

南京中考 12 年（2001-2012）数学试题分类解析汇编（12 专题）

专题 11：押轴题

一、选择题

1. (2001 江苏南京 2 分) 一旅客携带了 30 千克行李从南京禄口国际机场乘飞机去天津，按民航规定，旅客最多可免费携带 20 千克行李，超重部分每千克按飞机票价格的 1.5% 购买行李票，现该旅客购买了 120 元的行李票，则他的飞机票价格为【 】

- A. 1000 元 B. 800 元 C. 600 元 D. 400 元

【答案】B。

【考点】一元一次方程的应用（经济问题）。

【分析】设他的飞机票价格为 x 元，根据等量关系“超重部分每千克按飞机票价格的 1.5% 购买”，而超重部分为 $(30-20)$ 千克，故得方程： $(30-20) \times 1.5\%x = 120$ ，解得： $x = 800$ 。故选 B。

2. (江苏省南京市 2002 年 2 分) 某种出租车的收费标准是：起步价 6 元（即行驶距离不超过 3 千米都需付 7 元车费），超过 3 千米以后，每增加 1 千米，加收 1.4 元（不足 1 千米按 1 千米计），某人乘这种出租车从甲地到乙地支付车费 17.2 元，设此人从甲地到乙地经过的路程为 x 千米，则 x 的最大值是【 】

- A、13 B、11 C、9 D、7

【答案】B。

【考点】一元一次不等式的应用。

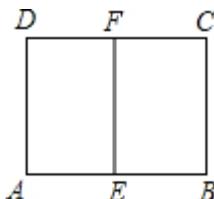
【分析】已知从甲地到乙地共需支付车费 17.2 元，从甲地到乙地经过的路程为 x 千米，从而根据题意列出不等式，得出答案：

$$\because \text{支付车费为 } 17.2 \text{ 元} > \text{起步价 } 6 \text{ 元}, \therefore x > 3 \text{ km}.$$

$$\therefore 1.4(x-3) + 6 \leq 17.2, \text{ 解得: } x \leq 11.$$

$$\therefore x \text{ 的最大值为 } 11 \text{ 千米。故选 B。}$$

3. (江苏省南京市 2003 年 2 分) 如图，一张矩形报纸 ABCD 的长 $AB = a \text{ cm}$ ，宽 $BC = b \text{ cm}$ ，E、F 分别是 AB、CD 的中点，将这张报纸沿着直线 EF 对折后，矩形 AEFB 的长与宽之比等于矩形 ABCD 的长与宽之比，则 $a : b$ 等于【 】。



- (A) $\sqrt{2} : 1$ (B) $1 : \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3} : 1$ (D) $1 : \sqrt{3}$

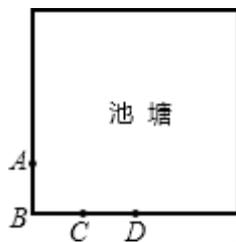
【答案】 A。

【考点】 折叠问题，比例线段，比例的性质。

【分析】 $\because b : \frac{a}{2} = a : b, \therefore a^2 = 2b^2. \therefore a = \sqrt{2}b. \therefore a : b = \sqrt{2} : 1.$ 故选 A。

4. (江苏省南京市 2004 年 2 分) 如图所示，边长为 12m 的正方形池塘的周围是草地，池塘边 A, B, C, D 处各有一棵树，且 $AB=BC=CD=3m$ ，现用长 4m 的绳子将羊拴在一棵树上，为了使在草地上活动区域的面积最大，应将绳子拴在【 】

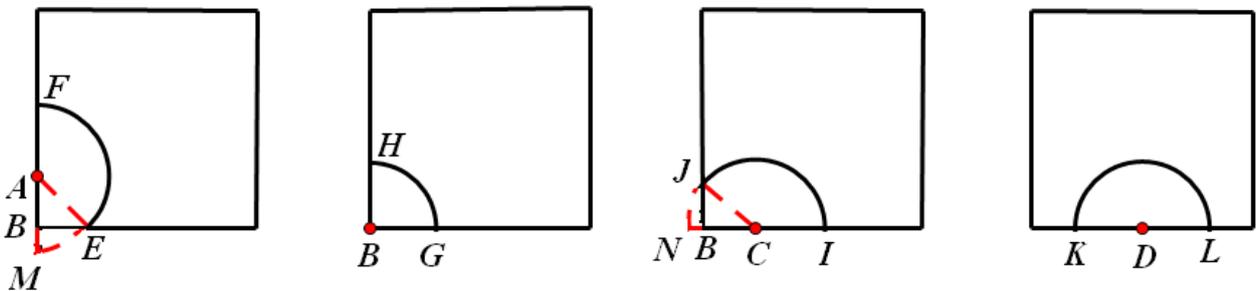
- A、A 处 B、B 处 C、C 处 D、D 处



【答案】 D。

【考点】 面积大小的比较，矩形和圆的性质。

【分析】 分别画出图形进行比较即可：



绳子拴在 A 处时，羊在草地上活动区域是圆心角为 $\angle EAF$ 半径为 4 的扇形加上直角三角形 ABE 的面积，它小于半径为 4 的半圆面积；

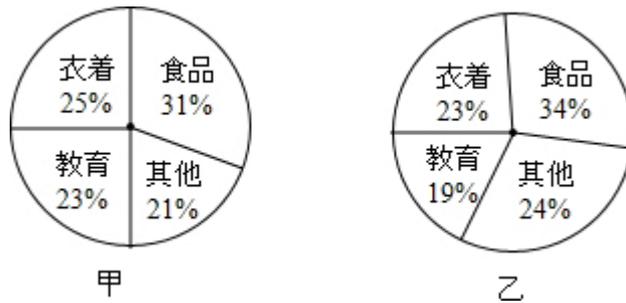
绳子拴在 B 处时，羊在草地上活动区域是半径为 4 的 $\frac{1}{4}$ 圆面积；

绳子拴在 C 处时，羊在草地上活动区域与绳子拴在 A 处时的面积一样；

绳子拴在 D 处时，羊在草地上活动区域是半径为 4 的半圆面积。

因此，为了使羊在草地上活动区域的面积最大，应将绳子拴在 D 处。故选 D。

5. (江苏省南京市 2005 年 2 分) 下图是甲、乙两户居民家庭全年支出费用的扇形统计图。



根据统计图，下面对全年食品支出费用判断正确的是【 】

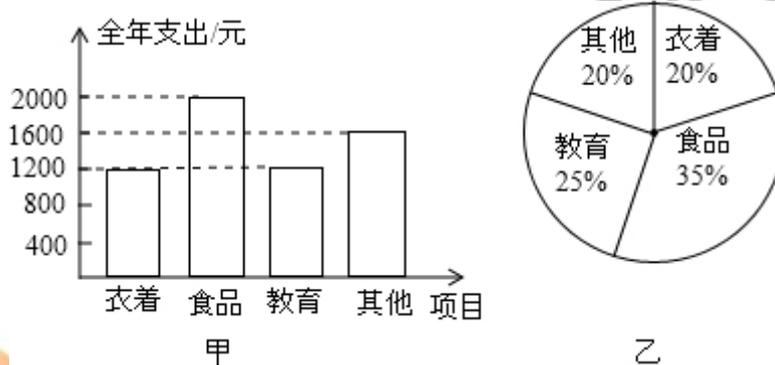
- A、甲户比乙户多
- B、乙户比甲户多
- C、甲、乙两户一样多
- D、无法确定哪一户多

【答案】D。

【考点】扇形统计图。

【分析】根据扇形图的意义，本题中的总量不明确，所以在两个图中无法确定哪一户多。故选D。

6. (江苏省南京市2006年2分) 下面是两户居民家庭全年各项支出的统计图。



根据统计图，下列对两户教育支出占全年总支出的百分比作出的判断中，正确的是【 】

- A. 甲户比乙户大
- B. 乙户比甲户大
- C. 甲、乙两户一样大
- D. 无法确定哪一户大

【答案】B。

【考点】扇形统计图，条形统计图，频数、频率和总量的关系。

【分析】根据条形统计图求出甲户教育支出占全年总支出的百分比，再结合扇形统计图中的乙户教育支出占全年总支出的百分比是 25%，进行比较即可：

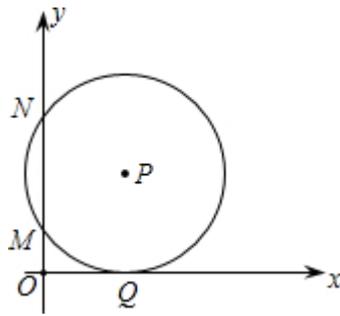
甲户教育支出占全年总支出的百分比 $1200 \div (1200 \times 2 + 2000 + 1600) = 20\%$ ，

乙户教育支出占全年总支出的百分比是 25%。

故选 B。

7. (江苏省南京市 2007 年 2 分) 如图，在平面直角坐标系中，点 P 在第一象限，⊙P 与 x 轴相切于点 Q，

与 y 轴交于 M (0, 2)，N (0, 8) 两点，则点 P 的坐标是【 】



- A. (5,3) B. (3,5) C. (5,4) D. (4,5)

【答案】 D。

【考点】 坐标与图形性质，切割线定理，勾股定理，垂径定理。

【分析】 根据已知条件，纵坐标易求；再根据切割线定理即 $OQ^2 = OM \cdot ON$ 求 OQ 可得点 P 的横坐标，从而根据勾股定理，垂径定理可得点 P 的纵坐标：

连接 PQ ，过点 P 作 $PD \perp MN$ 于 D ，连接 PO 。

$\because \odot P$ 与 x 轴相切于点 Q ， $\therefore PQ \perp OQ$ ，

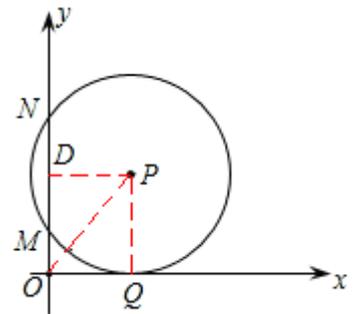
即点 P 的横坐标 = 点 Q 的横坐标。

\because 又 $\odot P$ 与 y 轴交于 $M(0, 2)$ ， $N(0, 8)$ 两点，

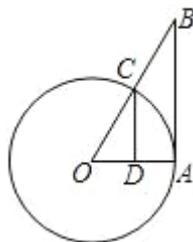
$\therefore OM = 2$ ， $OD = 5$ ， $DM = 3$ 。

$\therefore OQ^2 = OM \cdot ON = 2 \times 8 = 16$ ， $OQ = 4$ 。

$\therefore PD = 4$ ， $PQ = OD = 3 + 2 = 5$ ，即点 P 的坐标是 $(4, 5)$ 。故选 D。



8. (江苏省南京市 2008 年 2 分) 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 1， AB 与 $\odot O$ 相切于点 A ， OB 与 $\odot O$ 交于点 C ， $OD \perp OA$ ，垂足为 D ，则 $\cos \angle AOB$ 的值等于【 】



- A. OD B. OA C. CD D. AB

【答案】 A。

【考点】 切线的性质，锐角三角函数的定义。

【分析】 利用余弦的定义求解：

$\because CD \perp OA$ ， $\therefore \angle CDO = 90^\circ$ 。

$\because OC = 1$ ， $\therefore \cos \angle AOB = OD : OC = OD$ 。故选 A。

9. (江苏省 2009 年 3 分) 下面是按一定规律排列的一列数：

$$\text{第 1 个数: } \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right);$$

$$\text{第 2 个数: } \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right);$$

$$\text{第 3 个数: } \frac{1}{4} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) \left(1 + \frac{(-1)^4}{5}\right) \left(1 + \frac{(-1)^5}{6}\right);$$

.....

$$\text{第 } n \text{ 个数: } \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n}\right).$$

那么, 在第 10 个数、第 11 个数、第 12 个数、第 13 个数中, 最大的数是【 】

- A. 第 10 个数 B. 第 11 个数 C. 第 12 个数 D. 第 13 个数

【答案】 A.

【考点】 分类归纳 (数字的变化类).

【分析】 根据题意找出规律然后依次解得答案进行比较:

$$\text{第 1 个数: } \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) = 0;$$

$$\text{第 2 个数: } \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6};$$

$$\text{第 3 个数: } \frac{1}{4} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) \left(1 + \frac{(-1)^4}{5}\right) \left(1 + \frac{(-1)^5}{6}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4};$$

按此规律,

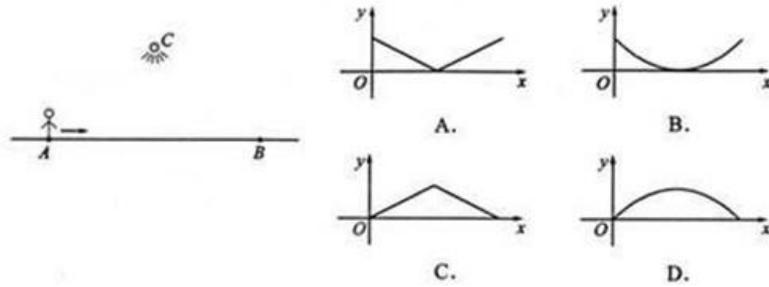
$$\text{第 } n-1 \text{ 个数: } \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{2n-3}}{2n-2}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{2-n}{2n};$$

$$\text{第 } n \text{ 个数: } \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1-n}{2(n+1)}.$$

$$\therefore \frac{2-n}{2n} - \frac{1-n}{2(n+1)} = \frac{(2-n)(n+1) - n(1-n)}{2n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

$\therefore n$ 越大, 第 n 个数越小, 所以选 A.

