

第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A 参考答案（初一组）

一、填空（每题 10 分，共 80 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$-\frac{8}{2727}$	129°	61	$\frac{21}{4}$	660	$\frac{9000}{37}$	$-\frac{85}{9}$	24

二、解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 解答：其中的五个算式如下

$$4^{4+(-4)} + 4 = 5,$$

$$(-4)^{4+(-4)} + 4 = 5,$$

$$\frac{4 \times (-4) + (-4)}{-4} = 5,$$

$$\frac{(-4) \times (-4) + 4}{4} = 5,$$

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4} = 5$$

10. 答案： $x = \frac{25}{18}, \frac{27}{18}, \frac{29}{18}$

解答： 由于

$$x + 2 - 1 < [x + 2] \leq x + 2, 5x + 1 - 1 < [5x + 1] \leq 5x + 1$$

所以

$$6x + 1 < [x + 2] + [5x + 1] = 9x - \frac{5}{2} \leq 6x + 3$$

由此得

$$\frac{7}{6} < x \leq \frac{11}{6}$$

于是

$$9x - \frac{5}{2} = 9, 10, 11, 12, 13, 14$$

分别解方程：

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

$$(1) 9x - \frac{5}{2} = 9, \text{ 解得: } x = \frac{23}{18}.$$

验算: 左=3+7=10, 右= $\frac{23-5}{2}=9$, 左 \neq 右, $x = \frac{23}{18}$ 不是解.

$$(2) 9x - \frac{5}{2} = 10, \text{ 得: } x = \frac{25}{18}.$$

验算: 左=3+7=10, 右= $\frac{25}{2} - \frac{5}{2} = 10$, 左=右, $x = \frac{25}{18}$ 是解.

$$(3) 9x - \frac{5}{2} = 11, \text{ 解得: } x = \frac{27}{18}$$

验算: 左=3+8=11, 右= $\frac{27}{2} - \frac{5}{2} = 11$, 左=右, $x = \frac{27}{18}$ 是解.

$$(4) 9x - \frac{5}{2} = 12, \text{ 解得: } x = \frac{29}{18}$$

验算: 左=3+9=12, 右= $\frac{29}{2} - \frac{5}{2} = 12$, 左=右, $x = \frac{29}{18}$ 是解.

$$(5) 9x - \frac{5}{2} = 13, \text{ 解得: } x = \frac{31}{18}$$

验算: 左=3+9=12, 右= $\frac{31}{2} - \frac{5}{2} = 13$, 左 \neq 右, $x = \frac{31}{18}$ 不是解.

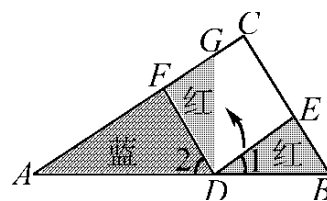
$$(6) 9x - \frac{5}{2} = 14, \text{ 解得: } x = \frac{33}{18}$$

验算: 左=3+10=13, 右= $\frac{33}{2} - \frac{5}{2} = 14$, 左 \neq 右, $x = \frac{33}{18}$ 不是解.

因此, 解是: $x = \frac{25}{18}, \frac{27}{18}, \frac{29}{18}$

11. 答: 144 平方厘米.

解: 如图, 以 D 为中心, 逆时针旋转三角形 BDE , 使 DE 和 DF 重合, BE 和 FG 重合, 三角形 BDE 和三角形 DFG 重合. (即割下三角形 BDE 补到三角形 DFG 的位置)



由于 $\angle EDF = 90^\circ$, 所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, 所以 $\angle ADG$ 是直角, 三角形 ADG 是直角三角形, 它的直角边 $AD=20$, $BD=DG=15$, 由勾股定理可得斜边 $AG=25$. 此时正方形的边长 DF 恰是直角三角形 ADG 中斜边 AG 上的高,

所以 $\frac{1}{2} \times 25 \times DF = \frac{1}{2} \times 15 \times 20$, 解得 $DF = 12$,

因此黄色正方形纸片面积是 $12^2 = 144$ (平方厘米)

12. 答案: 13.

