefore$  从 15 日到 31 日销售 5 万升, 利润为  $1 \times 1.5 + 4 \times (5.5 - 4.5) = 5.5$  (万元),

$\therefore$  本月销售该油品的利润为  $5.5 + 5.5 = 11$  (万元)。  $\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(10, 11)$ 。

设线段  $BC$  所对应的函数关系式为  $y = mx + n$ ,

$$\text{则} \begin{cases} 5.5 = 5m + n \\ 11 = 10m + n \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m = 1.1 \\ n = 0 \end{cases}.$$

$\therefore$  线段  $BC$  所对应的函数关系式为  $y = 1.1x (5 \leq x \leq 10)$ 。

(3) 线段  $AB$ 。

**【考点】** 一次函数的应用, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系。

**【分析】** (1) 根据公式: 销售利润 = (售价 - 成本价)  $\times$  销售量, 在已知售价和成本价时, 可求销售利润为 4 万元时的销售量: 销售量 = 销售利润  $\div$  (售价 - 成本价)。

(2) 分别求出点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的坐标, 根据点在直线上, 点的坐标满足方程的关系, 用待定系数法即可求出  $AB$  和  $BC$  所对应的函数关系式。

$$(3) \text{ } OA \text{ 段的利润率} = \frac{\text{销售利润}}{\text{销售量} \times \text{售价}} = \frac{4 \text{ 万元}}{4 \text{ 万升} \times 5 \text{ 元/升}} = 20\% ;$$

$$AB \text{ 段的利润率} = \frac{\text{销售利润}}{\text{销售量} \times \text{售价}} = \frac{1.5 \text{ 万元}}{1 \text{ 万升} \times 5.5 \text{ 元/升}} \approx 27.3\% ;$$

$$BC \text{ 段的利润率} = \frac{\text{销售利润}}{\text{销售量} \times \text{售价}} = \frac{5.5 \text{ 万元}}{5 \text{ 万升} \times 5.5 \text{ 元/升}} = 20\% .$$

$\therefore$   $AB$  段的利润率最大。

**19. (江苏省南京市 2010 年 7 分)** 已知点  $A(1, 1)$  在二次函数  $y = x^2 - 2ax + b$  的图象上。

(1) 用含  $a$  的代数式表示  $b$ ;

(2) 如果该二次函数的图象与  $x$  轴只有一个交点, 求这个二次函数的图象的顶点坐标。

**【答案】** 解: (1)  $\because$  点  $A(1, 1)$  在二次函数  $y = x^2 - 2ax + b$  的图象上,

$$\therefore 1 = 1 - 2a + b, \text{ 可得 } b = 2a.$$

(2)  $\because$  二次函数的图象与  $x$  轴只有一个交点,

$$\therefore \text{方程 } x^2 - 2ax + b = 0 \text{ 有两个相等的实数根。}$$

$\therefore \Delta = 4a^2 - 4b = 4a^2 - 8a = 0$ , 解得  $a=0$  或  $a=2$ .

当  $a=0$  时,  $y=x^2$ , 这个二次函数的顶点坐标为  $(0, 0)$ ;

当  $a=2$  时,  $y=x^2-4x+4$ , 这个二次函数的顶点坐标为  $(2, 0)$ .

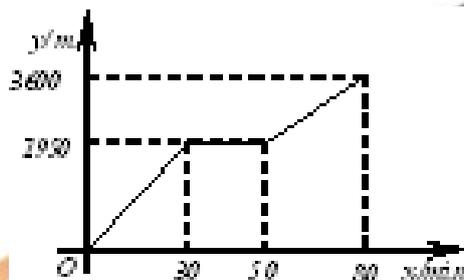
$\therefore$  这个二次函数的顶点坐标为  $(0, 0)$  或  $(2, 0)$ .