10. (江苏省南京市 2010 年 2 分) 如图, 夜晚, 小亮从点 A 经过路灯 C 的正下方沿直线走到点 B, 他的影长 y 随他与点 A 之间的距离 x 的变化而变化, 那么表示 y 与 x 之间的函数关系的图象大致为【 】



【答案】 A。

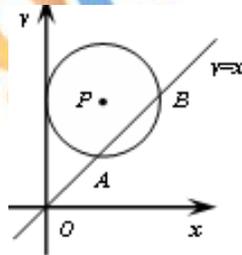
【考点】 函数的图象，中心投影，相似三角形的判定和性质。

【分析】 由生活经验知：当小亮走到路灯的正下方时，此时影长为 0，因此可排除选项 C、D。在确定答案是选项 A 或 B 上来探求；

设小亮身高为 a ，路灯 C 到路面的距离为 h ，点 A 到路灯正下方的距离为 b ，如图，由中心投影得 $\frac{a}{h} = \frac{y}{b-x+y}$ ，整理得 $y = -\frac{a}{h-a}x + \frac{ab}{h-a}$ ($0 \leq x \leq b$)， $\therefore y$ 与 x 之间的函数关系是一次函数关系。同理

可知小亮从路灯正下方继续行走的情况也是一次函数关系。故选 A。

11. (江苏省南京市 2011 年 2 分) 如图，在平面直角坐标系中， $\odot P$ 的圆心是 $(2, a)$ ($a > 2$)，半径为 2，函数 $y = x$ 的图象被 $\odot P$ 的弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ ，则 a 的值是【 】



- A. $2\sqrt{3}$ B. $2+2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2+\sqrt{3}$

【答案】 B。

【考点】 一次函数的应用，弦径定理，勾股定理，对顶角的性质，三角形内角和定理。

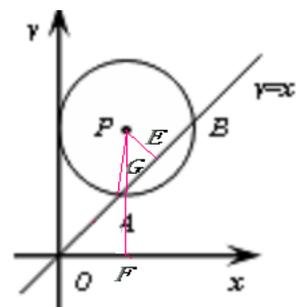
【分析】 连接 PA, PB, 过点 P 作 $PE \perp AB$ 于 E, 作 $PF \perp x$ 轴于 F, 交 AB 于 G, 分别求出 PD、DC, 相加即可；

\because 在 $Rt\triangle PAE$ 中，由弦径定理可得 $AE = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$ ， $PA = 2$ ，

\therefore 由勾股定理可得 $PE = 1$ 。

又由 $y = x$ 可得， $\angle OGF = \angle GOF = 45^\circ$ ， $FG = OF = 2$ 。

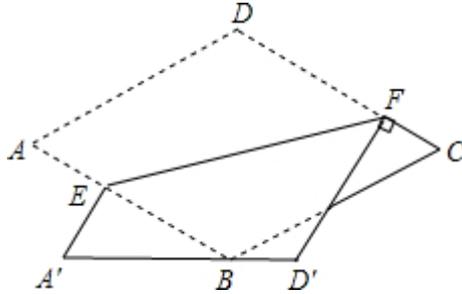
又 $\because PE \perp AB$ ， $PF \perp OF$ ，



∴在 Rt△EPG 中, $\angle EPG = \angle OGF = 45^\circ$, ∴由勾股定理可得 $PG = \sqrt{2}$

∴ $a = FG + PG = 2 + \sqrt{2}$ 。故选 B。

12. (2012 江苏南京 2 分) 如图, 菱形纸片 ABCD 中, $\angle A = 60^\circ$, 将纸片折叠, 点 A、D 分别落在 A'、D' 处, 且 A'D' 经过 B, EF 为折痕, 当 $D'F \perp CD$ 时, $\frac{CF}{FD}$ 的值为【 】



- A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{2\sqrt{3}-1}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{8}$

【答案】A。

【考点】翻折变换（折叠问题），菱形的性质，平行的性质，折叠的性质，锐角三角函数定义，特殊角的三角函数值。

【分析】延长 DC 与 A'D', 交于点 M,

∴在菱形纸片 ABCD 中, $\angle A = 60^\circ$,

∴ $\angle DCB = \angle A = 60^\circ$, $AB \parallel CD$ 。

∴ $\angle D = 180^\circ - \angle A = 120^\circ$ 。

根据折叠的性质, 可得

$\angle A'D'F = \angle D = 120^\circ$;

∴ $\angle FD'M = 180^\circ - \angle A'D'F = 60^\circ$ 。

∵ $D'F \perp CD$, ∴ $\angle D'FM = 90^\circ$, $\angle M = 90^\circ - \angle FD'M = 30^\circ$ 。

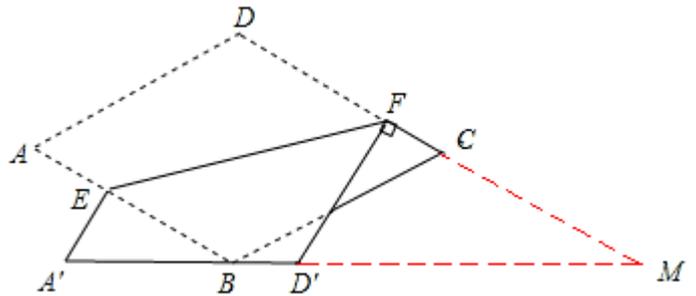
∵ $\angle BCM = 180^\circ - \angle BCD = 120^\circ$, ∴ $\angle CBM = 180^\circ - \angle BCM - \angle M = 30^\circ$ 。∴ $\angle CBM = \angle M$ 。

∴ $BC = CM$ 。

设 $CF = x$, $D'F = DF = y$, 则 $BC = CM = CD = CF + DF = x + y$ 。∴ $FM = CM + CF = 2x + y$,

在 Rt△D'FM 中, $\tan \angle M = \tan 30^\circ = \frac{D'F}{FM} = \frac{y}{2x + y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ∴ $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}y$ 。

∴ $\frac{CF}{FD} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 。故选 A。



二、填空题

1. (2001 江苏南京 2 分) 已知 $\odot O$ 的半径为 4cm, AB 是 $\odot O$ 的弦, 点 P 在 AB 上, 且 $OP=2\text{cm}$, $PA=3\text{cm}$, 则 $PB=$ ▲ cm.

【答案】 4.

【考点】 相交弦定理.

【分析】 根据相交弦定理“圆内两弦相交于圆内一点, 各弦被这点所分得的两线段的长的乘积相等”进行计算:

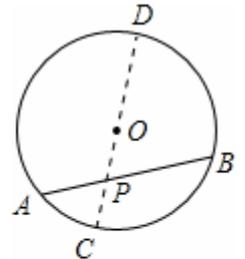
如图, 作直线 OP 交 $\odot O$ 于 C、D 两点,

$\because \odot O$ 的半径为 4cm, $OP=2\text{cm}$, $PA=3\text{cm}$,

$\therefore PC=4-2=2\text{cm}$, $PD=4+2=6\text{cm}$.

由相交弦定理得: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, $\therefore PB = \frac{PC \cdot PD}{PA} = \frac{2 \times 6}{3} = 4$ (cm).

【没学相交弦定理的可连接 AC、BD, 应用 $\triangle APC \sim \triangle DPB$ 求解】



2. (江苏省南京市 2002 年 2 分) 下列命题: (1) 所有的等腰三角形都相似; (2) 所有的等边三角形都相似; (3) 所有的等腰直角三角形都相似; (4) 所有的直角三角形都相似。其中真命题的序号是 ▲ (注: 把所有真命题的序号都填上)。

【答案】 ②③。

【考点】 相似三角形的判定。

【分析】 逐个分析各项, 利用排除法得出答案:

① 等腰三角形三角不一定相等, 不符合相似三角形的特点, 错误;

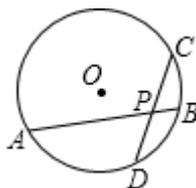
② 所有的等边三角形三角相等, 是相似三角形, 正确;

③ 所有的等腰直角三角形三角都相等, 因此都相似, 正确;

④ 所有的直角三角形三角不一定都相等, 不都相似, 错误。

其中真命题是②③。

3. (江苏省南京市 2003 年 2 分) 如图, $\odot O$ 的两条弦 AB、CD 相交于点 P, $PD=2PB$, $PC=2\text{cm}$, 则 $PA=$ ▲ cm.



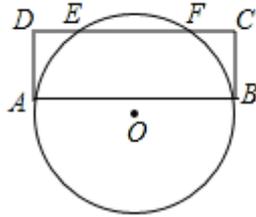
【答案】 4.

【考点】 相交弦定理.

【分析】 由相交弦定理可以得到 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, 然后利用已知条件即可求出 PA:

$$PA = \frac{PC \cdot PD}{PB} = \frac{2 \cdot 2PB}{PB} = 4(\text{cm}).$$

4. (江苏省南京市 2004 年 2 分) 如图, 矩形 ABCD 与 $\odot O$ 交于点 A、B、F、E, DE=1cm, EF=3cm, 则 AB= ▲ cm.

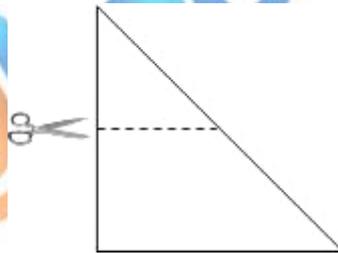


【答案】 5。

【考点】 矩形和圆的性质, 垂径定理。

【分析】 根据矩形和圆的轴对称性, 知 $CF = DE = 1$, 因此由 $EF = 3$ 得 $DC = 5$, 根据矩形对边相等的性质, 可得 $AB = 5$ 。

5. (江苏省南京市 2005 年 2 分) 如图, 将一张等腰直角三角形纸片沿中位线剪开, 可以拼出不同形状的四边形, 请写出其中两个不同的四边形的名称: ▲ 。

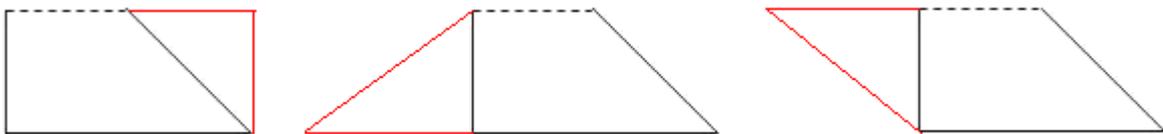


【答案】 平行四边形, 等腰梯形 (答案不唯一)。

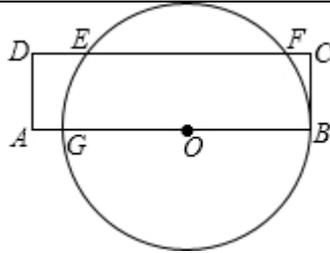
【考点】 三角形中位线定理

【分析】 让相等边重合, 动手操作看拼合的形状即可:

如图: 可知可拼成平行四边形、等腰梯形和矩形三种不同的形状。



6. (江苏省南京市 2006 年 3 分) 如图, 矩形 ABCD 与与圆心在 AB 上的 $\odot O$ 交于点 G、B、F、E, $GB = 8\text{cm}$, $AG = 1\text{cm}$, $DE = 2\text{cm}$, 则 $EF =$ ▲ cm.



【答案】6。

【考点】矩形的判定和性质，垂径定理。

【分析】过 O 作 $OW \perp CD$ ，垂足为 W，根据矩形的对称性及垂径定理即可求出 EF 的长：

作 $GH \perp CD$ ，交 CD 于点 H， $OW \perp CD$ ，交 CD 于点 W，
则四边形 HCBG，AGHD，OWDA，OWCB 都是矩形。

\therefore 矩形 HCBG 是轴对称图形，对称轴是 OW，且 GB 是直径，

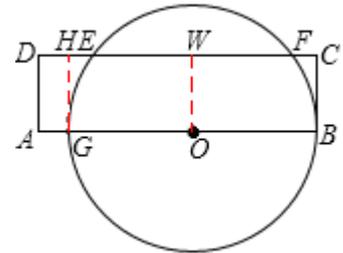
$$\therefore OG = OB = \frac{1}{2} BG = 4 \text{cm}.$$

\therefore HW 与 WC 是对称线段，有 $WH = WC$ 。

则由垂径定理知，点 W 是 EF 的中点，有 $EW = WF$ 。

$$\therefore CH = BG = 2HW = 8 \text{cm}, \quad OA = WD = OG + AG = 5 \text{cm}.$$

$$\therefore EW = DW - DE = 5 - 2 = 3 \text{cm}. \quad \therefore EF = 6 \text{cm}.$$



7. (江苏省南京市 2007 年 3 分) 已知点 P (x, y) 位于第二象限，并且 $y \leq x + 4$ ，x, y 为整数，写出一个符合上述条件的点 P 的坐标： ▲ 。

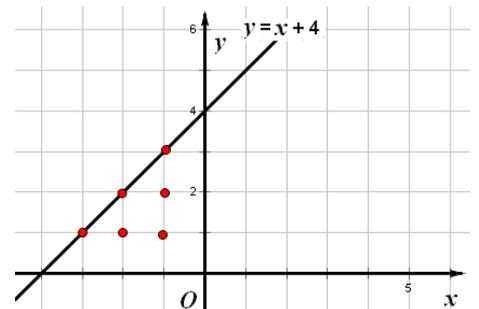
【答案】(-1, 1) (答案不唯一)。

【考点】点的坐标。

【分析】如图， \therefore 点 P (x, y) 位于第二象限，且 $y \leq x + 4$ ，

\therefore 点 P (x, y) 位于直线 $y = x + 4$ 和 x 轴，y 轴围成的

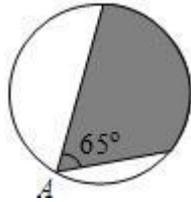
三角形区域内 (含 $y = x + 4$ 在第二象限部分)。



又 \therefore x, y 为整数， \therefore 共有 6 个点满足条件：(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-2, 1),

(-2, 2), (-3, 1)。

8. (江苏省南京市 2008 年 3 分) 如图，有一圆形展厅，在其圆形边缘上的点 A 处安装了一台监视器，它的监控角度是 65° 。为了监控整个展厅，最少需在圆形边缘上共安装这样的监视器 ▲ 台。



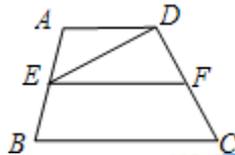
【答案】 3。

【考点】 圆周角定理

【分析】 $\because \angle A = 65^\circ, \therefore$ 该圆周角所对的弧所对的圆心角是 130° 。

又 $\because 360^\circ \div 130^\circ \approx 2\frac{10}{13}, \therefore$ 共需安装这样的监视器 3 台。

9. (江苏省 2009 年 3 分) 如图, 已知 EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线, $\triangle DEF$ 的面积为 4cm^2 , 则梯形 $ABCD$ 的面积为 ▲ cm^2 .



【答案】 16。

【考点】 梯形中位线定理

【分析】 根据已知 $\triangle DEF$ 的高为梯形高的一半, 从而根据三角形的面积可求得中位线与高的乘积, 即求得了梯形的面积:

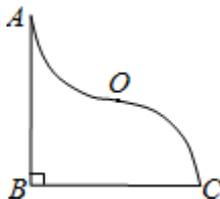
设梯形的高为 h ,

$\because EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线, $\therefore \triangle DEF$ 的高为 $\frac{h}{2}$ 。

$\because \triangle DEF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot EF \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} EF \cdot h = 4, \therefore EF \cdot h = 16$ 。

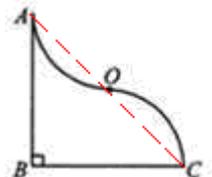
\therefore 梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}(AD+BC) \cdot h = EF \cdot h = 16$ 。

10. (江苏省南京市 2010 年 2 分) 如图, $AB \perp BC, AB=BC=2\text{cm}$, OA 与 OC 关于点 O 中心对称, 则 AB 、 BC 、 CO 、 OA 所围成的图形的面积是 ▲ cm^2 .



