第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 B 参考答案

（初二组）

一、填空（每题 10 分，共 80 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	±16	25	11	10	$\frac{25}{2}$	1	20	3

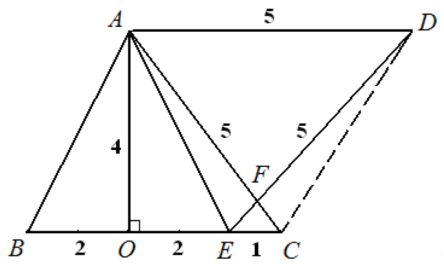
二、解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 答案：$\frac{5}{3}$

解答. 由题意易得 AC=5，又△ABC≌△AED，因此 AC=BC=AE=ED=5.

$$\triangle ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\times5\times4=10,\quad \triangle AEC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\times1\times4=2.$$

所以 $\angle DAE=\angle CAB=\angle ABC$．又由 AB=AE，得 $\angle AEB=\angle ABC$.所以 $\angle DAE=\angle AEB$，因此 AD//BC. 所以 $\angle DAC=\angle ACB$，连接 CD，因此△ACD≌△CAB，所以



△ACD 的面积=△CAB 的面积=△AED 的面积=10.

由于

$$\frac{EF}{FD}=\frac{\text{三角形}AEC\text{的面积}}{\text{三角形}ACD\text{的面积}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},$$

所以

$$\frac{EF}{ED}=\frac{EF}{EF+FD}=\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}.$$

因此

$$\frac{\text{三角形}AEF\text{的面积}}{\text{三角形}AED\text{的面积}}=\frac{EF}{ED}=\frac{1}{6},\ \text{即}\ \frac{\text{三角形}AEF\text{的面积}}{10}=\frac{1}{6}.$$

所以

$$\text{三角形 }AEF\text{ 的面积}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

10. 答案：61

解答. 设成活 a 棵，没有成活 b 棵，未完成植树 c 棵. 则

$$\begin{cases}5a+2b=271\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\3a-b-2c+130=271\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由（1）可知，a 是奇数，且 $a\le 54$；由（2）可知，$a\ge 47$. 下面对 $a=47,49,51,53$ 进行试算，求得整数解:

$a=47,b=18,c=-9$,(不合要求);

$a=49,b=13,c=-3.5$,(不合要求);

$a=51,b=8,c=2$,
$a+b+c=51+8+2=61$;

$a=53,b=3,c=7.5$,(不合要求).

可见，植树任务数是 61.

11. 答案：不能

解答. 设放的最小自然数为 a，则放的最大自然数为 $a+23$. 于是这 24 个数的和为

$$A = 12(2a + 23).$$

假设可能，设每个正方形边上的数之和为 S．因为共有5个正方形，这些和的和为 $5S$．因为每个数在这些和中出现两次，所以有

$$5S = 2A.$$

记最小的16个数的和为 B，则 $B = 8(2a + 15)$．下面分两种情形讨论:

(1) 若 $B \le S$，则

$$S = \frac{2}{5}A = \frac{24}{5}(2a + 23) \ge 8(2a + 15), \quad 9.8a + 110.4 \ge 16a + 120,$$

不存在自然数 a 使得不等式成立.

(2) 情形 $B > S$ 也是不可能的，因为此时不可能选择最大正方形边上的 16 个数使得这 16 个数的和等于 S．

(3)

解答．记第一种、第二种和第三种分类分别分了 i, j, k 类，每类的盒子数目分别为

$$a_1, a_2, \cdots, a_i, \quad b_1, b_2, \cdots, b_j, \quad c_1, c_2, \cdots, c_k,$$

令 $n = i + j + k$．

1) 因为 $a_1, a_2, \cdots, a_i$，$b_1, b_2, \cdots, b_j$，$c_1, c_2, \cdots, c_k$ 包含了 1 到 30 的所有整数，所以 $n \ge 30$．另一方面，

$$\begin{aligned} 3 \times 155 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_i + b_1 + b_2 + \cdots + b_j + c_1 + c_2 + \cdots + c_k \\ &\ge 1 + 2 + \cdots + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465 = 3 \times 155, \end{aligned}$$

所以 $n = i + j + k = 30$，三种分类各自分类的类数之和是 30.

