

第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A 参考答案

(初二组)

一、填空 (每题 10 分, 共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\sqrt{2}$	770	766	10	$\frac{25}{2}$	1	326	3

二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9.

解答. 例如

$$4 \div 4 + \sqrt{4} + 4 = 7, \quad \sqrt{4 \div 4} + \sqrt{4} + 4 = 7,$$

$$4 + 4 - 4 \div 4 = 7, \quad 44 \div 4 - 4 = 7, \quad 4 \times \sqrt{4} - 4 \div 4 = 7.$$

10. 答案: 61

解答. 设成活 a 棵, 没有成活 b 棵, 未完成植树 c 棵. 则

$$\begin{cases} 5a + 2b = 271 \cdots \cdots (1) \\ 3a - b - 2c + 130 = 271 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

由 (1) 可知, a 是奇数, 且 $a \leq 54$; 由 (2) 可知, $a \geq 47$. 下面对 $a = 47, 49, 51, 53$ 进行试算, 求得整数解:

$$a = 47, b = 18, c = -9, (\text{不合要求});$$

$$a = 49, b = 13, c = -3.5, (\text{不合要求});$$

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ☒ 专题讲座 ☒ 赛前串讲 ☒ 真题详解 ☒ 月月练讲解

$$a = 51, b = 8, c = 2,$$

$$a + b + c = 51 + 8 + 2 = 61;$$

$$a = 53, b = 3, c = 7.5, (\text{不合要求}).$$

可见, 植树任务数是 61.

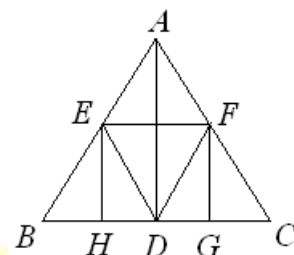
11. 答案: $\frac{\sqrt{3}}{8}$

解答. 作 BC 边上的高 AD , AD 也是 $\angle A$ 的平分线. AD 交 EF 于 P . 于是,

$$\angle EAP = \angle BEH = 30^\circ$$

$$\angle APE = \angle EHB = 90^\circ$$

设 $AE = x$, 则 $EB = 1 - x$, $EP = \frac{1}{2}x$, $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. 因此,



$$\begin{aligned} S_{\triangle AEF + \triangle EHB + \triangle FGC} &= \frac{1}{2}x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}(1-x) \times \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}[x^2 + (1-x)^2] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \end{aligned}$$

由此可见, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 上述三角形面积和最小, 从而内接矩形 $EFGH$ 的面积最大. 此时,

$AE:EB=1$. 连结 ED 和 FD , 容易知道,

$$S_{\square EFGH} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

12. 答案: 1003

解答. 将 2013 个数分成如下 1009 组:

$$(2013, 35), (2012, 36), \dots, (1025, 1023), (1024),$$

“华杯赛”官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

(34,30), (33,31), (32), (29,3), (28,4), ..., (17,15), (16), (2), (1),

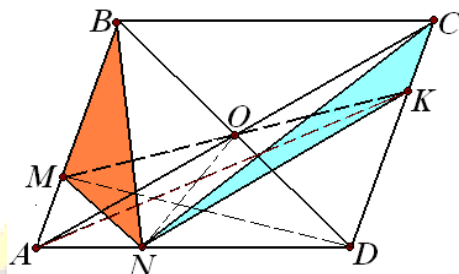
其中有 1004 组中每组都有两个数, 且这两个数之和是 2 的幂次, 若擦剩下的数的个数大于等于 1010, 由抽屉原理知, 必然有一组中两个数都被剩下了, 那么这两数和为 2 的幂次, 所以擦去 1003 个数满足题目要求. 如果擦去 1004 个数, 即剩下 1009 个数, 我们取这 1009 组中每一组的较大数, 那么显然这些数的任意两个之和都不是 2 的幂次, 故不满足题意, 所以最多擦去 1003 个数.

三、解答下列各题 (每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13.