【答案】 2。

【考点】 中心对称的性质, 等腰直角三角形的性质。



【分析】连接 AC，根据中心对称的意义，将“AB、BC、CO、OA 所围成的图形的面积”转化为求直角三角形 ABC 的面积，由 $AB=BC=2\text{ cm}$ 得 $S_{\triangle ABC}=2\text{ cm}^2$ 。

11. (江苏省南京市 2011 年 2 分) 甲、乙、丙、丁四位同学围成一圈依序循环报数，规定：

①甲、乙、丙、丁首次报出的数依次为 1、2、3、4，接着甲报 5、乙报 6……按此规律，后一位同学报出的数比前一位同学报出的数大 1，当报到的数是 50 时，报数结束；

②若报出的数为 3 的倍数，则报该数的同学需拍手一次，在此过程中，甲同学需要拍手的次数为 ▲ 。

【答案】 4。

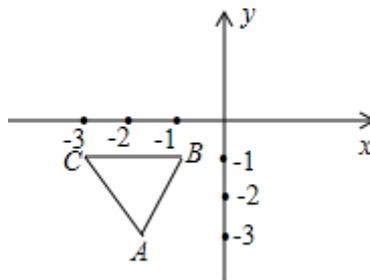
【考点】 分类归纳。

【分析】 列表如下：

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | | | | | | | | | | | | | | |

表中可见，只有 9，21，33，45 满足条件。

12. (2012 江苏南京 2 分) 在平面直角坐标系中，规定把一个三角形先沿 x 轴翻折，再向右平移两个单位称为一次变换，如图，已知等边三角形 ABC 的顶点 B、C 的坐标分别是，(-1, -1)，(-3, -1)，把三角形 ABC 经过连续 9 次这样的变换得到三角形 A'B'C'，则点 A 的对应点 A' 的坐标是 ▲



【答案】 $(16, 1+\sqrt{3})$ 。

【考点】 分类归纳（图形的变化类），翻折变换（折叠问题），坐标与图形性质，等边三角形的性质，锐角三角函数定义，特殊角的三角函数值。

【分析】 先由 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 B、C 的坐标分别是 $(-1, -1)$ 、 $(-3, -1)$ ，求得点 A 的坐标；再寻找规律，求出点 A 的对应点 A' 的坐标：

如图，作 BC 的中垂线交 BC 于点 D，则

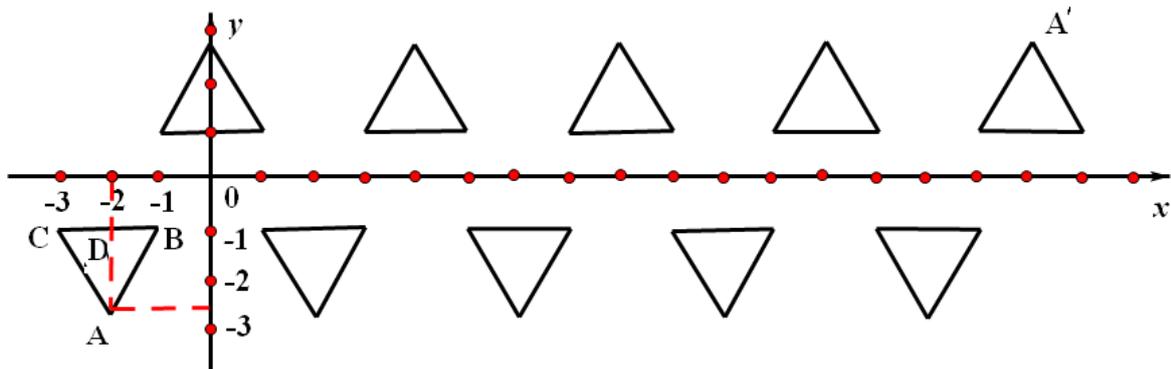
$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，点 B、C 的坐标分别是 $(-1, -1)$ 、 $(-3, -1)$ ，

$\therefore BD=1, AD=BD \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}。 \therefore A(-2, -1-\sqrt{3})。$

根据题意，可得规律：第 n 次变换后的点 A 的对应点的坐标：当 n 为奇数时为 $(2n-2, 1+\sqrt{3})$ ，

当 n 为偶数时为 $(2n-2, -1-\sqrt{3})$ 。

\therefore 把 $\triangle ABC$ 经过连续 9 次这样的变换得到 $\triangle A'B'C'$ ，则点 A 的对应点 A' 的坐标是： $(16, 1+\sqrt{3})$ 。

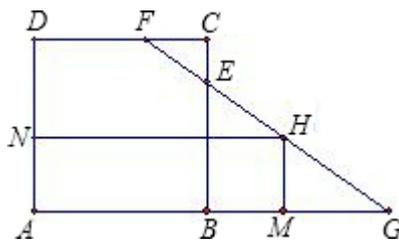


三. 解答题

1. (2001 江苏南京 8 分) 如图， $E、F$ 是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边 $BC、CD$ 上的点， $CE=1, CF=\frac{4}{3}$ ，直线 FE 交 AB 的延长线于 G ，过线段 FG 上的一个动点 H ，作 $HM \perp AG, HN \perp AD$ ，垂足为 $M、N$ ，设 $HM=x$ ，矩形 $AMHN$ 的面积为 y 。

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 当 x 为何值时，矩形 $AMHN$ 的面积最大，最大面积是多少？



【答案】解：(1) $\because EC=1, BC=4, \therefore BE=3。$

$\because CF \parallel BG, \therefore \triangle CEF \sim \triangle BEG。 \therefore \frac{CF}{BG} = \frac{CE}{BE}$ ，即： $\frac{\frac{4}{3}}{BG} = \frac{1}{3}。 \therefore BG=4。$

在 $Rt\triangle GMH$ 中， $\tan \angle G = \tan \angle CFE = \frac{3}{4}。$

$\because HM=x, \tan \angle G = \frac{HM}{MG} \therefore MG = \frac{4}{3}x。$

$\therefore AM = AG - MG = AB + BG - MG = 4 + 4 - \frac{4}{3}x = 8 - \frac{4}{3}x。$

$$\therefore y = x \cdot \left(8 - \frac{4}{3}x\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x \quad (0 < x \leq 4).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 的函数式可知: } y = -\frac{4}{3}x^2 + 8x = -\frac{4}{3}(x-3)^2 + 12.$$

\therefore 当 $x=3$ 时, 矩形 $AMHN$ 的面积最大, 最大值为 12。

【考点】 动点问题, 二次函数综合题, 矩形和正方形的性质, 相似三角形的判定和性质, 锐角三角函数定义, 二次函数最值。

【分析】 (1) 要求矩形的面积, 就要得出 AM 和 MH 的值, 已知了 MH 为 x , 关键是求 AM 的长, 那么必须得出 BG, MG 的长, 可根据相似三角形 CFE 和 BGE 求出 BG 的长 (也可用 BE 和 $\angle C$ 的正切值来求), 然后在直角三角形 GMH 中, 用 HM 和 $\angle C$ 的正切值求出 MG , 这样就能表示出 AM 的长, 就可得出关于 x, y 的函数关系式。

(2) 可根据 (1) 的函数的性质及自变量的取值范围来求出矩形面积的最大值以及对应的 x 的值。

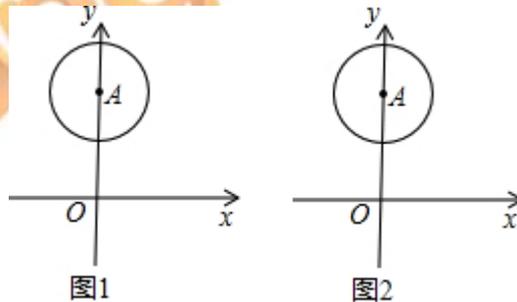
2. (2001 江苏南京 11 分) (1) 如图 1, 已知 A 点坐标为 $(0, 3)$, $\odot A$ 的半径为 1, 点 B 在 x 轴上。

①若 B 点坐标为 $(4, 0)$, $\odot B$ 的半径为 3, 试判断 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系;

②若 $\odot B$ 过点 $M(2, 0)$, 且与 $\odot A$ 相切, 求 B 点坐标。

(2) 如图 2, 点 A 在 y 轴上, $\odot A$ 在 x 轴的上方。

问: 能否在 x 轴的正半轴上确定一点 B , 使 $\odot B$ 与 y 轴相切, 并且与 $\odot A$ 外切, 为什么?



【答案】 解: (1) ① $\because A(0, 3), B(4, 0), \therefore OA=3, OB=4, AB=\sqrt{3^2+4^2}=5 > 1+3$ 。

\therefore 两圆外离。

② 设 $B(x, 0)$,

$\because \odot B$ 过点 $M(2, 0), \therefore \odot B$ 的半径为 $|x-2|$ 。

$$\text{则 } AB = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}.$$

$$\text{若 } \odot A \text{ 与 } \odot B \text{ 外切, } \sqrt{x^2 + 9} = 1 + |x - 2|,$$

$$x \leq 2 \text{ 时, } \sqrt{x^2 + 9} = 1 + 2 - x, \text{ 解得 } x = 0;$$

$x > 2$ 时, $\sqrt{x^2+9}=1+x-2$, 解得 $x=-4$, 与 $x > 2$ 不符。

$\therefore B(0, 0)$ 。

若 $\odot A$ 与 $\odot B$ 内切, $\sqrt{x^2+9}=|1-|x-2||$,

$x \leq 2$ 时, $\sqrt{x^2+9}=|1-2+x|$, 解得 $x=-4$;

$x > 2$ 时, $\sqrt{x^2+9}=|1+2-x|$, 解得 $x=0$, 与 $x > 2$ 不符。

$\therefore B(-4, 0)$ 。

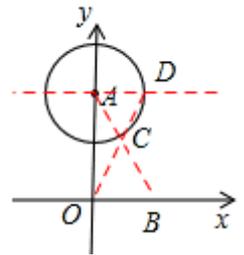
(2) 能。过 A 作 $AD \parallel x$ 轴, 连接 OD 交 $\odot A$ 于 C, 连接 AC 并延长交 x 轴于 B, 则以 B 为圆心, 以 OB 为半径的 $\odot B$ 与 y 轴相切, 并且与 $\odot A$ 外切。理由如下:

$\because AD \parallel x$ 轴, $\therefore \angle ADO = \angle BOD$ 。

$\because AC = AD$, $\therefore \angle ADC = \angle ACD$ 。 $\therefore \angle OCB = \angle BOC$ 。

$\therefore BC = OB$ 。

\therefore 以 B 为圆心, 以 OB 为半径的 $\odot B$ 与 y 轴相切, 并且与 $\odot A$ 外切。



【考点】 圆与圆的位置关系, 坐标与图形性质, 勾股定理, 平行的性质, 等腰判定和性质。

【分析】 (1) ①先根据 A、B 的坐标求出圆心距 AB 的长, 然后和两圆的半径进行比较即可; ②本题可设出 B 点的坐标, 然后表示出圆心距 AB 的长, 和 $\odot B$ 的半径长, 分内切和外切两种情况进行求解。

(2) 可过 A 作 x 轴的平行线交 $\odot A$ 于 D, 连接 OD 交 $\odot A$ 于 C, 连接 AC 并延长交 x 轴于 B, 则 $\odot B$ 以 BC 为半径, 与 y 轴相切, 与 $\odot A$ 外切。

3. (江苏省南京市 2002 年 7 分) 某厂要制造能装 250 毫升 (1 毫升 = 1 厘米³) 饮料的铝制圆柱形易拉罐, 易拉罐的侧壁厚度和底部都是 0.02 厘米, 顶部厚度是底部厚度的 3 倍, 这是为了防止“砰”的一声打开易拉罐时把整个盖撕下来, 设一个底面是 x 厘米的易拉罐的用铝量是 y 厘米³。

(1) 利用公式: 用铝量 = 底圆面积 × 底部厚度 + 顶圆面积 × 顶部厚度 + 侧面积 × 侧壁厚度求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 选择: 该厂设计人员在设计时算出以下几组数据:

| | | | | | | | |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 底面半径 x (厘米) | 1.6 | 2.0 | 2.4 | 2.8 | 3.2 | 3.6 | 4.0 |
| 用铝量 y (厘米 ³) | 6.9 | 6.0 | 5.6 | 5.5 | 5.7 | 6.0 | 6.5 |

根据上表推测, 要使用铝量 y (厘米³) 的值尽可能小, 底面半径 x (厘米) 的值所在范围是 ()

A、 $1.6 \leq x \leq 2.4$ B、 $2.4 < x < 3.2$ C、 $3.2 \leq x \leq 4$

【答案】 解: (1) 根据题意可得: $y = \pi x^2 \times 0.02 + \pi x^2 \times 0.02 \times 3 + 2\pi x \times (250 \div \pi x^2) \times 0.02 = \frac{2\pi}{25} x^2 + \frac{10}{x}$ 。

(2) B.

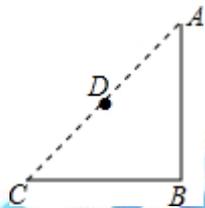
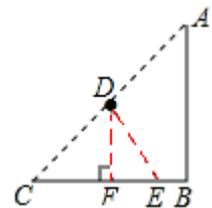
【考点】函数的应用。**【分析】**(1) 顶部厚度是底部厚度的 3 倍, 那么顶部厚度是 0.06cm. 把相关数据代入所给的等量关系即可。(2) 根据表可知: 题中最小的用铝量是底面半径 2.8 时, 用铝量 5.5 厘米³, 介于 5.6 和 5.7 之间, 所对应的底面半径是 2.4 和 3.2 之间。故选 B。

4. (江苏省南京市 2002 年 8 分) 如图, 客轮沿折线 A—B—C 从 A 出发经 B 再到 C 匀速航行, 货轮从 AC 的中点 D 出发沿某一方向匀速直线航行, 将一批物品送达客轮。两船同时起航, 并同时到达折线 A—B—C 上的某点 E 处, 已知 AB=BC=200 海里, $\angle ABC=90^\circ$, 客轮速度是货轮速度的 2 倍。

(1) 选择: 两船相遇之处 E 点 ()

A、在线段 AB 上 B、在线段 BC 上 C、可以在线段 AB 上, 也可以在线段 BC 上

(2) 求货轮从出发到两船相遇共航行了多少海里? (结果保留根号)

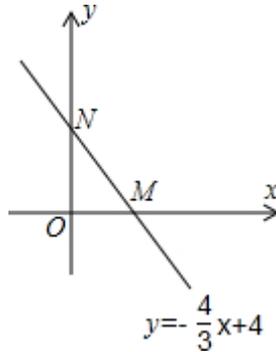
**【答案】**解: (1) B.(2) 设货轮从出发到两船相遇共航行了 x 海里, 过 D 点作 $DF \perp CB$ 于 F, 连接 DE,则 $DE=x$, $AB+BE=2x$, \because D 点是 AC 的中点, $\therefore DF=\frac{1}{2}AB=100$, $EF=400-100-2x$,在 $Rt\triangle DFE$ 中, $DE^2=DF^2+EF^2$, 得 $x^2=100^2+(300-2x)^2$,解得 $x=200 \pm \frac{100\sqrt{6}}{3}$ 。 $\because 200 + \frac{100\sqrt{6}}{3} > 100\sqrt{2}$ (舍去), $\therefore DE=200 - \frac{100\sqrt{6}}{3}$ 。答: 货轮从出发到两船相遇共航行了 $200 - \frac{100\sqrt{6}}{3}$ 海里。**【考点】**一元二次方程的应用 (几何问题), 三角形中位线定理, 勾股定理。**【分析】**(1) 连接 BD, 则 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形, 假设 E 为 AB 的中点, 有 $AB=2DE$, 此时 DE 最短; 假设 E 点在线段 AB 上, 但不在中点, 根据已知可得 $AE=2DE$, 且 $AE > AB$, 很明显假设不成立. 故 E 点不在 AB 上, 应该在线段 BC 上。(2) 设货轮从出发到两船相遇共航行了 x 海里, 过 D 点作 $DF \perp CB$ 于 F, 连接 DE, 则 $DE=x$, $AB+BE=2x$, 根据 D 点是 AC 的中点, 得 $DF=\frac{1}{2}AB=100$, $EF=400-100-2x$, 在 $Rt\triangle DFE$ 中, $DE^2=DF^2+EF^2$,

得 $x^2=100^2+(300-2x)^2$ ，解方程即可。

5. (江苏省南京市 2003 年 8 分) 如图. 直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 M 、 N .

