

第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 B 参考答案

(初一组)

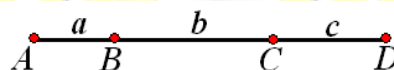
一、填空 (每题 10 分, 共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	± 16	61	$\frac{a^2-b^2}{4a^2}$	8	12	24	$\frac{9000}{37}$	660

二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 证明过程:

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD.$$



证明 1. 如图, 设 $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$,

则 $AC = a + b$, $BD = b + c$, $AD = a + b + c$.

于是 $AB \times CD = a \times c$, $BC \times AD = b \times (a + b + c) = a \times b + b^2 + b \times c$

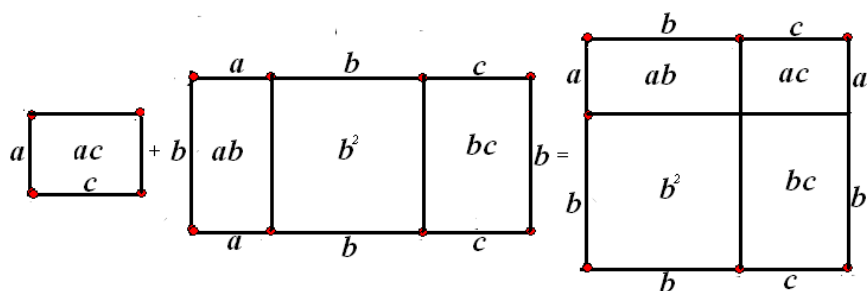
所以 $AB \times CD + BC \times AD = a \times c + a \times b + b^2 + b \times c$.

而 $AC \times BD = (a + b)(b + c) = a \times b + b^2 + a \times c + b \times c = a \times c + a \times b + b^2 + b \times c$.

所以 $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$.

证法 2: 设 $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, 则 $AC = a + b$, $BD = b + c$, $AD = a + b + c$.

两条线段的乘积可以看成以这两条线段为边的长方形的面积. 有下图所示:



所以 $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$.

注: 本题实质上是一维的托勒密定理.

10. 答案: $-80a + 96$

解答: 可设余式是 $xa + y$, 则有 $f(a) = (a^2 - 1)h(a) + xa + y$, 其中 $h(a)$ 是多项式, 将 $a = \pm 1$ 分别代入 $f(a)$, 立即得到一个二元一次方程组:

$$\begin{cases} x + y = \sum_{n=0}^{10} (-1)^{3n} \times (31 - 3n) \\ -x + y = \sum_{n=0}^{10} (31 - 3n) \end{cases},$$

解此方程组, $x = -80, y = 96$.

11. 答案: 199.

解答: 设这个三位数是 \overline{abc} , 由题意得

$$100a + 10b + c = a + b + c + ab + bc + ca + abc, \text{ 整理得 } c = \frac{99a + 9b - ab}{a + b + ab}, \text{ 因为}$$

$c \leq 9$, 故 $99a + 9b - ab \leq 9a + 9b + 9ab$, 即 $90a \leq 10ab$, 所以 $b = 9$. 所以

$c = \frac{90a + 81}{10a + 9} = 9$, 此时 a 可取 1 到 9, 其中最小为 1, 所以这样的三位数中最小的是 199.

12. 答案: 最大值为 433, 最小值为 48.

解答: 因为

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= a_1 + (a_1 + 1) + (a_1 + 2) + \cdots + (a_1 + n - 1) \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + n - 1), \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

故得

$$\frac{n}{2}(2a_1 + n - 1) = 2613, \quad n \geq 5$$

即

$$n(2a_1 + n - 1) = 2 \times 3 \times 13 \times 67, \quad n \geq 5$$

要求 a_1 的最大值, 显然就须 n 取最小值, 由条件 $n \geq 5$ 知,

(1) 当 n 为奇数时, n 最小取 13, 于是 $2a_1 + n - 1 = 2 \times 3 \times 67$, 即

$$a_1 = \frac{2 \times 3 \times 67 - 13 + 1}{2} = 195$$

(2) 当 n 为偶数时, n 最小取 6, 于是 $2a_1 + 6 - 1 = 13 \times 67$, 即得

$$a_1 = \frac{13 \times 67 - 5}{2} = \frac{666}{2} = 433.$$

两者比较, 知 a_1 可以取的值最大是 433.

同样地, 要求 a_1 的最小值, 显然就须 n 取最大值, 由条件 $n \geq 5$ 知,

(3) 当 n 为奇数时, n 最大取 3×13 , 于是 $2a_1 + 39 - 1 = 2 \times 67$, 即得

$$a_1 = \frac{2 \times 67 - 39 + 1}{2} = 48$$

(4) 当 n 为偶数时, n 最大取 2×13 , 于是 $2a_1 + 2 \times 13 - 1 = 3 \times 67$,

即得

$$a_1 = \frac{201 - 25}{2} = 88.$$

两者比较, 知 a_1 可以取的值最小是 48.

