

## 第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

### 决赛试题 A (初二组)

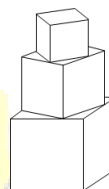
(时间: 2013 年 4 月 20 日 10:00~11:30)

#### 一、填空题 (每小题 10 分, 共 80 分)

1. 化简:  $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} =$ \_\_\_\_\_.

2. 从 1~2013 的自然数中, 含有重复数字的自然数的个数等于\_\_\_\_\_.

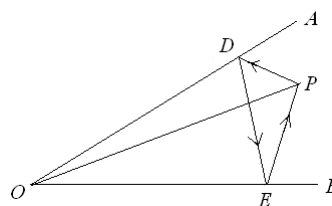
3. 三个正方体粘在一起构成的几何体如图所示, 其中上面正方体的下底面正方形的四个顶点分别是下面正方体上底面正方形的三等分点. 如果最下面正方体的棱长为 9, 那么这个几何体的表面积是\_\_\_\_\_.



4. 对一切实数  $x$ , 不等式  $x^2 + |4x - a| \geq 6$  均成立, 则非负实数  $a$  的最小值是\_\_\_\_\_.

5. 已知二次三项式  $ax^2 + bx + c$  当  $x=2$  时, 取到最小值  $-1$ ; 且它的两根的立方和为 24. 如果  $x=-1$ , 那么这个二次三项式的值是\_\_\_\_\_.

6. 已知  $\angle AOB = 30^\circ$ . 在角的内部距顶点  $O$  为 1 米的  $P$  点住有一个蓝精灵. 蓝精灵从  $P$  走到角的  $OA$  边上的一点, 即刻返身走到  $OB$  边的一点, 然后走回到  $P$  点. 蓝精灵所走的最短路程是\_\_\_\_\_米.



7. 已知在平面直角坐标系中有如下 36 条直线:

$$y = 18x + 17, y = 17x + 16, \dots, y = 2x + 1, y = x,$$

$$y = -x, y = -2x + 1, \dots, y = -17x + 16, y = -18x + 17,$$

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

那么由这些直线相交所构成的交点有\_\_\_\_\_个.

8. 若在实数范围内有因式分解:  $x^3 + px + q = (x-a)(x-b)(x-c)$ , 且  $q \neq 0$ , 则

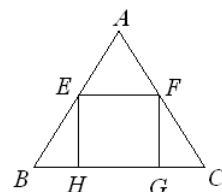
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

## 二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 只用 4 个数码 4 和一些加、减、乘、除、幂、开平方运算和括号, 写出 5 个不同的、值都等于 7 的算式. (通过加法、乘法交换律和结合律, 使两个算式相同, 则视为相同的算式, 如:  $4+4-\sqrt{4 \div 4}$ ,  $4-\sqrt{4 \div 4}+4$ ,  $-\sqrt{4 \div 4}+4+4$  和  $-(\sqrt{4 \div 4}-4)+4$  都视为相同的算式.)

10. 学校对植树有两种补贴方案: 第一种方案是每成活一棵补助 5 元, 不成活的每棵补助 2 元, 未完成植树任务的部分, 不补也不罚; 第二种方案是, 先补贴 130 元, 再每成活一棵补贴 3 元, 不成活的每棵罚 1 元, 未完成植树任务的部分, 每棵罚 2 元. 不管按照那种方案补贴, 梁兵都得到种树补贴 271 元. 问: 梁兵的植树任务是多少棵?

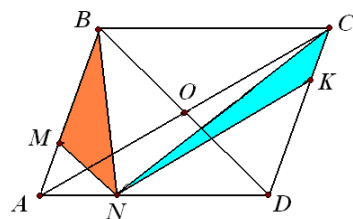
11. 如图, 矩形  $EFGH$  内接于边长为 1 的正三角形  $ABC$  中,  $GH$  在  $BC$  边上. 当矩形  $EFGH$  的面积最大时, 求其面积.



12. 黑板上写有  $1, 2, \dots, 2013$  这 2013 个数, 某人擦去黑板上的任意  $n$  个数, 要使得剩下的数中至少有两个数的和是 2 的幂次, 请问:  $n$  最大是多少?

## 三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 平行四边形  $ABCD$  的边  $AD$  上任取一点  $N$ , 过  $N$  作平行于对角线  $AC, BD$  的直线分别交边  $AB, CD$  于点  $M$  和  $K$ . 证明: 三角形  $NMB$  与  $NKC$  等积.



14. 解方程:

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

$$[x] + \left[x + \frac{1}{8}\right] + \left[x + \frac{2}{8}\right] + \cdots + \left[x + \frac{7}{8}\right] = 8x^2 + \frac{7}{8},$$

其中  $[a]$  表示不大于  $a$  的最大整数.

华罗庚金杯