

第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 C 参考答案

(小学高年级组)

一、填空题 (每题 10 分, 共 80 分)

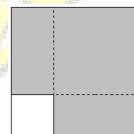
题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	7.5	5, 9	253	37.5	2013	270	660	55

二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 答案: 1024

解答. 两正方形的周长相差 80 厘米, 则右上角的小正方形的边长为

$$80 \div 4 = 20 \text{ (厘米)}.$$



又因为两个正方形之间的面积为 880 平方厘米, 所以角上的空白正方形的边长是

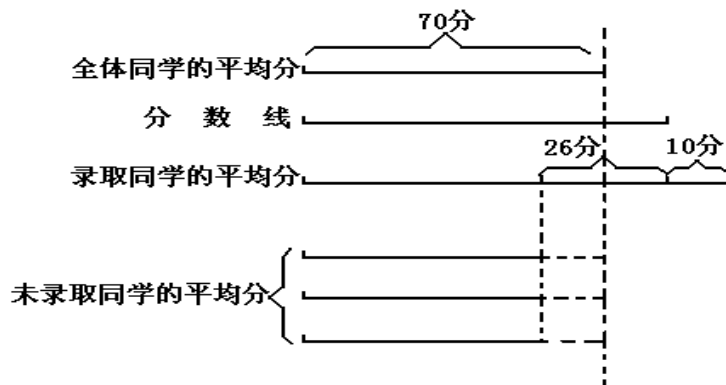
$$(880 - 20 \times 20) \div 20 \div 2 = 12 \text{ (厘米)},$$

大正方形的边长是 32(厘米), 面积是

$$32 \times 32 = 1024 \text{ (平方厘米)}.$$

10. 答案: 87

解答. 由于题中没有直接给出具体有多少名学生参加入学考试, 故不妨设有 4 名学生参加入学考试. 其中 1 人被录取, 3 人未被录取. 根据题意可画出下图:



从图中可以看出, 要想使未录取的3名同学的平均分达到70分, 只要把录取同学的平均分比未录取同学的平均分多的分数 ($26+10=36$ 分) 平均分成4份, 把其中的3份分别加到未录取同学的平均分上即可.

由此可推出

$$\text{未录取同学的平均分} + 36 \div 4 = \text{全体同学的平均分}.$$

所以, 可知未录取同学的平均分为

$$70 - 36 \div 4 = 61 \text{ (分)}.$$

那么录取分数线为

$$61 + 26 = 87 \text{ (分)}.$$

11. 答案: 7, 20, 33, 46

解答. 对于小于 50 的自然数 n , 设 d 是 $3n+5$ 和 $5n+4$ 大于 1 的公约数, 则 d 整除 $5(3n+5) - 3(5n+4) = 13$, 所以 $d = 13$. 进而

$$3n + 5 = 13k, \tag{1}$$

$$5n + 4 = 13l, \tag{2}$$

由 (1), $k = 3(n - 4k) + 5 = 3s + 2$, 其中 $s = n - 4k + 1$. 所以,

$$n = 4k + s - 1 = 4(3s + 2) + s - 1,$$

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

$$n = 13s + 7. \quad (3)$$

因为 $0 \leq n < 50$, 所以 $0 \leq s \leq 3$, 对应的 n 分别是 7, 20, 33, 46.

12. 答案: 255

解答. 设三队得 3 分的题共 x 道, 得 5 分的题共 y 道, 则

$$3x + 5y = 32 \text{ (分)}.$$

可得到以下两种情况:

1) $x = 9, y = 1$. 此时, 相当于三队分 9 个 3 分和 1 个 5 分, 三个队分 5 分的可能共有 3

种. 当 $0 \leq i \leq 9$ 时, 若某个队得 i 个 3 分, 则另外两个队分 $(9-i)$ 个 3 分的可能共有 $(10-i)$

种. 所以对于 9 个 3 分共有

$$10 + 9 + \cdots + 2 + 1 = 55 \text{ (种)}.$$

分 9 个 3 分和 1 个 5 分的总可能有

$$55 \times 3 = 165 \text{ (种)}.$$

2) $x = 4, y = 4$. 此时相当于三队分 4 个 3 分和 4 个 5 分. 当 $0 \leq i \leq 4$ 时, 若某个队得 i 个 3 分, 则另外两个队分 $(4-i)$ 个 3 分的可能共有 $(5-i)$ 种. 所以对于 4 个 3 分共有

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \text{ (种)}.$$

甲乙丙三队再分 4 个 5 分, 类似地也有 15 种分法. 但某队得 5 分的个数不少于 3 个时, 其中的 3 个 5 分与 1) 中的得 5 个 3 分的得分一样, 所以在 1) 中已考虑过. 而三个队分 4 个 5 分, 其中有一队得到不少于 3 个的分法共 9 种. 所以三队分 4 个 3 分和 4 个 5 分共有

$$15 \times (15 - 9) = 90 \text{ (种)}.$$

综合 1) 和 2), 三个队的不同的总得分情况共有 $165 + 90 = 255$ 种.

