第十三届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛

决赛试题参考答案（初一组）

一、填空(每题 10 分，共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	1℃	29	8	6	2017036	0	6	4

二、解答下列各题（每题10分，共40分，要求写出简要过程）

9. 答案：20,21,22.

解答：设最小角为 x，最大角为 $4x$，另一个角为 y. 则由题目的条件得

$$x+y+4x=180，\quad x\le y\le 4x，\quad 4x<90. \qquad ①$$

由①的前两个式子得到：$6x\le x+y+4x=180\le 9x$，解得 $20\le x\le 30$；又由①的第三个式子得到 $x<22.5$，所以 $20\le x\le 22$.

<u>**评分参考**</u>：1）给出三个关系①给 4 分；2）得出范围给 4 分；3）给出答案给 2 分.

10. 答案：10.

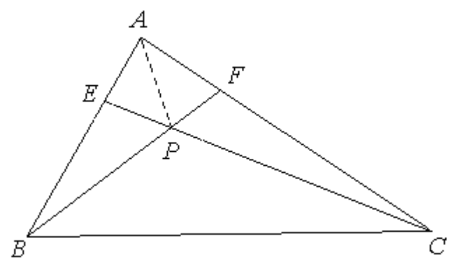
解答：设有 n 只猴子，小明留给自己 p 个桃子，每只猴子分到了 $4p$ 个桃子. 则 $164-p=4pn$，所以 p 是 4 的倍数. 令 $p=4p_1$，则 $41-p_1=4p_1n$，$41-p_1$ 是 4 的倍数. 令 $p_1=4k+1$，则 $40-4k=4(4k+1)n$，$n=\dfrac{10-k}{1+4k}$. 因为 n 是正整数，所以 $k=0$. 当 $k=0$ 时，$n=10$.

<u>**评分参考**</u>：1)给出 p,n 的关系给 3 分；2)得到 n,k 的最终关系给 4 分；3)得到答案给 3 分.

11. 答案：4.

解答：设三角形 EBP 的面积为 X，连接 AP. 若令三角形 APF 的面积为 Y，则三角形 AEP 的面积为 $X-Y$. 因为，

$$S_{\Delta BCF}:S_{\Delta BFA}=S_{\Delta FPC}:S_{\Delta APF}=X:Y,$$



$$S_{\Delta BCE}:S_{\Delta AEC}=S_{\Delta EBP}:S_{\Delta AEP}=X:(X-Y),$$

而 $S_{\Delta BCE}=S_{\Delta BCF}$， $S_{\Delta BFA}=S_{\Delta AEC}=X+X=2X$，所以有 $X:Y=X:(X-Y)$，解得 $Y=\frac{X}{2}$，即 $S_{\Delta BCF}:S_{\Delta BFA}=(12+X):2X=X:\frac{X}{2}=2:1$. 所以 $X=4$. 三角形 EBP 的面积为 4.

评分参考：1)引出参考线给 2 分；2)得到 X 与 Y 的关系式给 4 分；3)得到答案给 4 分.

12. 答案：$x=\frac{1}{2}$，$y=-1$； $x=-\frac{1}{2}$，$y=-1$.

解答：首先必须 $y\neq 0$，否则 $\frac{x}{y}$ 没有意义．若 $x+y=x-y$，则 $y=0$，矛盾．所以 $x+y\neq x-y$．若 $x=0$，则由 $x+y=xy$，或 $x-y=xy$ 都得到 $y=0$，所以 $x\neq 0$，即 $xy\neq 0$. 因此，三个相等的式子只有两种可能：

（1） $x+y=xy=\frac{x}{y}$．由后一等式得到，$y=1$ 或 $y=-1$. 而 $y=1$ 是不可能的，因为此时由第一个等式得到 $x+1=x$，矛盾．当 $y=-1$ 时，由第一个等式得到 $x-1=-x$，即 $2x=1$，所以 $x=\frac{1}{2}$.

（2） $x-y=xy=\frac{x}{y}$．由后一等式同样得到 $y=1$ 或 $y=-1$. 同样，$y=1$ 是不可能的；而当 $y=-1$ 时，由第一个等式得到 $2x=-1$，所以 $x=-\frac{1}{2}$.

评分参考：1）(1)之前给 2 分；2）(1)和(2) 各给 4 分.

