第十三届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛

决赛试题参考答案（小学组）

一、填空(每题 10 分，共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	2	$\frac{65}{81}$	64	20∶39	3	②，③	9	2005

注：第6题，每答对1个给5分.

二、解答下列各题（每题10分，共40分，要求写出简要过程）

9. **答案**：2900元.

解答： 根据已知条件，五种职位的月薪分别为：A, B, C, D和E，那么：

$$A+B=3000\ldots\ldots(1)$$
$$B+C=3200\ldots\ldots(2)$$
$$C+D=4000\ldots\ldots(3)$$
$$D+E=5200\ldots\ldots(4)$$
$$E+A=4400\ldots\ldots(5)$$

(5)–(1) 得：$E-B=1400$, (4)–(3)+(2) 得：$E+B=4400$. 因此 $E=2900$（元）. 因此，主任的月薪为 2900 元.

评分参考：①每列对一个方程给 1 分；② 正确解出方程给 5 分.

10. **解答**：

$$(4\times4+4)\div4=5,4+(4+4)\div4=6,4+4-4\div4=7,4+4+4-4=8,4+4+4\div4=9.$$

评分参考：答案不唯一, 每列对一个算式给 2 分.

11. **答案**：49.5 cm^2.

解答：如图 1，连接 AC，FG，那么四边形 $ACGF$ 是梯形，三角形 ACF 和三角形 CAG 同底同高, 因而面积相等, 因此有

$$S_{\Delta CHG}=S_{\Delta AHF}=6(\text{cm}^2)；（2 分）$$

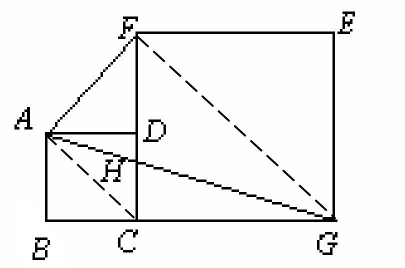

圖 1

由于

$$S_{\Delta CHG}=\frac{1}{2}CH\times CG=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}CF\times CG=\frac{1}{6}CG\times CG=6(\text{cm}^2).$$

因此，$CG=6\text{cm}$；（2 分）因为

$$S_{\Delta AHF}=\frac{1}{2}FH\times AD=\frac{1}{2}\times 2CH\times AD=\frac{1}{3}CF\times AD=\frac{1}{3}CG\times AD=2AD=6\,(\mathrm{cm}^2),$$（2 分）

因此，$AD=3\mathrm{cm}$. 易得 $FD=CF-CD=CG-AD=3\mathrm{cm}$，所以

$$S_{ABGEF}=S_{ABCD}+S_{CGEF}+S_{\Delta ADF}=6\times6+3\times3+\frac{1}{2}\times3\times3=49.5\,(\mathrm{cm}^2).$$（4 分）

注：不做参考线，通过下面推导同样可以得出 $S_{\Delta CHG}=S_{\Delta AHF}=6(\mathrm{cm}^2)$，

$$S_{\Delta ABG}=\frac{1}{2}AB(CG+BC)=\frac{1}{2}AB\times CG+\frac{1}{2}AB\times BC$$
$$=\frac{1}{2}BC\times CF+\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}(CF+AB)\times BC=S_{ABCF}.$$

四边形 $ABCF$ 和三角形 ABG 有公共的部分四边形 $ABCH$，因此 $S_{\Delta CHG}=S_{\Delta AHF}=6(\mathrm{cm}^2)$

评分参考：①可依据上述的采分点给分; ② 仅有正确(或猜出)答案，无过程，只给 2 分. ③ 步骤正确，推导合理，计算错误，适当给分.

12. **答案**：111111, 102564.

解答：设 $\overline{abcde}=x$，依题意得 $100000f+x=f(10x+f)$.（3 分）

整理得：$(10f-1)x=f(100000-f)$，其中 $1\le f\le 9$. 当 $f=1$ 时，$9x=99999$，所以 $x=11111$，即 $\overline{abcdef}=111111$；3 分）

当 $f=4$ 时，$39x=4\times99996$，所以 $x=10256$，即 $\overline{abcdef}=102564$；（3 分）

当 $f=2,3,5,6,7,8,9$ 时，x 无整数解. （5 分）

因此, 满足条件的六位数是 111111 和 102564.（1 分）

评分参考：①列出解式, 给 3 分; ②能给出全部求解过程, 并判断正确, 共给 11 分；计算错误, 适当减分；③最后给出正确答案，给 1 分；④仅给出正确答案，给 5 分.