(1) 求 M 、 N 两点的坐标;

(2) 如果点 P 在坐标轴上, 以点 P 为圆心, $\frac{12}{5}$ 为半径的圆与直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 相切, 求点 P 的坐标.



【答案】解: (1) 当 $x=0$ 时, $y=4$, 当 $y=0$ 时, $0=-\frac{4}{3}x+4$, $\therefore x=3$.

$\therefore M(3, 0), N(0, 4)$.

(2) ①当 P_1 点在 y 轴上, 并且在 N 点的下方时,

设 $\odot P_1$ 与直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 相切于点 A ,

连接 P_1A , 则 $P_1A \perp MN$, $\therefore \angle P_1AN = \angle MON = 90^\circ$.

$\therefore \angle P_1NA = \angle MNO$, $\therefore \triangle P_1AN \sim \triangle MNO$. $\therefore \frac{P_1A}{MO} = \frac{P_1N}{MN}$.

在 $Rt\triangle OMN$ 中, $OM=3, ON=4$, $\therefore MN=5$.

又 $\because P_1A = \frac{12}{5}$, $\therefore \frac{\frac{12}{5}}{3} = \frac{P_1N}{5}$, 即 $P_1N=4$.

$\therefore P_1$ 点坐标是 $(0, 0)$.

②当 P_2 点在 x 轴上, 并且在 M 点的左侧时, 同理可得 P_2 点坐标是 $(0, 0)$.

③当 P_3 点在 x 轴上, 并且在 M 点的右侧时,

设 $\odot P_3$ 与直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 上切于点 B ,

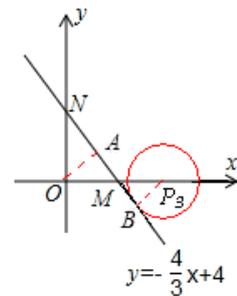
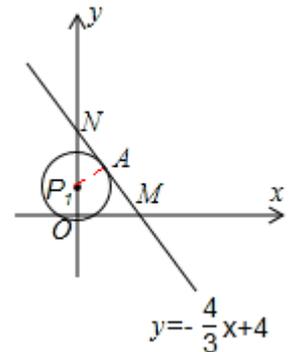
连接 P_3B . 则 $P_3B \perp MN$, $\therefore OA \parallel P_3B$.

$\therefore OA = P_3B$, $\therefore P_3M = OM = 3$, $\therefore OP_3 = 6$.

$\therefore P_3$ 点坐标是 $(6, 0)$;

④当 P_4 点在 y 轴上, 并且在点 N 上方时, 同理可得 $P_4N = ON = 4$.

$\therefore OP_4 = 8$, $\therefore P_4$ 点坐标是 $(0, 8)$.



综上所述, P 点坐标是 (0, 0), (6, 0), (0, 8)。

【考点】一次函数综合题, 直线上点的坐标与方程的关系, 直线和圆相切的性质, 相似三角形的判定和性质,

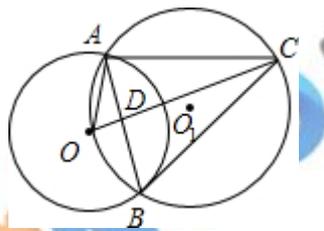
【分析】(1) 已知直线解析式, 易求 M, N 点坐标。

(2) 分 P 点在 y 轴上, 在 N 点的下方; 在 y 轴上, 在 N 点的上方; 在 x 轴上, 在 M 点的左侧; 在 x 轴上, 在 M 点的右侧四种情况讨论。根据圆的性质及相切的条件, 又知道圆的半径, 从而求出每种情况的 P 点坐标。

6. (江苏省南京市 2003 年 9 分) 如图 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 相交于 A、B 两点, 点 O 在 $\odot O'$ 上, $\odot O'$ 的弦 OC 交 AB 于点 D。

(1) 求证: $OA^2 = OC \cdot OD$;

(2) 如果 $AC + BC = \sqrt{3} OC$, $\odot O$ 的半径为 r. 求证: $AB = \sqrt{3}r$



【答案】证明: (1) 连接 OB,

$$\because OA=OB, \therefore \angle OAB=\angle OBA.$$

$$\because \angle OCA=\angle OBA, \therefore \angle OAB=\angle OCA.$$

$$\because \angle AOC=\angle DOA, \therefore \triangle AOC \sim \triangle DOA.$$

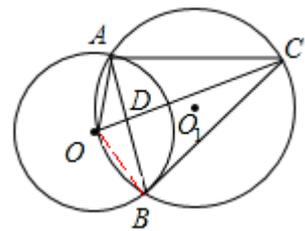
$$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OA}, \text{ 即 } OA^2 = OC \cdot OD.$$

$$(2) \because \triangle AOC \sim \triangle DOA, \therefore \frac{AC}{OC} = \frac{DA}{OA}.$$

$$\text{同理可得, } \frac{BC}{OC} = \frac{DB}{OB}.$$

$$\therefore \frac{AC}{OC} + \frac{BC}{OC} = \frac{DA}{OA} + \frac{DB}{OB}, \text{ 即 } \frac{AC+BC}{OC} = \frac{AB}{OA}.$$

$$\because AC+BC = \sqrt{3} OC, OA=r, \therefore AB = \sqrt{3}r.$$



【考点】圆与圆的位置关系, 相交两圆的性质, 等腰三角形的性质, 圆周角定理, 相似三角形的判定和性质。

【分析】(1) 欲证 $OA^2 = OC \cdot OD$, 通过证明 $\triangle AOC \sim \triangle DOA$ 可以得出。

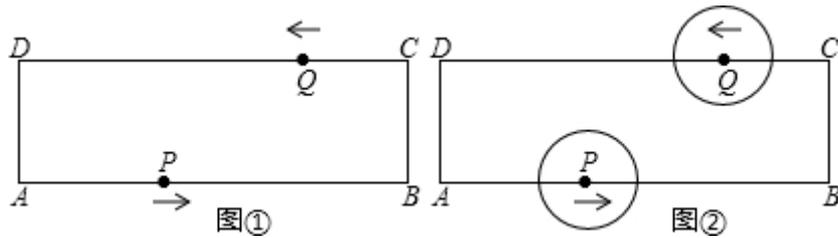
(2) 因为 $AC + BC = \sqrt{3} OC$, $\odot O$ 的半径为 r, 欲证 $AB = \sqrt{3}r$, 只需证明 $(AC + BC) : OC = AB :$

OA; 通过证明 $\triangle AOC \sim \triangle DOA$, $\triangle OBD \sim \triangle OCB$, 得出比例形式相加, 即可得出。

7. (江苏省南京市 2004 年 9 分) 如图, 在矩形 ABCD 中, $AB=20\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$, 点 P 从 A 开始沿折线 A-B-C-D 以 4cm/s 的速度移动, 点 Q 从 C 开始沿 CD 边以 1cm/s 的速度移动, 如果点 P、Q 分别从 A、C 同时出发, 当其中一点到达 D 时, 另一点也随之停止运动. 设运动时间为 t (s).

(1) t 为何值时, 四边形 APQD 为矩形;

(2) 如图, 如果 $\odot P$ 和 $\odot Q$ 的半径都是 2cm , 那么 t 为何值时, $\odot P$ 和 $\odot Q$ 外切.



【答案】解: (1) 根据题意, 当 $AP=DQ$ 时, 四边形 APQD 为矩形. 此时, $4t=20-t$, 解得 $t=4$.

答: t 为 4 时, 四边形 APQD 为矩形.

(2) 当 $PQ=4$ 时, $\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切.

①如果点 P 在 AB 上运动. 只有当四边形 APQD 为矩形时, $PQ=4$. 由 (1), 得 $t=4$.

②如果点 P 在 BC 上运动. 此时 $t \geq 5$, 则 $CQ \geq 5$, $PQ \geq CQ \geq 5 > 4$, $\therefore \odot P$ 与 $\odot Q$ 外离.

③如果点 P 在 CD 上运动, 且点 P 在点 Q 的右侧.

可得 $CQ=t$, $CP=4t-24$.

当 $CQ-CP=4$ 时, $\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切. 此时, $t-(4t-24)=4$, 解得 $t=\frac{20}{3}$.

④如果点 P 在 CD 上运动, 且点 P 在点 Q 的左侧.

当 $CP-CQ=4$ 时, $\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切. 此时, $4t-24-t=4$, 解得 $t=\frac{28}{3}$.

\therefore 点 P 从 A 开始沿折线 A-B-C-D 移动到 D 需要 11s, 点 Q 从 C 开始沿 CD 边移动到 D 需要 20s, 而 $\frac{28}{3} < 11$, $\therefore t=\frac{28}{3}$ 符合题意.

综上所述, 当 t 为 4s, $\frac{20}{3}$ s, $\frac{28}{3}$ s 时, $\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切.

【考点】动点问题, 矩形的判定和性质, 圆与圆的位置关系.

【分析】(1) 四边形 APQDA 为矩形, 也就是 $AP=DQ$, 分别用含 t 的代数式表示, 解出即可;

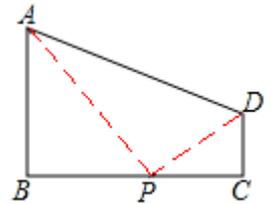
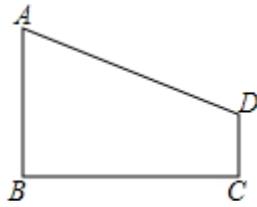
(2) 分点 P 在 AB 上, 点 P 在 BC 上, 点 P 在 CD 上在点 Q 右侧, 点 P 在 CD 上在点 Q 左侧四种情况, 根据每一种情况, 找出相等关系, 解出即可.

8. (江苏省南京市 2004 年 8 分) 如图, $AB \perp BC$, $DC \perp BC$, 垂足分别为 B、C.

(1) 当 $AB=4$, $DC=1$, $BC=4$ 时, 在线段 BC 上是否点 P, 使 $AP \perp PD$? 如果存在求线段 BP 的长; 如果

不存在, 请说明理由;

(2) 设 $AB=a$, $DC=b$, $AD=c$, 那么当 a 、 b 、 c 之间满足什么关系时, 在直线 BC 上存在点 P , 使 $AP \perp PD$.



【答案】解: (1) 存在。理由如下:

如图所示, 假设 $AP \perp PD$,

$$\because \angle APB + \angle DPC = 90^\circ, \angle PDC + \angle DPC = 90^\circ, \angle BAP + \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle DPC.$$

$$\because \angle B = \angle C, \therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD.$$

设 $BP=x$, 则 $CP=4-x$,

$$\therefore 4 : (4-x) = x : 1, \text{ 解得 } x=2, \text{ 即 } BP=2.$$

因此, 当 $BP=2$ 时, $AP=2\sqrt{5}$, $PC=2$, $DP=\sqrt{5}$,

$$\therefore \frac{AB}{PC} = \frac{BP}{CD} = \frac{AP}{DP} = 2, \therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD. \therefore \angle APB + \angle DPC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle APD = 90^\circ. \therefore AP \perp PD.$$

(2) 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 易得 $DC=BE=b$, $AE=a-b$,

$$BC=DE = \sqrt{AD^2 - (AB-CD)^2} = \sqrt{c^2 - (a-b)^2}.$$

由 (1) 得 $\triangle ABP \sim \triangle PCD$, 设 $PC=x$,

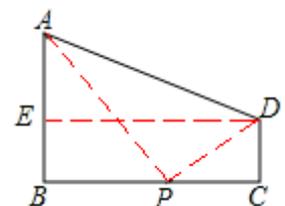
$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{b}{\sqrt{c^2 - (a-b)^2} - x}.$$

$$\text{化简得方程: } x^2 - \sqrt{c^2 - (a-b)^2}x + ab = 0.$$

若存在点 P , 则方程有实数根, 即 $\Delta = c^2 - (a-b)^2 - 4ab = c^2 - (a+b)^2 \geq 0$.

$$\therefore c \geq a+b.$$

\therefore 当 $c \geq a+b$ 时, 在直线 BC 上存在点 P , 使 $AP \perp PD$.



【考点】相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 一元二次方程根的判别式。

【分析】(1) 由 $\triangle ABP \sim \triangle PCD$ 得出 $\angle BPA + \angle DPC = 90^\circ$, 即 $\angle APD = 90^\circ$, 求出 BP 的长。

(2) 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 根据勾股定理用 a 、 b 、 c 表示出 BC 的长, 再根据 (1) 的结论得出关于 x 的方程, 利用一元二次方程根的判别式即可求解。

9. (江苏省南京市 2005 年 8 分) 在一块长方形镜面玻璃的四周镶上与它的周长相等的边框, 制成一面镜子, 镜子的长与宽的比是 2:1, 已知镜面玻璃的价格是每平方米 120 元, 边框的价格是每米 30 元, 另外制作这面镜子还需加工费 45 元. 设制作这面镜子的总费用是 y 元, 镜子的宽是 x 米.

(1) 求 y 与 x 之间的关系式.

(2) 如果制作这面镜子共花了 195 元, 求这面镜子的长和宽.

【答案】解: (1) ∵ 镜子的宽是 x 米, 镜子的长与宽的比是 2:1, ∴ 镜子的长是 $2x$ 米.

∵ 镜面玻璃的价格是每平方米 120 元, ∴ 镜面玻璃的费用是 $x \cdot 2x \cdot 120 = 240x^2$ 元.

∵ 边框的价格是每米 30 元, ∴ 边框的费用是 $(x + 2x) \cdot 30 = 90x$ 元.

∴ 制作这面镜子的总费用是 $y = 240x^2 + 120x + 45$.

(2) 制作这面镜子共花了 195 元, 即 $y = 195$, 代入 y 与 x 之间的关系式, 得

$$240x^2 + 120x + 45 = 195, \text{ 整理得 } 8x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{11}}{4}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{11}}{4} \text{ (舍去)}.$$

$$\therefore x = \frac{-1 + \sqrt{11}}{4}, 2x = \frac{-1 + \sqrt{11}}{2}.$$

答: 镜子的长和宽分别是 $\frac{-1 + \sqrt{11}}{2}$ 米和 $\frac{-1 + \sqrt{11}}{4}$ 米.

【考点】根据实际问题列二次函数关系式, 公式法解一元二次方程.

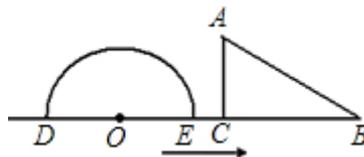
【分析】(1) 依题意可得总费用=镜面玻璃费用+边框的费用+加工费用, 化简即可.

(2) 把 $y = 195$ 代入 y 与 x 之间的关系式求出 x 即可.