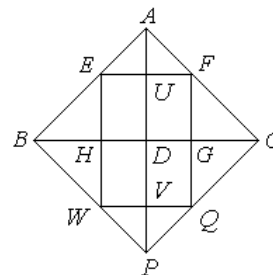
三、解答下列各题 (每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

13. 答案: $\frac{1}{4}$

解答. 矩形 $EFGH$ 的最大面积时, E 和 F 应分别在边 AB 和 AC 上.

作 $BP \perp AB, CP \perp AC, BP$ 与 CP 交于 P , 四边形 $ABPC$ 是正方形. 延长 EH 交 BP 于 W , 延长 FG 交 CP 于 Q , 连结 QW, AP 分别交 EF 与 QW 于 U, V .



容易证明, 四边形 $EFQW$ 是顶点在正方形 $ABPC$ 的边上的矩形. 并且在正方形 $ABPC$ 内. 设 $AE = x$, 则 $EB = 1 - x$. 同样

$$\begin{aligned} AE &= AF = PW = PQ = x, \\ EB &= BW = FC = QC = 1 - x, \end{aligned}$$

于是

$$EW = UV, EU = AU, WV = VP.$$

因此

$$EW + EU + WV = AP.$$

由此可见

$$EF + EW + WQ + QF = AP + BC = \text{常数},$$

即矩形 $EFQW$ 的周长一定. 在所有周长相同的矩形中, 面积最大者为同周长的正方形. 此时,

$AE : EB = 1$. 因此, 矩形 $EFGH$ 的面积最大为

$$S_{\square EFGH} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}.$$

14. 答案: 8

解答. 用右图代替题目中的 2×1 小长方形. 因为一条对角线旋转 90° 后与另一条对角线重合, 所以只需考虑仅以过左上顶点的对角线为对称轴的情况. 此时, 拼出正方形在该对角线上只能有偶数颗星, 而且左上角的 2×2 小正方形只能是图 A 和



“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

图 B 中的图形, 右下角的 2×2 小正方形只能是图 A 和图 C 中的图形.



图 A



图 B



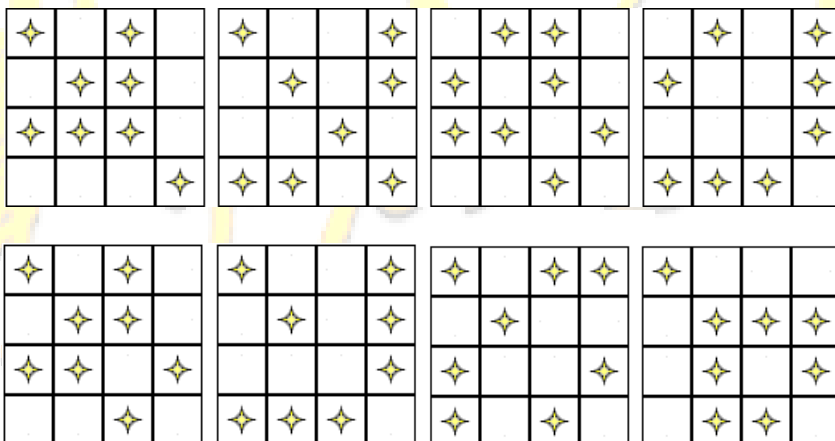
图 C

1) 首先考虑左上角以及右下角的 2×2 小正方形是图 A 中两个图形之一的情况.



图 D

此时, 左上角的 2×2 小正方形有两颗星. 由于另外一条对角线不能是对称轴, 所以左上角的 2×2 小正方形不能是图 A 中的任意一个, 只能是图 D 中的图形之一. 去掉旋转重合的情况, 只有下列 8 种:



2) 左上角的 2×2 小正方形是图 B 中两个图形之一、右下角的 2×2 小正方形是图 C 中两个图形之一时, 都不能拼出只以过左上顶点的对角线为对称轴的图形.