

第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A 参考答案

(小学高年级组)

一、填空题 (每题 10 分, 共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	25	2, 3	316	12	62	74	94	54

二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9.

解答. 例如

$$(4+4+4) \div 4 = 3,$$

$$4 - (4-4) \times 4 = 4,$$

$$(4 \times 4 + 4) \div 4 = 5,$$

$$(4+4) \div 4 + 4 = 6.$$

10. 答案: 25

解答. 设比小明小的学生为 x 人, 比小华小的学生为 y 人. 因为比小明大的学生为 $2x$ 人, 所以全班学生共 $N = 3x + 1$ 人; 又因为比小华大的学生为 $3y$ 人, 所以全班学生共 $N = 4y + 1$ 人. 这样, $N - 1$ 既是 3 的倍数, 又是 4 的倍数, 因此 $N - 1$ 是 $3 \times 4 = 12$ 的倍数. 这个班学生人数大于 20 而小于 30, 所以 $N - 1$ 只可能是 24. 因此这个班共有学生 $N = 24 + 1 = 25$ 人.

11. 答案: 1.375

解答. 小虎划船的全部时间为 120 分钟, 他每划行 30 分钟, 休息 10 分钟, 周期为 40 分钟,

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ☒ 专题讲座 ☒ 赛前串讲 ☒ 真题详解 ☒ 月月练讲解

所以一共可分为 3 个 30 分钟划行时间段, 有 3 个 10 分钟休息. 划船时, 顺水的船速与逆水的船速之比为 $4.5:1.5=3:1$. 因为小虎要把船划到离租船处尽可能远, 他在划船的过程中只能换一次划船的方向, 而且是在尽可能远处. 分两种情况讨论.

1) 开始向下游划船, 设最远离租船处 x 千米. 因为回到租船处是逆水, 所以小虎只有 110 分钟可用. 由于划船时顺流速度是逆流速度的 3 倍, 所以用在向下游划船的时间不能超过半小时. 另外两次休息时间只能用在返程, 在休息期间内船向下游漂流了 $\frac{1}{3} \times 1.5$, 所以

$$x \div 4.5 + \left(x + \frac{1}{3} \times 1.5 \right) \div 1.5 = 1.5.$$

整理上式得

$$x + 3x + 1.5 = 6.75, \quad 4x = 5.25, \quad x = 1.3125 \text{ (千米)}.$$

2) 开始向上游划, 设最远离租船处 y 千米. 小虎可用 120 分钟, 有两次休息时间用在向上游. 所以

$$\left(y + \frac{1}{3} \times 1.5 \right) \div 1.5 + \left(y - \frac{1}{6} \times 1.5 \right) \div 4.5 = 1.5.$$

整理上式得

$$4y + \frac{5}{6} \times 1.5 = 6.75, \quad 4y = 5.5, \quad y = 1.375 \text{ (千米)}.$$

综合 1) 和 2) 的讨论, 小虎的船最多离租船处 1.375 千米.

12. 答案: 不能

解答. 设放的最小自然数为 a , 则放的最大自然数为 $a+23$. 于是这 24 个数的和为

$$A = 12(2a + 23).$$

假设可能, 设每个正方形边上的数之和为 S . 因为共有 5 个正方形, 这些和的和为 $5S$.

因为每个数在这些和中出现两次, 所以有

$$5S = 2A.$$

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

记最小的 16 个数的和为 B , 则 $B = 8(2a + 15)$. 下面分两种情形讨论:

(1) 若 $B \leq S$, 则

$$S = \frac{2}{5}A = \frac{24}{5}(2a + 23) \geq 8(2a + 15), \quad 9.8a + 110.4 \geq 16a + 120,$$

不存在自然数 a 使得不等式成立.

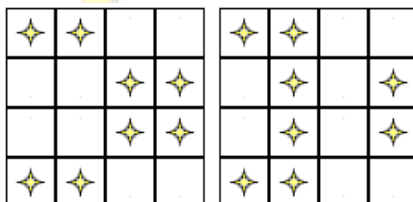
(2) 情形 $B > S$ 也是不可能的, 因为此时不可能选择最大正方形边上的 16 个数使得这 16 个数的和等于 S .