10. (江苏省南京市 2005 年 11 分) 如图, 形如量角器的半圆 O 的直径 $DE = 12\text{cm}$, 形如三角板的 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $BC = 12\text{cm}$. 半圆 O 以 2cm/s 的速度从左向右运动, 在运动过程中, 点 D 、 E 始终在直线 BC 上. 设运动时间为 $t(\text{s})$, 当 $t = 0\text{s}$ 时, 半圆 O 在 $\triangle ABC$ 的左侧, $OC = 8\text{cm}$.

(1) 当 t 为何值时, $\triangle ABC$ 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切?

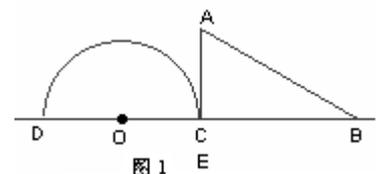
(2) 当 $\triangle ABC$ 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切时, 如果半圆 O 与直径 DE 围成的区域与 $\triangle ABC$ 三边围成的区域有重叠部分, 求重叠部分的面积.



【答案】解: (1) $\triangle ABC$ 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切有以下四种情形:

情形一: 当半圆 O 所在的圆运动到点 E 与点 C 重合时,

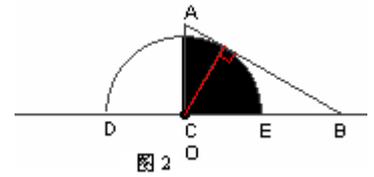
半圆 O 在 AC 左边与 AC 相切, 如图 1.



此时，半圆 O 运动的距离为 $8-6=2$ 。

$$\therefore t=2 \div 2=1 \text{ (s)}.$$

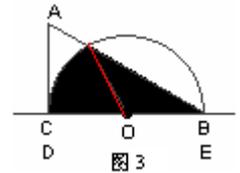
情形二：当半圆 O 所在的圆运动到点 O 与点 C 重合时，半圆 O 在 AB 左边与 AB 相切，如图 2。



此时，半圆 O 运动的距离为 8。

$$\therefore t=8 \div 2=4 \text{ (s)}.$$

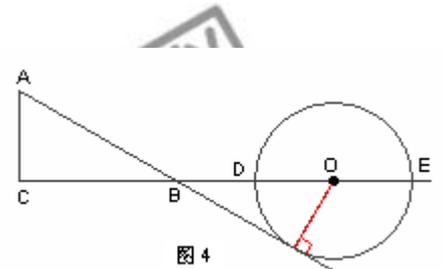
情形三：当半圆 O 所在的圆运动到点 D 与点 C 重合时，半圆 O 在 AC 右边与 AC 相切，如图 3。



此时，半圆 O 运动的距离为 $8+6=14$ 。

$$\therefore t=14 \div 2=7 \text{ (s)}.$$

情形四：当半圆 O 所在的圆运动到 AB 右边与 AB 相切时，如图 4。



此时，半圆 O 运动的距离为 $8+12+12=32$ 。

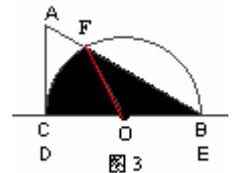
$$\therefore t=32 \div 2=16 \text{ (s)}.$$

综上所述，当 $t=1, 4, 7, 16$ s 时， $\triangle ABC$ 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切。

(2) 当 $\triangle ABC$ 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切时，半圆 O 与直径 DE 围成的区域与 $\triangle ABC$ 三边围成的区域有重叠部分的有两种情形：

情形一：当半圆 O 所在的圆运动到点 O 与点 C 重合时，半圆 O 在 AB 左边与 AB 相切，如图 2。此时半圆 O 与直径 DE 围成的区域与 $\triangle ABC$ 三边围成的区域重叠部分为 $\frac{1}{4}$ 圆面积 $=9\pi \text{ cm}^2$ 。

情形二：当半圆 O 所在的圆运动到点 D 与点 C 重合时，半圆 O 在 AC 右边与 AC 相切，如图 3。此时半圆 O 与直径 DE 围成的区域与 $\triangle ABC$ 三边围成的区域重叠部分为扇形 OCF 加上 $\triangle OBF$ 。



$$\because \angle COF=2\angle ABC=60^\circ, \therefore \text{扇形 } OCF \text{ 的面积为 } \frac{60 \cdot \pi \cdot 6^2}{360}=6\pi \text{ cm}^2.$$

$$\because \triangle OBF \text{ 的边 } OB \text{ 上的高} = 6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}, \therefore \triangle OBF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\therefore \text{重叠部分面积} = 6\pi + 9\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

综上所述，当 $\triangle ABC$ 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切时，半圆 O 与直径 DE 围成的区域与 $\triangle ABC$ 三边围成的区域重叠部分的面积为 $9\pi \text{ cm}^2$ 或 $6\pi + 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 。

锐角三角函数，特殊角的三角函数值。

【分析】(1) 根据直线与圆相切的性质分四种情形分别讨论即可。

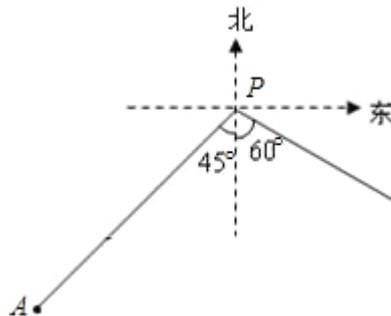
(2) 分两种情形分别求出重叠部分的面积。

11. (江苏省南京市2006年8分) 如图, 小岛A在港口P的南偏西45°方向, 距离港口81海里处. 甲船从A出发, 沿AP方向以9海里/时的速度驶向港口, 乙船从港口P出发, 沿南偏东60°方向, 以18海里/时的速度驶离港口. 现两船同时出发,

(1) 出发后几小时两船与港口P的距离相等?

(2) 出发后几小时乙船在甲船的正东方向?(结果精确到0.1小时)

(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



【答案】解: (1) 设出发后 x 小时两船与港口 P 的距离相等。

根据题意, 得 $81 - 9x = 18x$,

解这个方程, 得 $x = 3$ 。

\therefore 出发后 3 小时两船与港口 P 的距离相等。

(2) 设出发后 z 小时乙船在甲船的正东方向, 如图, 此时甲、乙两船的位置分别在点 C、D 处。连接 CD, 过点 P 作 $PE \perp CD$ 于点 E, 则点 E 在点 P 的正南方向。

在 $Rt\triangle CEP$ 中, $\angle CPE = 45^\circ$,

$\therefore PE = PC \cos 45^\circ$ 。

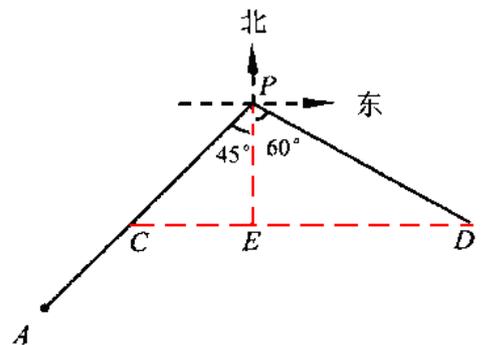
在 $Rt\triangle PED$ 中, $\angle EPD = 60^\circ$,

$\therefore PE = PD \cos 60^\circ$ 。

$\therefore PC \cos 45^\circ = PD \cos 60^\circ$, 即 $(81 - 9z) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18z \cdot \frac{1}{2}$ 。

解得, $z \approx 3.7$ 。

\therefore 出发后 3.7 小时乙船在甲船的正东方向。



【考点】一元一次方程的应用, 解直角三角形的应用, 锐角三角函数定义, 特殊角的三角函数值。

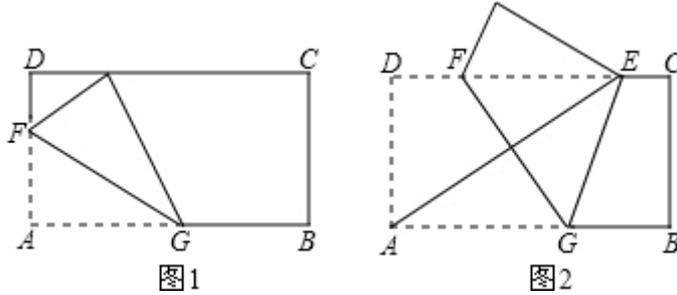
【分析】(1) 根据两船与港口 P 的距离相等列方程求解即可。

(2) 构造直角三角形 CEP 和 PED 求解即可。

12. (江苏省南京市2006年9分) 已知矩形纸片ABCD, AB=2, AD=1, 将纸片折叠, 使顶点A与边CD上的点E重合.

(1) 如果折痕FG分别与AD、AB交与点F、G(如图1), $AF = \frac{2}{3}$, 求DE的长;

(2) 如果折痕FG分别与CD、AB交与点F、G(如图2), $\triangle AED$ 的外接圆与直线BC相切, 求折痕FG的长.



【答案】解: (1) 在矩形 ABCD 中, $AB=2, AD=1, AF = \frac{2}{3}, \angle D=90^\circ$.

根据轴对称的性质, 得 $EF=AF = \frac{2}{3}$. $\therefore DF=AD-AF = \frac{1}{3}$.

在 $Rt\triangle DEF$ 中, $DE = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 设 AE 与 FG 的交点为 O.

根据轴对称的性质, 得 $AO=EO$,

取 AD 的中点 M, 连接 MO.

则 $MO = \frac{1}{2}DE, MO \parallel DC$.

设 $DE=x$, 则 $MO = \frac{1}{2}x$.

在矩形 ABCD 中, $\angle C=\angle D=90^\circ, \therefore AE$ 为 $\triangle AED$ 的外接圆的直径, 点 O 为圆心.

延长 MO 交 BC 于点 N, 则 $ON \parallel CD$.

$\therefore \angle CMN=180^\circ - \angle C=90^\circ. \therefore ON \perp BC. \therefore$ 四边形 MNCD 是矩形.

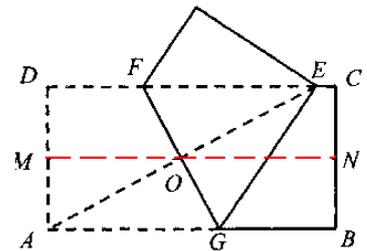
$\therefore MN=CD=AB=2. \therefore ON=MN-MO=2 - \frac{1}{2}x$.

$\therefore \triangle AED$ 的外接圆与 BC 相切, $\therefore ON$ 是 $\triangle AED$ 的外接圆的半径.

$\therefore OE=ON=2 - \frac{1}{2}x, AE=2ON=4-x$.

在 $Rt\triangle AED$ 中, $AD^2 + DE^2 = AE^2$, 即 $1^2 + x^2 = (4-x)^2$.

解得, $x = \frac{15}{8}$.



$$\therefore DE = \frac{15}{8}, OE = 2 - \frac{1}{2}x = \frac{17}{16}.$$

根据轴对称的性质, 得 $AE \perp FG$. $\therefore \angle D = 90^\circ$.

$$\text{又} \because \angle FEO = \angle AED, \therefore \triangle FEO \sim \triangle AED. \therefore \frac{FO}{AD} = \frac{OE}{DE}, \text{即 } FO = \frac{OE}{DE} \cdot AD = \frac{\frac{17}{16}}{\frac{15}{8}} \cdot 1 = \frac{17}{30}.$$

又 $\because AB \parallel CD, \therefore \angle EFO = \angle AGO, \angle FEO = \angle GAO. \therefore \triangle FEO \cong \triangle GAO. \therefore FO = GO.$

$$\therefore FG = 2FO = \frac{17}{15}.$$

\therefore 折痕 FG 的长是 $\frac{17}{15}$.

【考点】 折叠问题, 矩形的性质和判定, 轴对称的性质, 勾股定理, 三角形中位线定理, 直线与圆相切的性质, 相似三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质。

【分析】 (1) 由矩形和轴对称的性质, 可得 $EF = AF = \frac{2}{3}, DF = AD - AF = \frac{1}{3}$, 从而在 $Rt\triangle DEF$ 中根据勾股定理即可求得 DE 的长。

(2) 求出 DE 和 OE 的长, 由 $\triangle FEO \sim \triangle AED$ 即可求出 $FO = \frac{OE}{DE} \cdot AD = \frac{17}{30}$, 由 $\triangle FEO \cong \triangle GAO$ 即可求出 $FG = 2FO = 2GO = \frac{17}{15}$.

13. (江苏省南京市 2007 年 10 分) 在平面内, 先将一个多边形以点 O 为位似中心放大或缩小, 使所得多边形与原多边形对应线段的比为 k , 并且原多边形上的任一点 P , 它的对应点 P' 在线段 OP 或其延长线上; 接着将所得多边形以点 O 为旋转中心, 逆时针旋转一个角度 θ , 这种经过和旋转的图形变换叫做旋转相似变换, 记为 $O(k, \theta)$, 其中点 O 叫做旋转相似中心, k 叫做相似比, θ 叫做旋转角。

(1) 填空:

①如图 1, 将 $\triangle ABC$ 以点 A 为旋转相似中心, 放大为原来的 2 倍, 再逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle ADE$, 这个旋转相似变换记为 A (_____, _____);

②如图 2, $\triangle ABC$ 是边长为 1cm 的等边三角形, 将它作旋转相似变换 $A(\sqrt{3}, 90^\circ)$, 得到 $\triangle ADE$, 则线段 BD 的长为 _____ cm ;

(2) 如图 3, 分别以锐角三角形 ABC 的三边 AB, BC, CA 为边向外作正方形 $ADEB, BFGC, CHIA$, 点 O_1, O_2, O_3 分别是这三个正方形的对角线交点, 试分别利用 $\triangle AO_1O_2$ 与 $\triangle ABI$, $\triangle CIB$ 与 $\triangle CAO_2$ 之间的关系, 运用旋转相似变换的知识说明线段 O_1O_2 与 AO_2 之间的关系。

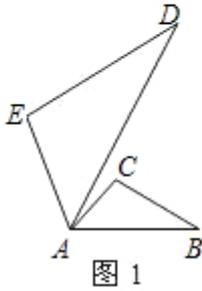


图 1

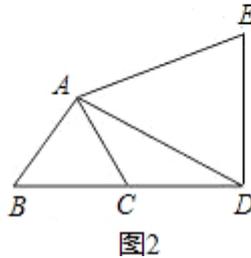


图 2

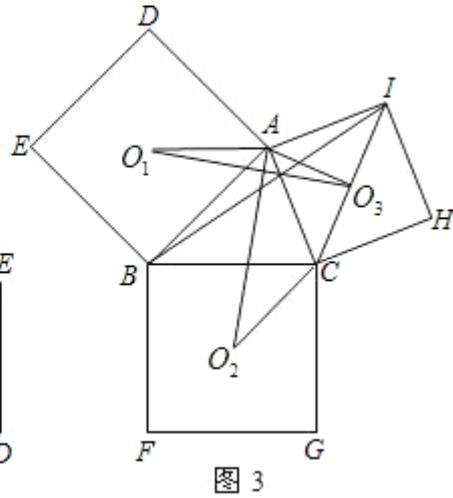


图 3

【答案】解：(1) ①2, 60° ; ②2。

(2) $\triangle AO_1O_2$ 经过旋转相似变换 $A(\sqrt{2}, 45^\circ)$, 得到 $\triangle ABI$, 此时, 线段 OO_2 变为线段 BI ;