**【考点】** 曲线上点的坐标与方程的关系, 一元二次方程根的判别式, 二次函数的性质.

**【分析】** (1) 根据题意得  $1=1-2a+b$ , 所以  $b=2a$ .

(2) 由题意知方程  $x^2-2ax+b=0$  有两个相等的实数根, 所以  $4a^2-4b=0$ , 由 (1)  $b=2a$  得  $4a^2-8a=0$ , 解得  $a=0$ , 或  $a=2$ . 从而分类可求得该二次函数的图象的顶点坐标.

**20. (江苏省南京市 2011 年 7 分)** 小颖和小亮上山游玩, 小颖乘会缆车, 小亮步行, 两人相约在山顶的缆车终点会合. 已知小亮行走到缆车终点的路程是缆车到山顶的线路长的 2 倍, 小颖在小亮出发后 50 min 才乘上缆车, 缆车的平均速度为 180 m/min. 设小亮出发  $x$  min 后行走的路程为  $y$  m. 图中的折线表示小亮在整个行走过程中  $y$  与  $x$  的函数关系



(1) 小亮行走的总路程是 3600 m, 他途中休息了 20 min.

(2) ① 当  $50 \leq x \leq 80$  时, 求  $y$  与  $x$  的函数关系式;

② 当小颖到达缆车终点为时, 小亮离缆车终点的路程是多少?

**【答案】** 解: (1) 3600, 20.

(2) ① 当  $50 \leq x \leq 80$  时, 设  $y$  与  $x$  的函数关系式为  $y = kx + b$ .

根据题意, 当  $x = 50$  时,  $y = 1950$ ; 当  $x = 80$ ,  $y = 3600$ .

$\therefore \begin{cases} 50k + b = 1950 \\ 8k + b = 3600 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k = 55 \\ b = -800 \end{cases}$ . 所以,  $y$  与  $x$  的函数关系式为  $y = 55x - 800$ .

② 缆车到山顶的路线长为  $3600 \div 2 = 1800$  (m),

缆车到达终点所需时间为  $1800 \div 180 = 10$  (min).

小颖到达缆车终点时, 小亮行走的时间为  $10 + 50 = 60$  (min).

把  $x = 60$  代入  $y = 55x - 800$ , 得  $y = 55 \times 60 - 800 = 2500$ .

所以, 当小颖到达缆车终点时, 小亮离缆车终点的路程是  $3600-2500=1100$  ( $m$ ).

**【考点】**一次函数的图象和应用, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系.

**【分析】**(1) 看图可知, 小亮行走的总路程是  $3600m$ , 他途中休息了  $50-30=20$  min.

(2) 当  $50 \leq x \leq 80$  时, 求  $y$  与  $x$  的函数关系式, 看图可知, 点  $(50, 1950)$ ,  $(80, 3600)$  在函数图像上, 坐标满足函数关系式, 用待定系数可求.

由路程, 速度, 时间的关系求出缆车到达终点所需时间, 从而求出小颖到达缆车终点时, 小亮行走的时间, 代入函数关系式即得小亮离缆车终点的路程.

**21. (江苏省南京市 2011 年 7 分)** 已知函数  $y = mx^2 - 6x + 1$  ( $m$  是常数).

(1) 求证: 不论  $m$  为何值, 该函数的图象都经过  $y$  轴上的一个定点;

(2) 若该函数的图象与  $x$  轴只有一个交点, 求  $m$  的值.

**【答案】**解: (1) 当  $x=0$  时,  $y=1$ .

$\therefore$  不论  $m$  为何值, 函数  $y = mx^2 - 6x + 1$  的图象经过  $y$  轴上的一个定点  $(0, 1)$ .

(2) ① 当  $m=0$  时, 函数  $y = -6x + 1$  的图象与  $x$  轴只有一个交点;

② 当  $m \neq 0$  时, 若函数  $y = mx^2 - 6x + 1$  的图象与  $x$  轴只有一个交点, 则方程  $mx^2 - 6x + 1 = 0$  有两个相等的实数根, 所以  $(-6)^2 - 4m = 0$ ,  $m = 9$ .