三、解答下列各题 (每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

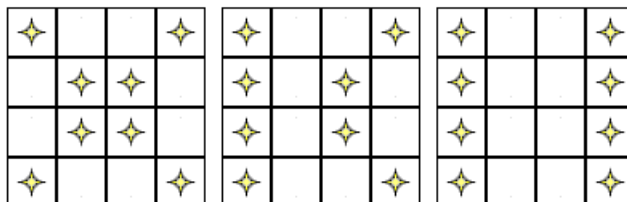
13. 答案: 5

解答. 用右图代替题目中的 2×1 小长方形. 因为题目所给的小长方形上下不对称, 所以同一个小长方形在拼成的上下对称的正方形中, 不会既在上半部分也在下半部分. 这样, 就可以只考虑上半部分的不同情形.

1) 相邻的空白格在第一行最左边或最右边. 因为要排除旋转相同的, 所以只考虑相邻空白格在最右边的情况, 有下图所示的 2 种图形,



2) 相邻的空白格在第一行中间. 去掉旋转重合的, 有下图所示的 3 种图形,



所有不同的图形为 5 种.

14. 答案: 6036

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

解答. 令

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2012} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2013},$$

其中, 所有的 a_i 数字和相同, 所有的 b_j 数字和相同, 所有的 c_k 数字和相同. 两个自然数数字的和相同, 则它们除以 9 的余数相同, 即

$$a_i = 9u_i + r, \quad i = 1, 2, \cdots, 2010,$$

$$b_j = 9v_j + s, \quad j = 1, 2, \cdots, 2012,$$

$$c_k = 9w_k + t, \quad k = 1, 2, \cdots, 2013.$$

则

$$\begin{aligned} n &= 9 \times (u_1 + u_2 + \cdots + u_{2010}) + 2010 \times r \\ &= 9 \times (v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012}) + 2012 \times s \\ &= 9 \times (w_1 + w_2 + \cdots + w_{2013}) + 2013 \times t, \end{aligned} \quad (1)$$

由上面的等式可得,

$$9 \times (u_1 + u_2 + \cdots + u_{2010} + 223 \times r) + 3r = 9 \times (v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012} + 223 \times s) + 5 \times s, \quad (2)$$

$$9 \times (w_1 + w_2 + \cdots + w_{2013} + 223 \times t) + 6 \times t = 9 \times (v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012} + 223 \times s) + 5 \times s, \quad (3)$$

由 (2) 可以得出 s 是 3 的倍数, 只能是 0, 3 或 6. 下面三种情况讨论:

1) $s = 0$. 此时, 对 $j = 1, 2, \cdots, 2012$, 因为 $b_j = 9v_j$ 的数字和不为零, 所以 $v_j \geq 1$.

则

$$n = 9 \times (v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012}) \geq 9 \times 2012 = 18108.$$

2) $s = 6$. 此时

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

$$n = 9(v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012}) + 2012 \times 6 \geq 12072 .$$

3) $s = 3$, 此时

$$n = 9(v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012}) + 2012 \times 3 \geq 6036 .$$

可以取 $r = 2, t = 1$. 而

$$\begin{aligned} 6036 &= \underbrace{3+3+\cdots+3}_{2012\text{个}} = \underbrace{2+2+\cdots+2}_{x\text{个}} + \underbrace{11+11+\cdots+11}_{y\text{个}} \\ &= \underbrace{10+10+\cdots+10}_{m\text{个}} + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}}. \end{aligned}$$

下面计算 x, y 与 m, n ,

$$\begin{cases} x + y = 2010, \\ 2x + 11y = 6036, \end{cases} \quad \begin{cases} m + n = 2013, \\ 10m + n = 6036. \end{cases}$$

解得

$$x = 1786, \quad y = 224, \quad m = 447, \quad n = 1566.$$

即

$$6036 = 2 \times 1786 + 11 \times 224 = 10 \times 447 + 1566 = 3 \times 2012.$$

最终, 满足条件的最小自然数是 6036.