$\triangle CIB$ 经过旋转相似变换 $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 45^\circ\right)$, 得到 $\triangle CAO_2$, 此时, 线段 BI 变为线段 AO_1 。

$$\because \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \quad 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ, \quad \therefore O_1O_2 = AO_2, \quad O_1O_2 \perp AO_2。$$

【考点】新定义, 旋转的性质。

【分析】(1) 直接根据旋转相似变换的定义写出 A 的坐标和线段 BD 的长。

(2) 反复应用旋转相似变换得出结论。

14. (江苏省南京市 2007 年 7 分) 已知直线 l 及 l 外一点 A , 分别按下列要求写出画法, 并保留两图痕迹。

(1) 在图 1 中, 只用圆规在直线 l 上画出两点 B, C , 使得点 A, B, C 是一个等腰三角形的三个顶点;

(2) 在图 2 中, 只用圆规在直线 l 外画出一點 P , 使得点 A, P 所在直线与直线 l 平行。

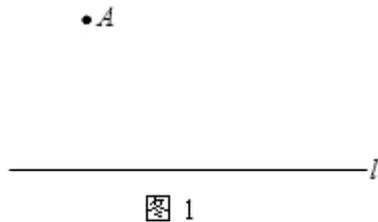


图 1

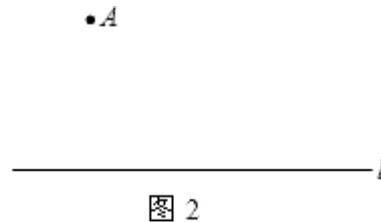
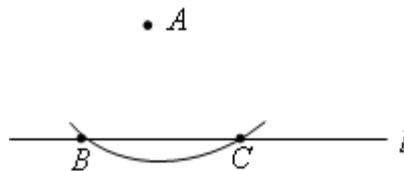
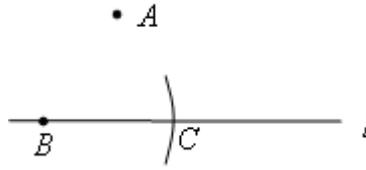


图 2

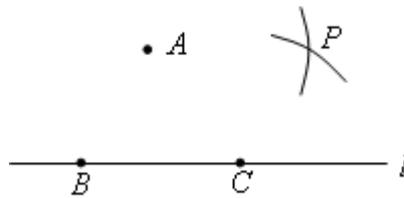
【答案】(1) 画法一: 以点 A 为圆心, 大于点 A 到直线 l 的距离长为半径画弧, 与直线 l 交于 B, C 两点, 则点 B, C 即为所求。



画法二：在直线 l 上任取一点 B ，以点 B 为圆心， AB 长为半径画弧，与直线 l 交于点 C ，则点 B, C 即为所求。



(2) 画法：在直线 l 上任取 B, C 两点，以点 A 为圆心， BC 长为半径画弧，以点 C 为圆心， AB 长为半径画弧，两弧交于点 P 。则点 P 即为所求。



【考点】 作图（等腰三角形和平等线）。

【分析】(1) 以点 A 为圆心，大于点 A 到直线 l 的距离长为半径画弧，与直线 l 交于 B, C 两点，则点 B, C 即为所求（由 $AB = AC$ 得出结论）。

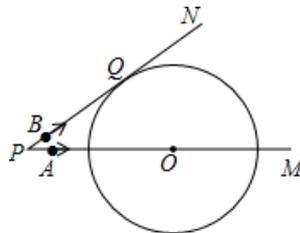
或在直线 l 上任取一点 B ，以点 B 为圆心， AB 长为半径画弧，与直线 l 交于点 C ，则点 B, C 即为所求（由 $AB = BC$ 得出结论）。

(2) 在直线 l 上任取 B, C 两点，以点 A 为圆心， BC 长为半径画弧，以点 C 为圆心， AB 长为半径画弧，两弧交于点 P 。则点 P 即为所求（由 $ABCP$ 构成平行四边形得出结论）。

15. (江苏省南京市 2008 年 8 分) 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 6cm，射线 PM 经过点 O ， $OP = 10\text{cm}$ ，射线 PN 与 $\odot O$ 相切于点 Q 。 A, B 两点同时从点 P 出发，点 A 以 5cm/s 的速度沿射线 PM 方向运动，点 B 以 4cm/s 的速度沿射线 PN 方向运动。设运动时间为 $t\text{s}$ 。

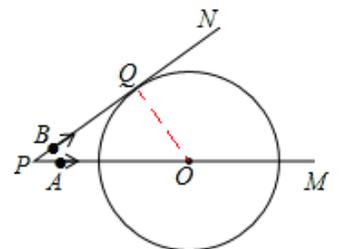
(1) 求 PQ 的长；

(2) 当 t 为何值时，直线 AB 与 $\odot O$ 相切？



【答案】 解：(1) 连接 OQ 。

$\because PN$ 与 $\odot O$ 相切于点 Q ， $\therefore OQ \perp PN$ ，即 $\angle OQP = 90^\circ$ 。



$$\because OP = 10, OQ = 6, \therefore PQ = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm}).$$

(2) 过点 O 作 $OC \perp AB$, 垂足为 C .

\because 点 A 的运动速度为 5cm/s , 点 B 的运动速度为 4cm/s , 运动时间为 $t\text{s}$,

$$\therefore PA = 5t, PB = 4t.$$

$$\because PO = 10, PQ = 8, \therefore \frac{PA}{PO} = \frac{PB}{PQ}.$$

又 $\angle P = \angle P, \therefore \triangle PAB \sim \triangle POQ. \therefore \angle PBA = \angle PQO = 90^\circ.$

$\because \angle BQO = \angle CBQ = \angle OCB = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $OCBQ$ 为矩形. $\therefore BQ = OC.$

$\because \square O$ 的半径为 $6, \therefore BQ = OC = 6$ 时, 直线 AB 与 $\square O$ 相切.

① 当 AB 运动到如图 1 所示的位置,

$$BQ = PQ - PB = 8 - 4t.$$

由 $BQ = 6$, 得 $8 - 4t = 6$,

解得 $t = 0.5(\text{s}).$

② 当 AB 运动到如图 2 所示的位置,

$$BQ = PB - PQ = 4t - 8.$$

由 $BQ = 6$, 得 $4t - 8 = 6$,

解得 $t = 3.5(\text{s}).$

\therefore 当 t 为 0.5s 或 3.5s 时直线 AB 与 $\square O$ 相切.

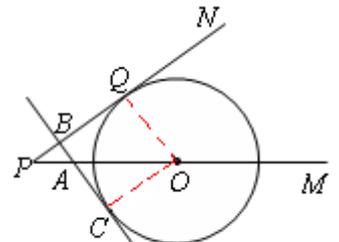


图 1

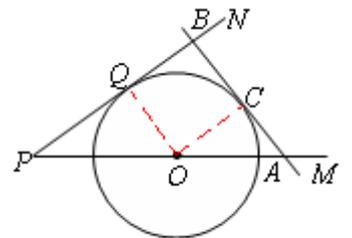


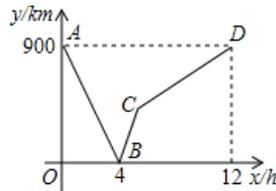
图 2

【考点】 直线和圆相切的性质和判定, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 矩形的判定和性质.

【分析】 (1) 连接 OQ , 由直线和圆相切的性质, 三角形 OPQ 是直角三角形, 应用勾股定理即可求出 PQ 的长.

(2) 由已知可证得 $\triangle PAB \sim \triangle POQ$, 从而可证得四边形 $OCBQ$ 为矩形, 因此得出 $BQ = OC = 6$ 时, 直线 AB 与 $\square O$ 相切. 分两种情况分别求出 t 值.

16. (江苏省南京市 2008 年 10 分) 一列快车从甲地驶往乙地, 一列慢车从乙地驶往甲地, 两车同时出发, 设慢车行驶的时间为 $x(\text{h})$, 两车之间的距离为 $y(\text{km})$, 图中的折线表示 y 与 x 之间的函数关系.



根据图象进行以下探究:

信息读取

- (1) 甲、乙两地之间的距离为_____km;
- (2) 请解释图中点 B 的实际意义;

图象理解

- (3) 求慢车和快车的速度;
- (4) 求线段 BC 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

问题解决

- (5) 若第二列快车也从甲地出发驶往乙地, 速度与第一列快车相同. 在第一列快车与慢车相遇 30 分钟后, 第二列快车与慢车相遇. 求第二列快车比第一列快车晚出发多少小时?

【答案】解: (1) 900.

(2) 图中点 B 的实际意义是: 当慢车行驶 4h 时, 慢车和快车相遇。

(3) 由图象可知, 慢车 12h 行驶的路程为 900km, 所以慢车的速度为 $\frac{900}{12} = 75(\text{km/h})$;

当慢车行驶 4h 时, 慢车和快车相遇, 两车行驶的路程之和为 900km, 所以慢车和快车行驶的速度之和为 $\frac{900}{4} = 225(\text{km/h})$, 所以快车的速度为 150km/h。

(4) 根据题意, 快车行驶 900km 到达乙地, 所以快车行驶 $\frac{900}{150} = 6(\text{h})$ 到达乙地, 此时两车

之间的距离为 $6 \times 75 = 450(\text{km})$, 所以点 C 的坐标为 $(6, 450)$ 。

设线段 BC 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$, 把 $(4, 0)$, $(6, 450)$ 代入得

$$\begin{cases} 0 = 4k + b \\ 450 = 6k + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 225 \\ b = -900 \end{cases}.$$

\therefore 线段 BC 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = 225x - 900$ 。

自变量 x 的取值范围是 $4 \leq x \leq 6$ 。

(5) 慢车与第一列快车相遇 30 分钟后与第二列快车相遇, 此时, 慢车的行驶时间是 4.5h。

把 $x = 4.5$ 代入 $y = 225x - 900$, 得 $y = 112.5$ 。

此时, 慢车与第一列快车之间的距离等于两列快车之间的距离是 112.5km, 所以两列快车出发的间隔时间是 $112.5 \div 150 = 0.75(\text{h})$, 即第二列快车比第一列快车晚出发 0.75h。

【考点】 一次函数综合和应用题, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系。

【分析】 (1) 由图可知, 两车之间的距离开始和终止时相距 900 km, 即甲、乙两地之间的距离为 900 km。

(2) 因为点 B 在 x 轴上, 即此时两车之间的距离为 0, 慢车和快车相遇。

(3) 由图象慢车 12h 行驶的路程为 900km, 求出慢车的速度; 根据慢车行驶 4h 时, 慢车和快车相遇, 两车行驶的路程之和为 900km 求出快车的速度。

(4) 求出点 C 的坐标, 用待定系数法即可求出线段 BC 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式和自变量 x 的取值范围 (由点 B 和点 C 的横坐标确定)。

(5) 慢车与第一列快车相遇 30 分钟后与第二列快车相遇, 此时, 慢车的行驶时间是 4.5h。由于 $4 \leq x \leq 6$, 所以此时慢车在 BC 段上。因此, 代入 $y = 225x - 900$, 求得慢车与第一列快车之间的距离 (即两列快车之间的距离), 除以速度, 即得两列快车出发的间隔时间 (即第二列快车比第一列快车晚出发时间)。

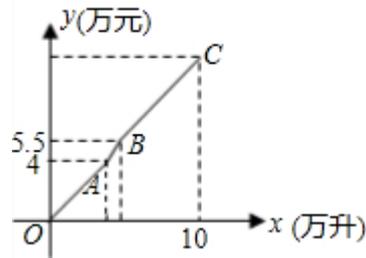
17. (江苏省 2009 年 12 分) 某加油站五月份营销一种油品的销售利润 y (万元) 与销售量 x (万升) 之间函数关系的图象如图中折线所示, 该加油站截止到 13 日调价时的销售利润为 4 万元, 截止至 15 日进油时的销售利润为 5.5 万元. (销售利润 = (售价 - 成本价) \times 销售量)

请你根据图象及加油站五月份该油品的所有销售记录提供的信息, 解答下列问题:

(1) 求销售量 x 为多少时, 销售利润为 4 万元;

(2) 分别求出线段 AB 与 BC 所对应的函数关系式;

(3) 我们把销售每升油所获得的利润称为利润率, 那么, 在 OA 、 AB 、 BC 三段所表示的销售信息中, 哪一段的利润率最大? (直接写出答案)



| 五月份销售记录 | |
|---------|--------------------------|
| 1日: | 有库存6万升, 成本价4元/升, 售价5元/升. |
| 13日: | 售价调整为5.5元/升. |
| 15日: | 进油4万升, 成本价4.5元/升. |
| 31日: | 本月共销售10万升. |

【答案】解: (1) 根据题意, 当销售利润为4万元, 销售量为 $4 \div (5-4) = 4$ (万升)。

答: 销售量 x 为4万升时销售利润为4万元。

(2) \because 点 A 的坐标为 $(4, 4)$, 从13日到15日利润为 $5.5 - 4 = 1.5$ (万元),

\therefore 销售量为 $1.5 \div (5.5 - 4) = 1$ (万升)。 \therefore 点 B 的坐标为 $(5.5, 5.5)$ 。

设线段 AB 所对应的函数关系式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 4 = 4k + b \\ 5.5 = 5k + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 1.5 \\ b = -2 \end{cases}.$$

\therefore 线段 AB 所对应的函数关系式为 $y = 1.5x - 2 (4 \leq x \leq 5)$ 。

\because 从15日到31日销售5万升, 利润为 $1 \times 1.5 + 4 \times (5.5 - 4.5) = 5.5$ (万元),

\therefore 本月销售该油品的利润为 $5.5 + 5.5 = 11$ (万元)。 \therefore 点 C 的坐标为 $(10, 11)$ 。

设线段 BC 所对应的函数关系式为 $y = mx + n$,

$$\text{则} \begin{cases} 5.5 = 5m + n \\ 11 = 10m + n \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m = 1.1 \\ n = 0 \end{cases}.$$

\therefore 线段 BC 所对应的函数关系式为 $y = 1.1x (5 \leq x \leq 10)$ 。

(3) 线段 AB 。

【考点】一次函数的应用, 待定系数法, 直线上点的坐标与方程的关系。

【分析】(1) 根据公式: 销售利润 = (售价 - 成本价) \times 销售量, 在已知售价和成本价时, 可求销售利润为4万元时的销售量: 销售量 = 销售利润 \div (售价 - 成本价)。

(2) 分别求出点 A 、 B 、 C 的坐标, 根据点在直线上, 点的坐标满足方程的关系, 用待定系数

法即可求出 AB 和 BC 所对应的函数关系式。

$$(3) OA \text{ 段的利润率} = \frac{\text{销售利润}}{\text{销售量} \times \text{售价}} = \frac{4 \text{ 万元}}{4 \text{ 万升} \times 5 \text{ 元/升}} = 20\% ;$$

$$AB \text{ 段的利润率} = \frac{\text{销售利润}}{\text{销售量} \times \text{售价}} = \frac{1.5 \text{ 万元}}{1 \text{ 万升} \times 5.5 \text{ 元/升}} \approx 27.3\% ;$$

$$BC \text{ 段的利润率} = \frac{\text{销售利润}}{\text{销售量} \times \text{售价}} = \frac{5.5 \text{ 万元}}{5 \text{ 万升} \times 5.5 \text{ 元/升}} = 20\% .$$

$\therefore AB$ 段的利润率最大。

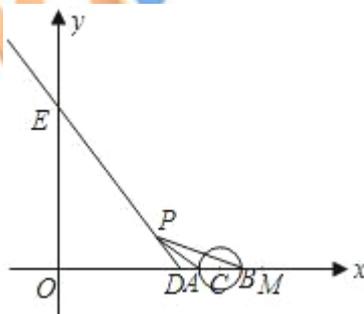
18. (江苏省 2009 年 12 分) 如图, 已知射线 DE 与 x 轴和 y 轴分别交于点 $D(3,0)$ 和点 $E(0,4)$. 动点 C 从点 $M(5,0)$ 出发, 以 1 个单位长度/秒的速度沿 x 轴向左作匀速运动, 与此同时, 动点 P 从点 D 出发, 也以 1 个单位长度/秒的速度沿射线 DE 的方向作匀速运动. 设运动时间为 t 秒.