综上, 若函数  $y = mx^2 - 6x + 1$  的图象与  $x$  轴只有一个交点, 则  $m$  的值为  $0$  或  $9$ .

**【考点】**函数图象上点的坐标与方程的关系, 二次函数与一元二次方程的关系.

**【分析】**(1) 由于二次函数的常数项为  $1$ , 故  $x=0$  时,  $y=1$  得证.

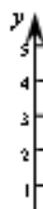
(2) 虑一次函数和二次函数两种情况.  $m=0$  函数为一次函数, 与  $X$  轴有一个交点.  $m \neq 0$  函数为二次函数, 由函数  $y=f(x)$  与  $X$  轴有一个交点的要求, 对应的一元二次方程  $f(x)=0$  有两个相等的实数根, 即根的判别式等于  $0$ , 从而求解. 也可以考虑二次函数顶点的纵坐标为  $0$  求解, 即  $\frac{4 \cdot m \cdot 1 - (-6)^2}{4m} = 0 \Rightarrow m = 9$ .

**22. (江苏省南京市 2011 年 11 分)** **问题情境:** 已知矩形的面积为  $a$  ( $a$  为常数,  $a > 0$ ), 当该矩形的长为多少时, 它的周长最小? 最小值是多少?

**数学模型:** 设该矩形的长为  $x$ , 周长为  $y$ , 则与  $x$  的函数关系式为  $y = 2(x + \frac{a}{x})(x > 0)$ .

**探索研究:** (1) 我们可以借鉴以前研究函数的经验, 先探索函数  $y = x + \frac{1}{x}(x > 0)$  的图象性质.

17. 填写下表, 画出函数的图象:



x	.....	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	.....
y	.....								.....

②观察图象，写出该函数两条不同类型的性质；

③在求二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的最大(小)值时，除了通过观察图象，还可以通过配方

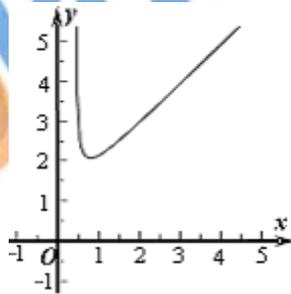
得到. 请你通过配方求函数  $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$  的最小值.

解决问题:(2)用上述方法解决“问题情境”中的问题，直接写出答案.

**【答案】** 解:(1)①

x	.....	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	.....
y	.....	$\frac{17}{4}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{17}{4}$	.....

函数  $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$  的图象如图:



②本题答案不唯一，下列解法供参考.

当  $0 < x < 1$  时， $y$  随  $x$  增大而减小；当  $x > 1$  时， $y$  随  $x$  增大而增大；当  $x = 1$  时函数

$y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$  的最小值为 2.

$$\begin{aligned} \text{③ } y = x + \frac{1}{x} &= (\sqrt{x})^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} \\ &= \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2 \end{aligned}$$

当  $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}} = 0$ ，即  $x = 1$  时，函数  $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$  的最小值为 2.

(2)当该矩形的长为  $\sqrt{a}$  时，它的周长最小，最小值为  $4\sqrt{a}$ 。

**【考点】**画和分析函数的图象，配方法求函数的最大(小)值。(学科网 www.zxxk.com)

**【分析】**(1)将  $x$  值代入函类数关系式求出  $y$  值，描点作图即可。然后分析函数图像。

$$\begin{aligned} \text{(2)仿(1)③ } y &= 2\left(x + \frac{a}{x}\right) = 2\left[(\sqrt{x})^2 + \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2\right] \\ &= 2\left[(\sqrt{x})^2 + \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}} + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}}\right] = 2(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}})^2 + 4\sqrt{a} \end{aligned}$$

所以，当  $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}} = 0$ ，即  $x = \sqrt{a}$  时，函数  $y = 2\left(x + \frac{a}{x}\right) (x > 0)$  的最小值为  $4\sqrt{a}$