



## 第十八届华杯赛决赛 A 卷详解

北京学而思张嘉老师编写

### 一、填空题（每题 10 分，共 80 分）

1. 计算： $19 \times 0.125 + 281 \times \frac{1}{8} - 12.5 =$ \_\_\_\_\_.

【答案】25

【考点】分小计算、提取公因数

【分析】原式  $= \frac{1}{8} \times (19 + 281 - 100) = 25$

2. 农谚“逢冬数九”讲的是，从冬至之日起，每九天分为一段，依次称之为“一九”，二九，……，九九，冬至那天是一九的第一天. 2012 年 12 月 21 日是冬至，那么 2013 年的元旦是\_\_\_\_\_九的第\_\_\_\_\_天.

【答案】二、3

【考点】周期问题

【分析】从 12 月 21 日到 2013 年 1 月 1 日共计  $(31 - 21 + 1) + 1 = 12$  天， $12 \div 9 = 1 \cdots 3$ ，即为二九第 3 天.

3. 某些整数分别被  $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{5}{7}$ 、 $\frac{7}{9}$ 、 $\frac{9}{11}$  除后，所得的商化作带分数时，分数部分分别是

$\frac{2}{3}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{2}{7}$ 、 $\frac{2}{9}$ ，则满足条件大于 1 的最小整数是\_\_\_\_\_.

【答案】316

【考点】最小公倍数

【分析】除以一个数等于乘以这个数的倒数， $x \div \frac{3}{5} = \frac{5}{3}x$ ，对应着分数部分是  $\frac{2}{3}$ ，而 1 是满足条件的最小的  $x$ ，将  $\frac{5}{3}x$  分别转化为： $\frac{5}{3}(x-1) + 1 + \frac{2}{3}$ ，则表明  $(x-1)$  是 3 的倍数，同理得： $(x-1)$  是 3、5、7、9 的最小公倍数，即  $x-1 = [3, 5, 7, 9] = 315$ ， $x$  的最小值是 316.

4. 如下图，在边长为 12 厘米的正方形  $ABCD$  中，以  $AB$  为底边作腰长为 10 厘米的等腰三角形  $PAB$ ，则三角形  $PAC$  的面积是\_\_\_\_\_平方厘米.

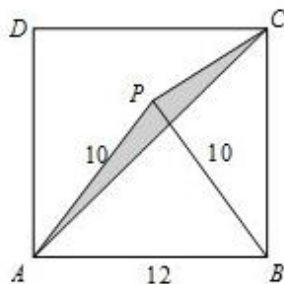
【答案】12

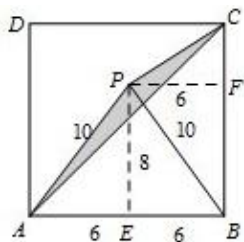
【考点】勾股定理、整体减空白

【分析】如下图所示，阴影面积  $= S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} - S_{\triangle ABC}$

作  $PE$ 、 $PF$  分别垂直于  $AB$ 、 $BC$ ；如下图：

具体线段长度如图示，有  $10^2 = 6^2 + 8^2$ （勾股定理）





$$\text{有 } S_{\triangle PFC} = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} - S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 + \frac{1}{2} \times 12 \times 6 - \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 12 \text{ (平方厘米)}.$$

5. 有一筐苹果，甲班分，每人 3 个还剩 11 个；乙班分，每人 4 个还剩 10 个；丙班分，每人 5 个还剩 12 个。那么这筐苹果至少\_\_\_\_\_个。

【答案】62

【考点】剩余问题

【分析】假设甲、乙、丙班人数为： $a$ 人、 $b$ 人、 $c$ 人，可以列算式表示苹果的个数：

$$\begin{cases} 3a+11=3(a+3)+2 \\ 4b+10=4(b+2)+2, \text{说明苹果的个数分别除以3余2, 除以4余2, 除以5余2;} \\ 5c+12=5(c+2)+2 \end{cases}$$

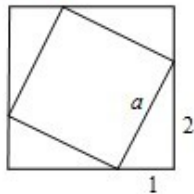
$$\text{即至少为 } [3, 4, 5] + 2 = 62.$$

6. 两个大小不同的正方体粘在一起，构成右图所示的立体图形，其中，小积木的粘贴面的四个顶点分别是大积木的粘贴面各边的一个三等分点。如果大积木的棱长为 3，则这个立体图形的表面积为\_\_\_\_\_。

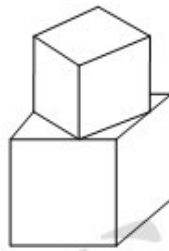
【答案】74

【考点】三视图法、勾股定理、表面积

【分析】三视图法：表面积在原来棱长为 3 的正方体上增加了 4 个棱长为  $a$  的正方形；



$$a^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \text{所以表面积为: } 6 \times 3 \times 3 + 4 \times 5 = 74.$$





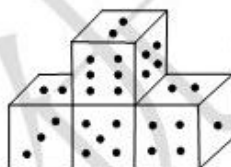
7. 设  $n$  是小于 50 的自然数, 那么使得  $4n+5$  和  $7n+6$  有大于 1 的公约数的所有  $n$  的可能值之和为\_\_\_\_\_.