(1) 请用含 t 的代数式分别表示出点 C 与点 P 的坐标;

(2) 以点 C 为圆心、 $\frac{1}{2}t$ 个单位长度为半径的 $\odot C$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 连接 PA 、 PB .

①当 $\odot C$ 与射线 DE 有公共点时, 求 t 的取值范围;

②当 $\triangle PAB$ 为等腰三角形时, 求 t 的值.



【答案】解: (1) $\because OM = 5, CM = t \cdot 1 = t, \therefore OC = 5 - t. \therefore C(5 - t, 0)$ 。

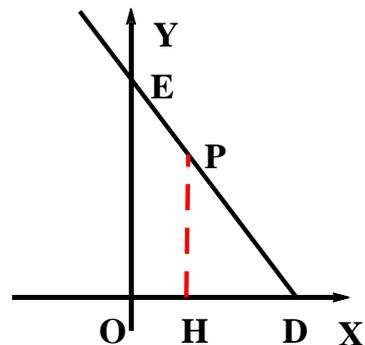
过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H ,

$$\because D(3,0), E(0,4), \therefore OD = 3, OE = 4, DE = 5.$$

又 $\because DP = 1 \cdot t = t$, 且 $\triangle DPH \sim \triangle DEO$,

$$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{HD}{OD} = \frac{HP}{OE}, \text{ 即 } \frac{t}{5} = \frac{HD}{3} = \frac{HP}{4}.$$

$$\therefore HD = \frac{3}{5}t, HP = \frac{4}{5}t. \therefore OH = 3 - \frac{3}{5}t.$$



$$\therefore P\left(3-\frac{3}{5}t, \frac{4}{5}t\right).$$

(2) ①当⊙C的圆心C由点M(5,0)向左运动,使点A到点

D时,有 $5-3=\frac{3}{2}t$,即 $t=\frac{4}{3}$ 。

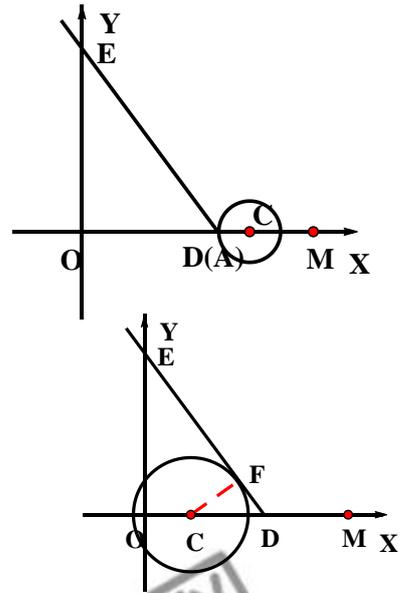
当点C在点D左侧,⊙C与射线DE相切时,过点C作CF⊥射线DE,垂足为F,则由∠CDF=∠EDO,得△CDF∽△EDO,

$$\text{则 } \frac{CF}{4} = \frac{3-(5-t)}{5}. \text{ 解得 } CF = \frac{4t-8}{5}.$$

$$\text{由 } CF = \frac{1}{2}t, \text{ 即 } \frac{4t-8}{5} = \frac{1}{2}t, \text{ 解得 } t = \frac{16}{3}.$$

∴当⊙C与射线DE有公共点时,t的取值范围为

$$\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{16}{3}.$$



② (I) 当PA=AB时,过P作PQ⊥x轴,垂足为Q,有

$$PA^2 = PQ^2 + AQ^2.$$

由(1)得, $PQ = \frac{4}{5}t$, $OQ = 3 - \frac{3}{5}t$,

$$\therefore AQ = OQ - OA = \left(3 - \frac{3}{5}t\right) - \left(5 - \frac{3}{2}t\right) = \frac{9}{10}t - 2.$$

$$\text{又 } \because PA = AB = t, \therefore t^2 = \left(\frac{4}{5}t\right)^2 + \left(\frac{9}{10}t - 2\right)^2, \text{ 即 } 9t^2 - 72t + 80 = 0.$$

$$\text{解得 } t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = \frac{20}{3}.$$

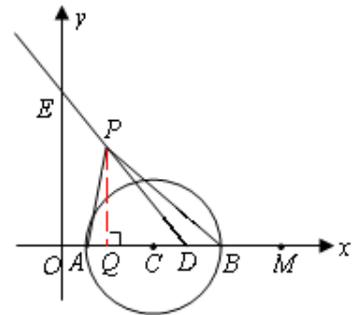
(II) 当PA=PB时,有PC⊥AB,∴ $5-t=3-\frac{3}{5}t$,解得 $t_3=5$ 。

$$\text{(III) 当 } PB = AB \text{ 时, 有 } PB^2 = PQ^2 + BQ^2 = \frac{16}{25}t^2 + \left(5 - \frac{1}{2}t - 3 + \frac{3}{5}t\right)^2,$$

$$\therefore \frac{13}{20}t^2 + \frac{2}{5}t + 4 = t^2, \text{ 即 } 7t^2 - 8t - 80 = 0.$$

$$\text{解得 } t_4 = 4, t_5 = -\frac{20}{7} \text{ (不合题意, 舍去).}$$

综上所述,当△PAB是等腰三角形时, $t = \frac{4}{3}$,或 $t = 4$,或 $t = 5$,或 $t = \frac{20}{3}$ 。



【考点】动点问题,勾股定理,相似三角形的判定和性质,直线和圆的位置关系,等腰三角形时的性质,

解一元二次方程。

【分析】(1) 由 $OM = 5$, $CM = t \cdot 1 = t$ 可得 $OC = 5 - t$, 从而得到点 C 的坐标。作点 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H , 利用 $\triangle DPH \sim \triangle DEO$ 可得 $HD = \frac{3}{5}t$, $HP = \frac{4}{5}t$, 从而得到点 P 的坐标。

(2) ①当 $\odot C$ 与射线 DE 有公共点时, 考虑 (I) 当 $\odot C$ 的圆心 C 由点 $M(5,0)$ 向左运动, 使点 A 到点 D 时, t 的取值; (II) 当点 C 在点 D 左侧, $\odot C$ 与射线 DE 相切时, t 的取值。当 t 在二者之间时, $\odot C$ 与射线 DE 有公共点。

②分 $PA = AB$, $PA = PB$, $PB = AB$ 三种情况讨论即可。

19. (江苏省南京市 2010 年 8 分) 某批发商以每件 50 元的价格购进 800 件 T 恤。第一个月以单价 80 元销售, 售出了 200 件; 第二个月如果单价不变, 预计仍可售出 200 件, 批发商为增加销售量, 决定降价销售, 根据市场调查, 单价每降低 1 元, 可多售出 10 件, 但最低单位应高于购进的价格; 第二个月结束后, 批发商将对剩余的 T 恤一次性清仓销售, 清仓时单价为 40 元。设第二个月单价降低 x 元。

(1) 填表 (不需要化简)

| 时 间 | 第一个月 | 第二个月 | 清仓时 |
|--------|------|------|-----|
| 单 价(元) | 80 | ▲ | 40 |
| 销售量(件) | 200 | ▲ | ▲ |

(2) 如果批发商希望通过销售这批 T 恤获利 9000 元, 那么第二个月的单价应是多少元?

【答案】解: (1)

| 时 间 | 第一个月 | 第二个月 | 清仓时 |
|--------|------|-------------|---------------------------|
| 单 价(元) | 80 | $80 - x$ | 40 |
| 销售量(件) | 200 | $200 + 10x$ | $800 - 200 - (200 + 10x)$ |

(2) 根据题意, 得

$$80 \times 200 + (80 - x)(200 + 10x) + 40[800 - 200 - (200 + 10x)] - 50 \times 800 = 9000,$$

整理, 得 $x^2 - 20x + 100 = 0$, 解这个方程得 $x_1 = x_2 = 10$ 。

当 $x = 10$ 时, $80 - x = 70 > 50$ 。

答: 第二个月的单价应是 70 元。

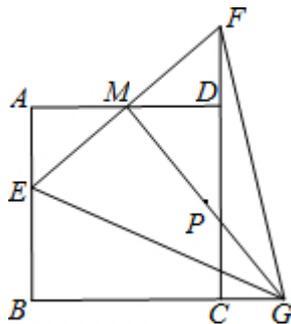
【考点】一元二次方程的应用。

【分析】(1) 由“第二个月单价降低 x 元”知第二个月的单价为 $(80 - x)$, 销售量为 $(200 + 10x)$ 件, 清仓时为总数量分别减去前面两个月的剩余量, 即 $800 - 200 - (200 + 10x)$ 。

(2) 根据销售额-成本=利润, 由“获利 9000 元”建立方程得 $80 \times 200 + (80-x)(200+10x) + 40[800-200-(200+10x)] - 50 \times 800 = 9000$, 化简后求解。

20. (江苏省南京市 2010 年 8 分) 如图, 正方形 ABCD 的边长是 2, M 是 AD 的中点. 点 E 从点 A 出发, 沿 AB 运动到点 B 停止. 连接 EM 并延长交射线 CD 于点 F, 过 M 作 EF 的垂线交射线 BC 于点 G, 连接 EG、FG.

- (1) 设 $AE=x$ 时, $\triangle EGF$ 的面积为 y . 求 y 关于 x 的函数关系式, 并填写自变量 x 的取值范围;
- (2) P 是 MG 的中点, 请直接写出点 P 运动路线的长.



【答案】解: (1) 当点 E 与点 A 重合时, $x=0$, $y=\frac{1}{2} \times 2 \times 2=2$.

当点 E 与点 A 不重合时, $0 < x \leq 2$.

在正方形 ABCD 中, $\angle A = \angle ADC = 90^\circ$, $\therefore \angle MDF = 90^\circ$. $\therefore \angle A = \angle MDF$.

$\because AM = DM$, $\angle AME = \angle DMF$, $\therefore \triangle AME \cong \triangle DMF$ (SAS). $\therefore ME = MF$.

在 $Rt\triangle AME$ 中, $AE=x$, $AM=1$, $ME = \sqrt{x^2 + 1}$. $\therefore EF = 2ME = 2\sqrt{x^2 + 1}$.

过点 M 作 $MN \perp BC$, 垂足为 N (如图).

则 $\angle MNG = 90^\circ$, $\angle AMN = 90^\circ$, $MN = AB = AD = 2AM$.

$\therefore \angle AME + \angle EMN = 90^\circ$.

$\because \angle EMG = 90^\circ$, $\therefore \angle GMN + \angle EMN = 90^\circ$.

$\therefore \angle AME = \angle GMN$.

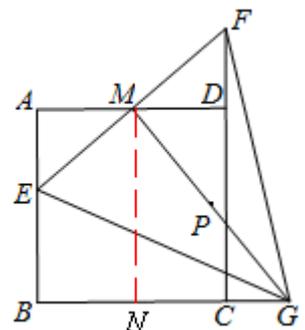
$\therefore Rt\triangle AME \sim Rt\triangle NMG$, $\therefore \frac{AM}{NM} = \frac{ME}{MG}$, 即 $\frac{ME}{MG} = \frac{1}{2}$,

$\therefore MG = 2ME = 2\sqrt{x^2 + 1}$,

$\therefore y = \frac{1}{2} EF \cdot MG = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2 + 1} \times 2\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2$,

$\therefore y = 2x^2 + 2$, 其中 $0 \leq x \leq 2$.

(2) 点 P 运动路线的长为 2.



【考点】正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质,

【分析】(1)欲求 y 关于 x 的函数关系式,即 $\triangle EGF$ 的面积,观察图形发现 $S_{\triangle EGF} = \frac{1}{2} EF \cdot MG$,由条件 $AM=DM$ 及正方形的性质可得 $\triangle AME \cong \triangle DMF$,所以 $EF=2EM$,因此求出面积的关键是求出 MG 。结合图形发现过点 M 作 $MN \perp BC$,垂足为 N 可得 $Rt\triangle AME \sim Rt\triangle NMG$,从而运用相似三角形的性质得到 MG 的长,问题获解。

(2)如图,点 P 运动的路线在 AB 的中垂线 OP 上,理由如下:

由(1)知 $MG=2ME$,又点 P 是 MG 的中点,

$\therefore MP=ME$ 。

又 $\because \angle PMG = 90^\circ - \angle EMO = \angle EMA, \angle MOP = \angle A = 90^\circ$,

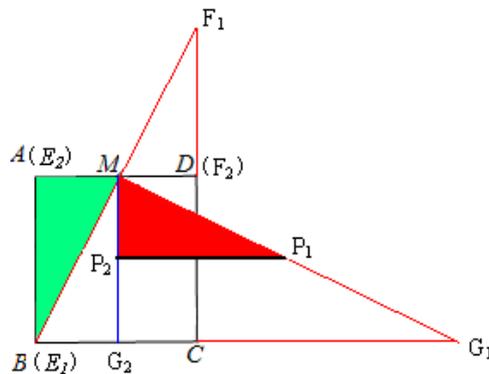
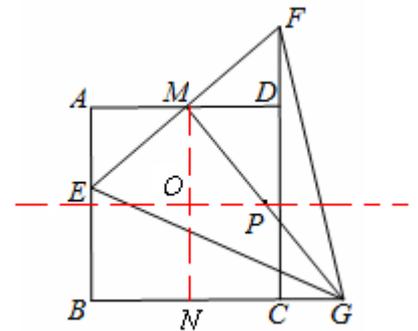
$\therefore Rt\triangle MOP \cong Rt\triangle MAE$ (AAS)。 $\therefore MO=AM$ 。

又 \because 正方形 $ABCD$ 中 M 是 AD 的中点, $\therefore MO=ON$ 。

\therefore 点 P 在 AB 的中垂线 OP 上。

如图, P_1P_2 (P_1 是 P 起始位置, P_2 是 P 终止位置。) 是点 P 运动路线的长。

由 $Rt\triangle ABM \cong Rt\triangle P_2P_1M$ (ASA), 得 $P_1P_2=AB=2$ 。



21. (江苏省南京市 2011 年 9 分) 如图①, P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 PA 、 PB 、 PC , 在 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PAC$ 中, 如果存在一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 那么就称 P 为 $\triangle ABC$ 的自相似点。