三、解答下列各题（每题15分，共30分，要求写出详细过程）

13. 答案：6, 10, 13, 14, 16, 18, 19, 22, 24, 25.

解答：设所用的等边三角形的边长单位为 1. 任何满足条件的六边形的外接三角形一定是一个边长为 l 的大等边三角形. 该六边形可以通过切去边长分别为 a, b, c 的等边三角形的角而得到，其中 a, b, c 为正整数，并且满足：$a\geq b\geq c\geq 1$，$l>a+b$.

又由于用边长为 1 的等边三角形拼成的一个边长为 x（正整数）的等边三角形所需要的个数是 $1+3+5+\cdots+(2x-1)=x^2$. 因此，$n=l^2-(a^2+b^2+c^2)$，其中 $l\geq 3$，$l>a+b$，$a\geq b\geq c\geq 1$.

（1） $l=3$ 时，n 可以为 $3^2-(1^2+1^2+1^2)=9-3=6$.

（2） $l=4$时，n 可以为

$$4^2-(2^2+1^2+1^2)=16-6=10，\quad 4^2-(1^2+1^2+1^2)=16-3=13.$$

（3） $l=5$时，与上面不同的 n 可以为

$$5^2-(3^2+1^2+1^2)=25-11=14，\quad 5^2-(2^2+2^2+1^2)=25-9=16，$$

$$5^2-(2^2+1^2+1^2)=25-6=19，\quad 5^2-(1^2+1^2+1^2)=25-3=22.$$

（4） $l=6$时，与上面不同的 n 可以为

$$6^2-(4^2+1^2+1^2)=36-18=18，\quad 6^2-(3^2+1^2+1^2)=36-11=25，$$

$$6^2-(2^2+2^2+2^2)=36-12=24，\quad 6^2-(2^2+2^2+1^2)=36-9=27.$$

$$6^2-(2^2+1^2+1^2)=36-6=30，\quad 6^2-(1^2+1^2+1^2)=36-3=33.$$

（5） $l=7$时，与上面不同的 n 都比 27 大.

（6） $l\geq 8$时，可以证明满足要求的 n 都不小于 26.

由(1)到(6)可得，前 10 个满足要求的 n 为 6, 10, 13, 14, 16, 18,19, 22, 24, 25.

评分参考: 1)写出 10 个中的 1 个给 1 分; 2)给出足够的理由, 例如(1)之前的部分给 5 分.

14. 答案：$y=-\dfrac{10}{3}$或$y=10$.

解答：因为方程左边的第 1、3 项都是整数，所以 3y 是整数．注意到

$$\left[\frac{25+y^2}{25}\right]=\left[1+\frac{y^2}{25}\right]=1+\left[\frac{y^2}{25}\right],$$

代入方程，得到 $20+3y-10-10\left[\dfrac{y^2}{25}\right]=0$，$1+\dfrac{3y}{10}-\left[\dfrac{y^2}{25}\right]=0$．所以 $\dfrac{3y}{10}$ 是整数，3y 是 10 的倍数．令 3y = 10k，k 是整数，代入得

$$0=1+k-\left[\frac{100k^2}{9\times 25}\right]=1+k-\left[\frac{4k^2}{9}\right]=1+k-\frac{4k^2}{9}+\left\{\frac{4k^2}{9}\right\},$$

其中，对于有理数 x，$\{x\}=x-[x]$．所以有 $1+k-\dfrac{4k^2}{9}=-\left\{\dfrac{4k^2}{9}\right\}$，$-1<1+k-\dfrac{4k^2}{9}\leq 0$．当 k 取不同整数时，$1+k-\dfrac{4k^2}{9}$的情况如下表：

k	≤ -2	$=-1$	$=0$	$=1$	$=2$	$=3$	>3

$1+k-\frac{4k^2}{9}$	<-1	$=-\frac{4}{9}$	$=1$	$=\frac{14}{9}$	$=\frac{11}{9}$	$=0$	<-1

k 的可能值是-1和 3，相应的 $y=-\frac{10}{3}$ 和 $y=10$．代入验算得到 $y=-\frac{10}{3}$ 或 $y=10$．

评分参考：1）得到 $\frac{3y}{10}$ 是整数给 3 分；2）得到关于 k 的不等式给 5 分；3)得到列表的结果给 5 分；3）每个答案各给 1 分.