【答案】94

【考点】因数、同余

【分析】若  $(a, b) = m$ , 则  $(a, a+b) = m$ , 可得求  $(4n+5, 7n+6) = (4n+5, 11n+11)$ , 即求使得  $4n+5$  和  $11n+11$  有大于 1 的公约数所有  $n$  的可能值.  $4n+5 = 4(n+1)+1$ ;  $11n+11 = 11(n+1)$ , 而  $4(n+1)+1$  与  $(n+1)$  互质, 所以  $(4(n+1)+1, 11(n+1)) = 11$ ,  $n$  满足条件  $4n+5 = 11p$ ,  $n < 50$ , 解的  $n$  取值为  $11k+7$ , 即符号条件的  $n$  有 7、18、29、40; 和为  $7+18+29+40=94$ .

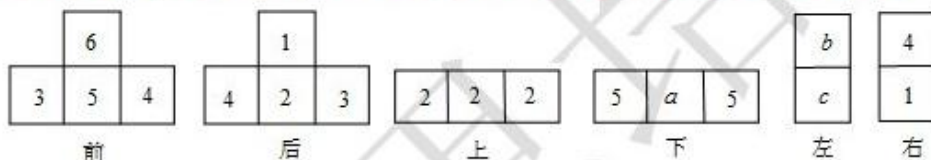
8. 由四个完全相同的正方体堆积成如右图所示的立体, 则立体的表面上 (包括底面) 所有黑点的总数至少是\_\_\_\_\_.



【答案】54

【考点】空间想象、最值问题

【分析】由示意图可得, 6 对面是 1, 4 对面是 3, 2 的对面是 5; 可得 (数字表示黑点数):



知  $b=3$ , 欲求所有黑点的总数最小,  $a$ 、 $c$  最小, 都为 1.

或者理解为上面的骰子没了 5, 左面没了 6, 右面没了 6, 中间的至少露出 2、5 和 1 此时最小的和为 54.

## 二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 用四个数字 4 和一些加、减、乘、除号和括号, 写出四个分别等于 3、4、5 和 6 的算式.

【答案】见下面分析

【考点】巧填算符

【分析】 $(4 \times 4 - 4) \div 4 = 3$  或者  $(4 + 4 + 4) \div 4 = 3$ ;

$4 \times (4 - 4) + 4 = 4$  或者  $(4 - 4) \div 4 + 4 = 4$ ;

$(4 \times 4 + 4) \div 4 = 5$ ;

$(4 + 4) \div 4 + 4 = 6$ ;

(填法不唯一)





10. 小明与小华同在小六（一）班，该班学生人数介于 20 和 30 之间，且每个人的出生日期均不相同。小明说：“本班比我大的人数是比我小的人数的两倍”，小华说：“本班比我大的人数是比我小的人数的三倍”。问这个班有多少名学生？

【答案】25

【考点】应用题、倍数、余数

【分析】“本班比我大的人是比我小的人数的两倍”可以推出：全班人数是  $a+2a+1=3a+1$ ；

“本班比我大的人是比我小的人数的三倍”可以推出：全班人数是  $b+3b+1=4b+1$ ；

合在一起就是全班的人数为  $12k+1$ ，在 20 到 30 之间只有  $12 \times 2 + 1 = 25$  满足条件。

11. 小虎周末到公园划船，九点从租船处出发，计划不超过十一点回到租船处。已知，九点从租船处出发，计划不超过十一点回到租船处。已知，租船处在河的中游，河道笔直，河水速度是 1.5 千米/小时；划船时，船在静水中的速度是 3 千米/小时，每划船半小时，小虎就要休息十分钟让船顺水漂流，问：小虎的船最远可以离租船处多少千米？