解答: 方法 1:

把 $c = 5d + 10$ 代入 $b = 3c - 18$, 得到 $b = 3(5d + 10) - 18 = 15d + 12$, 代入

$a = 2b + 8$, $a = 2(15d + 12) + 8 = 30d + 32$,

所以 $|d + 7a| = |d + 210d + 224| = |211d + 224|$,

因为 d 为整数, 所以 $d = -1$ 时, $|d + 7a|$ 取得最小值, 此时值为 13.

方法 2:

因为 $c = \frac{b}{3} + 6$ 所以, b 是 3 的倍数,

因为 $d = \frac{c}{5} - 2$ 所以, c 是 5 的倍数,

$$d+7a = \frac{c}{5} - 2 + 7a = \frac{b}{15} + \frac{6}{5} - 2 + 7a = \frac{b}{15} + \frac{6}{5} - 2 + 14b + 56 = \frac{b+3}{15} + 14b + 55$$

由 a, b, c, d 是整数,

3 整除 b , 5 整除 $b+3$, 令 $b=3p$, 其中 p 为 5 的倍数, 所以上式等于

$$\frac{p+1}{5} + 42p + 55 = d+7a, \text{ 其中 } p \text{ 为 } 5 \text{ 的倍数,}$$

当 p 增时, $d+7a$ 也增, $p=-1$ 时, $d+7a=13$, $p=-6$ 时, $d+7a=-198$, $p=4$ 时, $d+7a=224$,

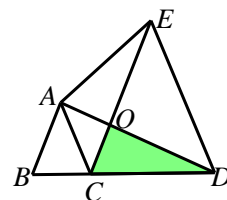
所以, $d+7a$ 的绝对值的最小值等于 13.

三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 答案: 42 cm²

解答: 记三角形 COD 的面积为 x cm².

因为等腰三角形的顶角相等, 所以



$$\angle ACB = \angle EDC, \angle ABC = \angle ECD.$$

所以 $AC \parallel DE, AB \parallel CE$.

$$\text{所以 } S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COD}.$$

$$\text{又 } \frac{OC}{CE} = \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle CDE}}, \frac{OE}{CE} = \frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle EAC}} = \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle EAC}},$$

因为三角形 EAC 在边 AC 上的高和三角形 CDE 在边 DE 上的高相等,

$$\text{所以 } \frac{OC}{OE} = \frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AC}{DE} = \frac{1}{2}, \text{ 可以得到 } OE = 2OC.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle CDE} = 3S_{\triangle COD} = 3x, S_{\triangle EAC} = \frac{1}{2} S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} (S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOE}) = \frac{3}{2} x.$$

$$\text{因为 } \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOE}} = \frac{OC}{OE} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2} S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{因为 } AB \parallel CE, \text{ 所以 } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{AB}{CE} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} (S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOE}) = \frac{3}{4} x.$$

$$\text{所以 } S_{ABCE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOE} = \frac{3}{4} x + \frac{3}{2} x + x + 2x.$$

因为 $x = 8$, 即四边形 $ABDE$ 的面积为 42cm^2 .

14. 答案: (1) 30

解答: 记红球、黄球和蓝球分别分了 i, j, k 组, 每组的盒子数目分别为

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \quad b_1, b_2, \dots, b_j, \quad c_1, c_2, \dots, c_k,$$

令 $n = i + j + k$.

1) 因为 $a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_j, c_1, c_2, \dots, c_k$ 包含了 1 到 30 的所有整数,

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

所以 $n \geq 30$. 另一方面,

$$\begin{aligned} 3 \times 155 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_i + b_1 + b_2 + \cdots + b_j + c_1 + c_2 + \cdots + c_k \\ &\geq 1 + 2 + \cdots + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465 = 3 \times 155, \end{aligned}$$

所以 $n = i + j + k = 30$, 三种分组方法分组的组数之和是 30.

2) 不妨设 $a_1 = 30$, 记这 30 个盒子的组为 A 组. 因为 $i + j + k = 30$, 必有 $j \leq 14$ 或 $k \leq 14$, 不妨设 $j \leq 14$. A 组的 30 个盒子分到这不超过 14 个组中去, 必有一组至少有三个盒子, 这三个盒子中的红球数相同并且黄球数也相同.

華羅庚金杯