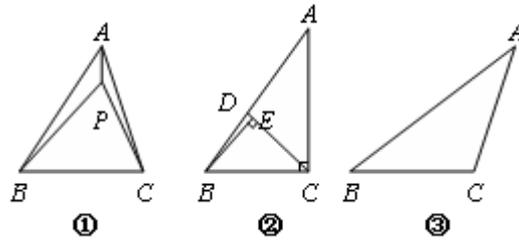
(1)如图②, 已知 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$,

$\angle ACB > \angle A$, CD 是 AB 上的中线, 过点 B 作 $BE \perp CD$, 垂足为 E , 试说明 E 是 $\triangle ABC$ 的自相似点。

(2)在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A < \angle B < \angle C$ 。

①如图③, 利用尺规作出 $\triangle ABC$ 的自相似点 P (写出作法并保留作图痕迹);

②若 $\triangle ABC$ 的内心 P 是该三角形的自相似点, 求该三角形三个内角的度数。



【答案】解：(1)在 Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， CD 是 AB 上的中线，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB. \therefore CD=BD. \therefore \angle BCE = \angle ABC.$$

$$\because BE \perp CD, \therefore \angle BEC = 90^\circ. \therefore \angle BEC = \angle ACB. \therefore \triangle BCE \sim \triangle ABC.$$

$\therefore E$ 是 $\triangle ABC$ 的自相似点。

(2)①作图如图：

作法如下：(i) 在 $\angle ABC$ 内，作 $\angle CBD = \angle A$ ；(ii) 在 $\angle ACB$ 内，作 $\angle BCE = \angle ABC$ ； BD 交 CE 于点 P 。则 P 为 $\triangle ABC$ 的自相似点。

②连接 PB 、 PC 。 $\because P$ 为 $\triangle ABC$ 的内心，

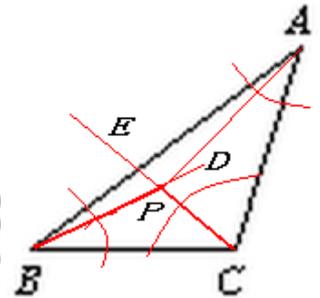
$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

$\because P$ 为 $\triangle ABC$ 的自相似点， $\therefore \triangle BCP \sim \triangle ABC$ 。

$$\therefore \angle PBC = \angle A, \angle BCP = \angle ABC = 2\angle PBC = 2\angle A, \angle ACB = 2\angle BCP = 4\angle A.$$

$$\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ, \therefore \angle A + 2\angle A + 4\angle A = 180^\circ. \therefore \angle A = \frac{180^\circ}{7}.$$

$$\therefore \text{该三角形三个内角的度数分别为 } \frac{180^\circ}{7}, \frac{360^\circ}{7}, \frac{720^\circ}{7}.$$



【考点】直角三角形斜边上的中线的性质，等腰三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，尺规作图，三角形内心定义，三角形内角和定理。

【分析】(1)由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半知 $\triangle CDB$ 是等腰三角形，从而得对应角 $\angle BCE = \angle ABC$ 。从而由两个都是直角三角形而得证。

(2)①由相似三角形两个角相等的判定，分别作出两个角即可得到。

②由三角形内心是角平分线的交点和相似三角形对应角相等的性质推出三个角之间的关系，再应用三角形内角和定理求。

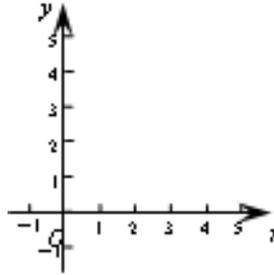
22. (江苏省南京市 2011 年 11 分) 问题情境:已知矩形的面积为 a (a 为常数, $a > 0$), 当该矩形的长为多少时, 它的周长最小? 最小值是多少?

数学模型:设该矩形的长为 x , 周长为 y , 则与 x 的函数关系式为 $y = 2(x + \frac{a}{x})(x > 0)$.

探索研究:(1)我们可以借鉴以前研究函数的经验,先探索函数 $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象性质.

17. 填写下表,画出函数的图象:

| | | | | | | | | | |
|---|-------|---------------|---------------|---------------|---|---|---|---|-------|
| x | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| y | | | | | | | | | |



②观察图象,写出该函数两条不同类型的性质;

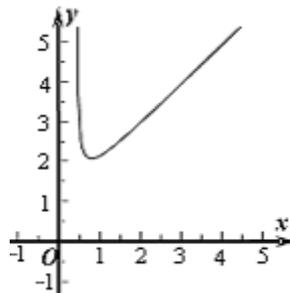
③在求二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的最大(小)值时,除了通过观察图象,还可以通过配方得到.请你通过配方法求函数 $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的最小值.

解决问题:(2)用上述方法解决“问题情境”中的问题,直接写出答案.

【答案】 解:(1)①

| | | | | | | | | | |
|---|-------|----------------|----------------|---------------|---|---------------|----------------|----------------|-------|
| x | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| y | | $\frac{17}{4}$ | $\frac{10}{3}$ | $\frac{5}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{10}{3}$ | $\frac{17}{4}$ | |

函数 $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象如图:



②本题答案不唯一,下列解法供参考.

当 $0 < x < 1$ 时, y 随 x 增大而减小;当 $x > 1$ 时, y 随 x 增大而增大;当 $x = 1$ 时函数

$y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的最小值为 2.

$$\textcircled{3} y = x + \frac{1}{x} = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{\frac{1}{x}})^2 = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{\frac{1}{x}})^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}})^2+2$$

当 $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}=0$, 即 $x=1$ 时, 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$) 的最小值为 2.

(2) 当该矩形的长为 \sqrt{a} 时, 它的周长最小, 最小值为 $4\sqrt{a}$.

【考点】画和分析函数的图象, 配方法求函数的最大(小)值。

【分析】(1) 将 x 值代入函数关系式求出 y 值, 描点作图即可. 然后分析函数图像.

$$(2) \text{仿(1)③ } y=2\left(x+\frac{a}{x}\right)=2\left[(\sqrt{x})^2+\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2\right]$$

$$=2\left[(\sqrt{x})^2+\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}\right]=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+4\sqrt{a}$$

所以, 当 $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{a}{x}}=0$, 即 $x=\sqrt{a}$ 时, 函数 $y=2\left(x+\frac{a}{x}\right)$ ($x>0$) 的最小值为 $4\sqrt{a}$.

23. ((2012 江苏南京 9 分) “?” 的思考

下框中是小明对一道题目的解答以及老师的批阅。

题目: 某村计划建造如图所示的矩形蔬菜温室, 要求长与宽的比为 2: 1, 在温室内, 沿前侧内墙保留 3m 的空地, 其他三侧内墙各保留 1m 的通道, 当温室的长与宽各为多少时, 矩形蔬菜种植区域的面积是 288m^2 ?

解: 设矩形蔬菜种植区域的宽为 $x\text{m}$, 则长为 $2x\text{m}$,

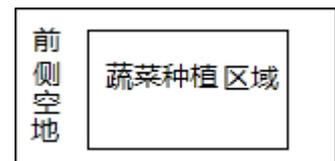
根据题意, 得 $x\cdot 2x=288$.

解这个方程, 得 $x_1=-12$ (不合题意, 舍去), $x_2=12$

所以温室的长为 $2\times 12+3+1=28$ (m), 宽为 $12+1+1=14$ (m)

答: 当温室的长为 28m, 宽为 14m 时, 矩形蔬菜种植区域的面积是 288m^2 .

?



我的结果也正确

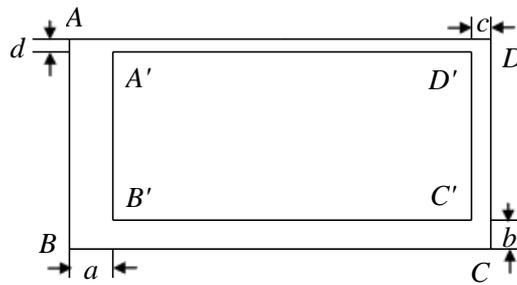
小明发现他解答的结果是正确的, 但是老师却在他的解答中划了一条横线, 并打开了一个“?”

结果为何正确呢?

(1) 请指出小明解答中存在的问题, 并补充缺少的过程:

变化一下会怎样……

(2) 如图, 矩形 $A'B'C'D'$ 在矩形 $ABCD$ 的内部, $AB\parallel A'B'$, $AD\parallel A'D'$, 且 $AD:AB=2:1$, 设 AB 与 $A'B'$ 、 BC 与 $B'C'$ 、 CD 与 $C'D'$ 、 DA 与 $D'A'$ 之间的距离分别为 a 、 b 、 c 、 d , 要使矩形 $A'B'C'D'\sim$ 矩形 $ABCD$, a 、 b 、 c 、 d 应满足什么条件? 请说明理由.



【答案】解：(1) 小明没有说明矩形蔬菜种植区域的长与宽之比为 2:1 的理由。

在“设矩形蔬菜种植区域的宽为 xm ，则长为 $2xm$ 。”前补充以下过程：

设温室的宽为 ym ，则长为 $2ym$ 。

则矩形蔬菜种植区域的宽为 $(y-1-1)m$ ，长为 $(2y-3-1)m$ 。

$$\therefore \frac{2y-3-1}{y-1-1} = \frac{2y-4}{y-2} = 2, \therefore \text{矩形蔬菜种植区域的长与宽之比为 } 2:1.$$

(2) $a+c+b+d=2$ 。理由如下：

要使矩形 $A'B'C'D' \sim$ 矩形 $ABCD$ ，就要 $\frac{A'D'}{A'B'} = \frac{AD}{AB}$ ，即 $\frac{AD-(a+c)}{AB-(b+d)} = \frac{2}{1}$ ，

即 $\frac{2AB-(a+c)}{AB-(b+d)} = \frac{2}{1}$ ，即 $a+c+b+d=2$ 。

【考点】一元二次方程的应用（几何问题），相似多边形的性质，比例的性质。

【分析】(1) 根据题意可得小明没有说明矩形蔬菜种植区域的长与宽之比为 2:1 的理由，所以由已知条件求出矩形蔬菜种植区域的长与宽的关系即可。

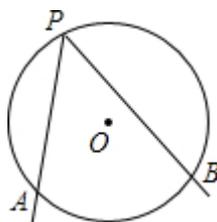
(2) 由使矩形 $A'B'C'D' \sim$ 矩形 $ABCD$ ，利用相似多边形的性质，可得 $\frac{A'D'}{A'B'} = \frac{AD}{AB}$ ，然后利用比例的性质。

24. (2012 江苏南京 10 分) 如图，A、B 为 $\odot O$ 上的两个定点，P 是 $\odot O$ 上的动点 (P 不与 A、B 重合)，我们称 $\angle APB$ 为 $\odot O$ 上关于 A、B 的滑动角。

(1) 已知 $\angle APB$ 是 $\odot O$ 上关于点 A、B 的滑动角。

① 若 AB 为 $\odot O$ 的直径，则 $\angle APB = \underline{\hspace{2cm}}$

② 若 $\odot O$ 半径为 1， $AB = \sqrt{2}$ ，求 $\angle APB$ 的度数



(2) 已知 O_2 为 $\odot O_1$ 外一点, 以 O_2 为圆心作一个圆与 $\odot O_1$ 相交于 A、B 两点, $\angle APB$ 为 $\odot O_1$ 上关于点 A、B 的滑动角, 直线 PA、PB 分别交 $\odot O_2$ 于点 M、N (点 M 与点 A、点 N 与点 B 均不重合), 连接 AN, 试探索 $\angle APB$ 与 $\angle MAN$ 、 $\angle ANB$ 之间的数量关系。

【答案】 解: (1) ① 90° 。

② 如图, 连接 AB、OA、OB。

在 $\triangle AOB$ 中, $\because OA=OB=1, AB=\sqrt{2}, \therefore OA^2+OB^2=AB^2$ 。

$\therefore \angle AOB=90^\circ$ 。

当点 P 在优弧 AB 上时 (如图 1), $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=45^\circ$;

当点 P 在劣弧 AB 上时 (如图 2),

$\angle APB=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle AOB)=135^\circ$ 。

(2) 根据点 P 在 $\odot O_1$ 上的位置分为以下四种情况。

第一种情况: 点 P 在 $\odot O_2$ 外, 且点 A 在点 P 与点 M 之间, 点 B 在点 P 与点 N 之间, 如图 3,

$\therefore \angle MAN=\angle APB+\angle ANB$,

$\therefore \angle APB=\angle MAN-\angle ANB$ 。

第二种情况: 点 P 在 $\odot O_2$ 外, 且点 A 在点 P 与点 M 之间, 点 N 在点 P 与点 B 之间, 如图 4,

$\therefore \angle MAN=\angle APB+\angle ANP=\angle APB+(180^\circ-\angle ANB)$,

$\therefore \angle APB=\angle MAN+\angle ANB-180^\circ$ 。

第三种情况: 点 P 在 $\odot O_2$ 外, 且点 M 在点 P 与点 A 之间, 点 B 在点 P 与点 N 之间, 如图 5,

$\therefore \angle APB+\angle ANB+\angle MAN=180^\circ$,

$\therefore \angle APB=180^\circ-\angle MAN-\angle ANB$ 。

第四种情况: 点 P 在 $\odot O_2$ 内, 如图 6,

$\angle APB=\angle MAN+\angle ANB$ 。

【考点】 圆周角定理, 勾股定理逆定理, 三角形内角和定理和外角性质。

【分析】 (1) ① 根据直径所对的圆周角等于 90° 即可得 $\angle APB=90^\circ$ 。

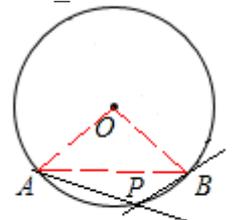
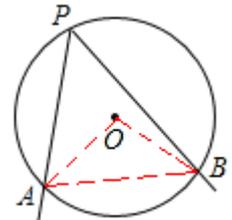


图 2

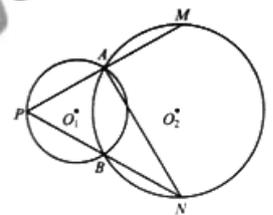


图 3

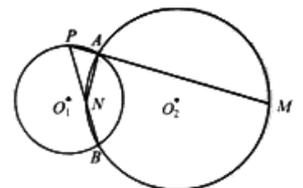


图 4

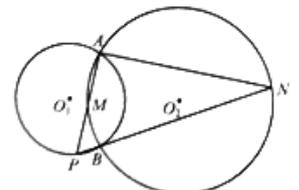


图 5

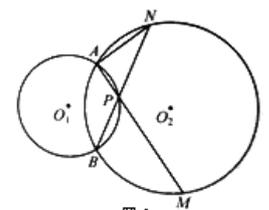


图 6

②根据勾股定理的逆定理可得 $\angle AOB=90^\circ$ ，再分点 P 在优弧 AB 上；点 P 在劣弧 AB 上两种情况讨论即可。

(2) 根据点 P 在 $\odot O_1$ 上的位置分为四种情况得到 $\angle APB$ 与 $\angle MAN$ 、 $\angle ANB$ 之间的数量关系。

zhongkao 中考网