三、解答下列各题（每题15分，共30分，要求写出详细过程）

13. **答案**：甲共走了 $66\frac{2}{11}$ 分钟，乙走了 $3833\frac{59}{77}$ 米.

解答：记跑道周长为 l，则甲的速度为 $\frac{l}{4}$，乙的速度为 $\frac{l}{7}$. 甲走完 10 圈需 40 分钟，乙走完 10 圈需 70 分钟, 同向行进时，甲两次相邻追上乙（同向而行的相邻两次击掌的时间间隔）所需时间为

$$\frac{l}{\frac{l}{4}-\frac{l}{7}}=\frac{28}{3}$$ 分钟；（2 分）.

相向行进时，甲、乙二人相遇（击掌）到下一次相遇所需时间为

$$\frac{l}{\frac{l}{4}+\frac{l}{7}}=\frac{28}{11}$$ 分钟；（2 分）.

所以在开始 40 分钟里，即甲走完 10 圈时，二人击掌的次数为小于 $40\div\frac{28}{3}$ 的最大整数次, 即 4 次.（2 分）

第 40 分钟时，乙已走过的路程为 $\frac{l}{7}\times 40=\frac{40}{7}l$，所以甲和乙相距（根据题意，较短的那段）的路程为 $\frac{2}{7}l$；（1 分）. 从此开始，甲改变行进方向，甲乙相向而行，所以，二人到第 5 次相遇（击掌）时需 $\frac{28}{11}\times\frac{2}{7}=\frac{8}{11}$ 分钟；（1 分）. 接下来，二人还需要相遇（击掌）10 次，需时 $\frac{28}{11}\times 10=\frac{280}{11}$ 分钟，（1 分）. 因此，二人到第 15 次相遇（击掌），需要 $40+\frac{8}{11}+\frac{280}{11}=66\frac{2}{11}$ 分钟.（3 分）

因此，甲行走共享了 $66\frac{2}{11}$ 分钟，此时，乙行走也用了 $66\frac{2}{11}$ 分钟，因此，乙行走了 $\frac{l}{7}\times 66\frac{2}{11}=\frac{400}{7}\times\frac{738}{11}=3833\frac{59}{77}$ 米.（3分）

<u>评分参考</u>：①可依据上述的采分点给分；② 仅有正确（或猜出）答案，无过程，两问都对，只给 3 分. ③ 步骤正确，推导合理，计算错误，适当给分.

14. 答案：647、638 和 836.

解答：

① 因为 “梦”、“想”、“成”和“真”代表 2、3、4、5、6、7 和 8 中 4 个不同的数字，并且“梦想成真”所代表的四位数能被 9 整除，因此它们代表的数字的和也能被 9 整除，并且由于 13<“梦”+“想”+“成”+“真”<27，所以“梦”+“想”+“成”+“真”＝18. （5 分）

② 由 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝45 和“北”+“京”+“梦”+“想”+“成”+“真”＝1+9+18=28, 可以得到“奥”＋“运”＋“会”＝17，从而“奥”、“运”和“会”所代表的 3 个不同的数字相应地就应当是：{4,6,7}、{4,5,8}、{3,6,8}和{2,7,8}. （5 分）

③ 由{4,6,7}、{4,5,8}、{3,6,8}和{2,7,8}四组数，可以组成 24 个三位数，分别乘 9，仅有 647×9＝5823，638×9＝5742，836×9＝7524 符合要求，即算式中的 8 个数字不同，没有 1 和 9.

所以，“奥运会”所代表的三位整数是 647、638 和 836. （5 分）

<u>评分参考</u>：①能给出全部推断过程，分析正确，每步骤给 5 分；②推理正确，分析合理，但计算错误，适当减分；③仅给出正确答案，给 5 分.