【答案】1.375 千米

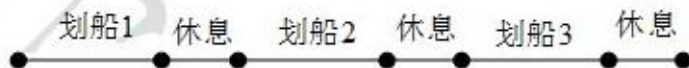
【考点】流水行船、行程

【分析】顺水速度：  $3+1.5=4.5$  千米/小时

逆水速度：  $3-1.5=1.5$  千米/小时

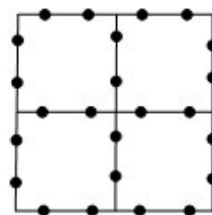
水速： 1.5 千米/小时

由下图可得：三段时间划船，三段时间休息。也就是走 90 分钟，休息 30 分钟。



休息 30 分钟是顺水，需要用 30 分钟逆水来平衡抵消，所以只能 60 分钟划船，顺水速度和逆水速度比是  $4.5:1.5=3:1$ ，时间之比是  $1:3$ ，所以，最近的划行距离是 15 分钟的顺水和 10 分钟的休息，即： $4.5 \times \frac{1}{4} + 1.5 \times \frac{1}{6} = 1.375$  千米。

12. 由四个相同的小正方形拼成右图。能否将连续 24 个自然数分别放在图所示 24 个黑点处（每处放一个，每个数只使用一次），使得图中所有正方形边上所放的数之和都相等？若能，请给出一个例子；若不能，请说明理由。



【答案】不能

【考点】数阵图、构造与论证



【分析】假设这 24 个连续自然数依次是： $a$ 、 $a+1$ 、……、 $a+23$ ；

有五个正方形，每个正方形边上所放的数之和相等，每个数字都用了两次。

假设每个正方形的和为  $k$ ，即有

$$5k = 2[a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+23)] = 48a + 552, \text{ 则 } k = \frac{48a + 552}{5}$$

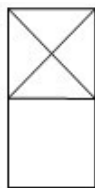
$k$  是整数， $a$  是模 5 余 1， $a = 5m + 1$ ，则  $k = 48m + 120$  ( $m$  是整数，包含 0)

取最小的 16 个自然数， $5m+1$ 、 $5m+2$ 、 $5m+3$ 、……、 $5m+16$  的和是  $80m+136$ ，

大于  $48m+120$ ，所以不能构造出一个使得正方形所放的数之和都相等。

### 三、解答下列各题（每题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 用八个右图所示的  $2 \times 1$  的小长方形可以拼成一个  $4 \times 4$  的正方形。若一个拼成正方形图形经过旋转与另一个拼成的正方形图形相同，则认为两个拼成的正方形相同。问：在所有可能拼成的正方形图形中，上下对称、第一行有两个空白小方格且空白小方格相邻图形有多少种？



【答案】5 种

【考点】几何计数、分类讨论

【分析】将第一行的四个空称为 1、2、3、4 空

(1) 12 空的只有 2 种；二行、三行上下对称，二行的 2 空可以为叉；

(2) 23 空，分析第二、三行

二、三行的 8 个方块有 4 个叉，二行中的 4 空

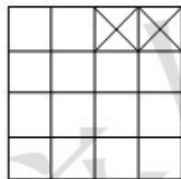
中任意取出 2 空为叉，共  $C_4^2 = 6$  中选取的可能：

但是 1、2 空是叉，三行的 1、2 空也必须为叉，矛盾，因为二行 1 空为叉，三行的第 1 空为空白；

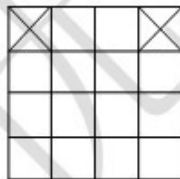
同理，3、4 空是叉也不行，

1、3 空是叉与 2、4 空是叉，可以通过旋转可以的，所以共  $6 - 2 - 1 = 3$  种。

综上，共  $2 + 3 = 5$  种。



(一)



(二)



14. 不为零的自然数  $n$  既是 2010 个数字和相同的自然数之和，也是 2012 个数字和相同的自然数之和，还是 2013 个数字和相同的自然数之和，那么  $n$  最小是多少？

【答案】6036

【考点】9 的同余

【分析】假设题目中给出的三个数字和分别是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，根据 9 的特征，一个数除以 9 的余数等于它的数字和除以 9 的余数，得

$$2010a \equiv 2012b \equiv 2013c \pmod{9}$$

由于 2010、2013 都是 3 的倍数，那么  $b$  一定是 3 的倍数，可以得出  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的最小值为： $a=2$ 、 $b=3$ 、 $c=1$ ，可得  $n$  的最小值为： $2012 \times 3 = 6036$ 。构造： $n$  为 6036：

2010 个数是：2000、20 和 2008 个 2；每一个数字和为 2

2012 个数是：2012 个 3；每一个数字和为 3；

2013 个数是：1000、1000、1000、1000、10、10、10 和 2006 个 1；每一个数字和是 1。