2) 不妨设 $a_1 = 30$，记这 30 个盒子的类为 A 类．因为 $i + j + k = 30$，必有 $j \le 14$ 或 $k \le 14$，不妨设 $j \le 14$．A 类的 30 个盒子分到这不超过 14 个类中去，必有一类至少有三个盒子，这三个盒子里的红球数相同并且黄球数也相同.

3) 将 155 个盒子依次编号为 1 到 155. 各盒子中红，黄，蓝三种颜色的球数见下面的三个表，此种情况满足题目的要求.

盒子中的红球数目	1	2	3	4	5	6
盒子编号	1~30	31~59	60~87	88~114	115~140	141~155
第一种分类的各类盒子个数	30	29	28	27	26	15

盒子中的黄球数目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
盒子编号	1 ~ 20	21 ~ 39	40 ~ 56	57 ~ 72	73 ~ 86	87 ~ 99	100 ~ 111	112 ~ 122	123 ~ 132	133 ~ 141	142 ~ 149	150 ~ 159
第二种分类的各类盒子个数	20	19	17	16	14	13	12	11	10	9	8	6

盒子中的蓝球数目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
盒子编号	1	2, 3	4 ~ 6	7 ~ 10	11 ~ 15	16 ~ 22	23 ~ 40	41 ~ 61	62 ~ 83	84 ~ 106	107 ~ 130	131 ~ 155
第三种分类的各类盒子个数	1	2	3	4	5	7	18	21	22	23	24	25

三、解答下列各题（每题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

12. 答案：38

解答. 设有 n 个工作人员，每周的周 i 天中第一次和第二次休息的人数分别为 x_i, y_i，则

$$n-25 \geq x_i + y_i,\ 1 \leq i \leq 4;\quad n-30 \geq x_i + y_i,\ 5 \leq i \leq 7.$$

将上面的 7 个不等式相加，得

$$4(n-25)+3(n-30) \geq x_1+\cdots x_7+y_1+\cdots+y_7.$$

由于每个工作人员都有休息第一天和第二天的时候，所以，

$$x_1+\cdots x_7 = y_1+\cdots+y_7 = n,$$

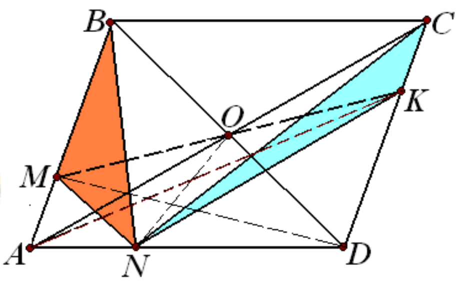
$$4(n-25)+3(n-30)\geq 2n.$$

解得，$n\geq 38$.

当 $n=38$ 时，下表是一个满足题目要求的排班表.

周	一	二	三	四	五	六	日
休息人员 工号	13~21 9~12	22~25 13~21	26~34 22~25	35~38 26~34	1~4 35~38	5~8 1~4	9~12 5~8
上班人员 工号	1~8 22~38	1~12 26~38	1~21 35~38	1~25	5~34	9~38	1~4 13~38

解答. 连接 AK. 先证 $AM=CK$.



$$\frac{CK}{CD}=\frac{\Delta ACK\text{的面积}}{\Delta ACD\text{的面积}}=\frac{\Delta ACN\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}$$

$$=\frac{\Delta ABN\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}=\frac{\Delta AMD\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}=\frac{AM}{AB}.$$

因为 $CD=AB$，所以 $AM=CK$. 连接 OM，OK，ON. 则 $\triangle OMA\cong\triangle OKC$. 所以 $\angle MOA=\angle KOC$. 因此

$$\angle MOA+\angle AOK=\angle KOC+\angle AOK=180^\circ,$$

所以 M, O, K 共线，ON 是 $\triangle KNM$ 的中线，所以

$$\triangle ONM\text{ 的面积}=\triangle OKN\text{ 的面积}.$$

但

$$\triangle NMB\text{ 的面积}=\triangle ONM\text{ 的面积}，\triangle NKC\text{ 的面积}=\triangle ONK\text{ 的面积}.$$

所以

$$\triangle ONM\text{ 的面积}=\triangle OKC\text{ 的面积}.$$

因此，三角形 NMB 与 NKC 等积.