解答. 连接 AK . 先证 $AM=CK$.

$$\begin{aligned}\frac{CK}{CD} &= \frac{\Delta ACK \text{ 的面积}}{\Delta ACD \text{ 的面积}} = \frac{\Delta ACN \text{ 的面积}}{\Delta ABD \text{ 的面积}} \\ &= \frac{\Delta ABN \text{ 的面积}}{\Delta ABD \text{ 的面积}} = \frac{\Delta AMD \text{ 的面积}}{\Delta ABD \text{ 的面积}} = \frac{AM}{AB}.\end{aligned}$$



因为 $CD=AB$, 所以 $AM=CK$. 连接 OM, OK, ON . 则 $\Delta OMA \cong \Delta OKC$. 所以 $\angle MOA = \angle KOC$. 因此

$$\angle MOA + \angle AOK = \angle KOC + \angle AOK = 180^\circ,$$

所以 M, O, K 共线, ON 是 ΔKNM 的中线, 所以

$$\Delta ONM \text{ 的面积} = \Delta OKN \text{ 的面积}.$$

但

$$\Delta NMB \text{ 的面积} = \Delta ONM \text{ 的面积}, \Delta NKC \text{ 的面积} = \Delta ONK \text{ 的面积}.$$

所以

$$\Delta ONM \text{ 的面积} = \Delta OKC \text{ 的面积}.$$

因此, 三角形 NMB 与 NKC 等积.

14. $\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{33}}{8}, \frac{\sqrt{41}}{8}, \frac{7}{8}$

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

解答. 若 $x \leq 0$, 则

$$0 \geq [x] + \left[x + \frac{1}{8}\right] + \left[x + \frac{2}{8}\right] + \cdots + \left[x + \frac{7}{8}\right] = 8x^2 + \frac{7}{8} > 0,$$

矛盾. 所以 $x > 0$.

由带余除法,

$$[8x] = 8q + r \leq 8x < [8x] + 1 = 8q + r + 1, \quad (0 \leq r \leq 7).$$

所以

$$q + \frac{r}{8} \leq x < q + \frac{r+1}{8}.$$

对于 $0 \leq i \leq 7$,

$$q + \frac{r+i}{8} \leq x + \frac{i}{8} < q + \frac{r+i+1}{8}.$$

当 $i \leq 7-r$ 时, 即 $\frac{r+i+1}{8} \leq 1$. 有 $\left[x + \frac{i}{8}\right] = q$. 当 $\frac{r+i}{8} \geq 1$ 时, 即 $7 \geq i \geq 8-r$, 有

$$\left[x + \frac{i}{8}\right] = q + 1. \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} & [x] + \left[x + \frac{1}{8}\right] + \cdots + \left[x + \frac{7-r}{8}\right] + \left[x + \frac{8-r}{8}\right] + \cdots + \left[x + \frac{7}{8}\right] \\ &= (8-r)q + r(q+1) = 8q + r = [8x]. \end{aligned}$$

因此

$$[8x] = 8x^2 + \frac{7}{8}. \quad (*)$$

因为

$$8[8x] = 64x^2 + 7 = (8x)^2 + 7 = ([8x] + \{8x\})^2 + 7,$$

$$[8x]^2 + 7 \leq 8[8x] < ([8x] + 1)^2 + 7 = [8x]^2 + 2[8x] + 8,$$

所以

$$[8x]^2 - 8[8x] + 7 \leq 0, \quad [8x]^2 - 6[8x] + 8 < 0.$$

由上面第一个式子得到, $([8x] - 1)([8x] - 7) \leq 0$, $1 \leq [8x] \leq 7$; 由上面第二个式子得

到, $([8x] - 2)([8x] - 3) > 0$, $[8x] < 2$ 或 $[8x] > 4$. 因此

$$[8x] = 1, 5, 6, 7.$$

将 $[8x]$ 可以取的四个值分别代入 (*) 式, 解得大于 0 的 x 分别为

$$\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{33}}{8}, \frac{\sqrt{41}}{8}, \frac{7}{8}.$$