三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 答案: 10

解答: 设三角形 COD 的面积为 $x \text{ cm}^2$.

因为等腰三角形的顶角相等, 所以
 $\angle ACB = \angle EDC$, $\angle ABC = \angle ECD$.

所以 $AC \parallel DE$, $AB \parallel CE$.

所以 $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COD}$.

$$\text{又 } \frac{OC}{CE} = \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle CDE}}, \quad \frac{OE}{CE} = \frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle EAC}} = \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle EAC}},$$

因为三角形 EAC 在边 AC 上的高和三角形 CDE 在边 DE 上的高相等,

$$\text{所以 } \frac{OC}{OE} = \frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AC}{DE} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle CDE} = 3S_{\triangle COD} = 3x, \quad S_{\triangle EAC} = \frac{1}{2}S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}(S_{\triangle COD} + S_{\triangle ODE}) = \frac{3}{2}x.$$

$$\text{因为 } \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOE}} = \frac{OC}{OE} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2}S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}x.$$

$$\text{因为 } AB \parallel CE, \text{ 所以 } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{AB}{CE} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}(S_{\triangle AOC} + S_{\triangle OAE}) = \frac{3}{4}x.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABCDE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOE} = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x + x + 2x = 52.5.$$

所以 $x=10$, 即三角形 COD 的面积为 10 cm^2 .

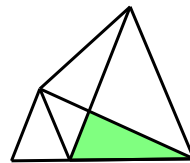
14. 答案: 6036.

解答: 令

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2012} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2013},$$

其中, 所有的 a_i 数码和相同, 所有的 b_j 数码和相同, 所有的 c_k 数码和相同. 两个自然数数码的和相同, 则它们除以 9 的余数相同, 即

“华杯赛” 官网四大类网络课程 ✓ 专题讲座 ✓ 赛前串讲 ✓ 真题详解 ✓ 月月练讲解



$$a_i = 9u_i + r, i = 1, 2, \dots, 2010, \quad b_j = 9v_j + s, j = 1, 2, \dots, 2012,$$

$$c_k = 9w_k + t, k = 1, 2, \dots, 2013.$$

则

$$\begin{aligned} n &= 9 \times (u_1 + u_2 + \dots + u_{2010}) + 2010 \times r \\ &= 9 \times (v_1 + v_2 + \dots + v_{2012}) + 2012 \times s \\ &= 9 \times (w_1 + w_2 + \dots + w_{2013}) + 2013 \times t, \end{aligned} \quad (1)$$

由上面的等式可得,

$$9 \times (u_1 + u_2 + \dots + u_{2010} + 223 \times r) + 3r = 9 \times (v_1 + v_2 + \dots + v_{2012} + 223 \times s) + 5 \times s, \quad (2)$$

$$9 \times (w_1 + w_2 + \dots + w_{2013} + 223 \times t) + 6 \times t = 9 \times (v_1 + v_2 + \dots + v_{2012} + 223 \times s) + 5 \times s, \quad (3)$$

由 (2) 可以得出 s 是 3 的倍数, 只能是 0, 3 或 6. 下面三种情况讨论:

1) $s=0$. 此时, 对 $j=1, 2, \dots, 2012$, 因为 $b_j = 9v_j$ 的数码和不为零, 所以 $v_j \geq 1$. 则

$$n = 9 \times (v_1 + v_2 + \dots + v_{2012}) \geq 9 \times 2012 = 18108.$$

2) $s=6$. 此时

$$n = 9(v_1 + v_2 + \dots + v_{2012}) + 2012 \times 6 \geq 12072.$$

3) $s=3$, 此时

$$n = 9(v_1 + v_2 + \dots + v_{2012}) + 2012 \times 3 \geq 6036.$$

可以取 $r=2, t=1$. 而

$$\begin{aligned} 6036 &= \underbrace{3+3+\cdots+3}_{2012 \text{ 个}} = \underbrace{2+2+\cdots+2}_{x \text{ 个}} + \underbrace{11+11+\cdots+11}_{y \text{ 个}} \\ &= \underbrace{10+10+\cdots+10}_{m \text{ 个}} + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ 个}}. \end{aligned}$$

下面计算 x, y 与 m, n ,

$$\begin{cases} x+y=2010, \\ 2x+11y=6036, \end{cases} \quad \begin{cases} m+n=2013, \\ 10m+n=6036. \end{cases}$$

解得

$$x=1786, \quad y=224, \quad m=447, \quad n=1566.$$

即

$$6036 = 2 \times 1786 + 11 \times 224 = 10 \times 447 + 1566 = 3 \times 2012.$$

最终, 满足条件的最小自然数是 6036.

华杯赛金杯