

第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛决赛试题 B

(小学高年级组)

成都学而思呼群、江海峰老师、周艳丽编写

一、填空题(每小题 10 分, 共 80 分)

1. 计算: $19 \times 0.125 + 281 \times \frac{1}{8} + 12.5 = \underline{\quad}$ 。

【难度】☆

【考察知识点】计算: 提公因数

【答案】50

【解析】

$$\text{原式} = 19 \times \frac{1}{8} + 281 \times \frac{1}{8} + 100 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \times (19 + 281 + 100) = \frac{1}{8} \times 400 = 50$$

2. 农谚‘逢冬数九’讲的是, 从冬至之日起, 每九天分为一段, 依次称之一九, 二九, …… , 九九, 冬至那天是一九的第一天。2012 年 12 月 21 日是冬至, 那么 2013 年 2 月 10 日是 九的第 天。

【难度】☆

【考察知识点】周期问题

【答案】六、七

【解析】

12 月 21 日到 31 日有: $31 - 21 + 1 = 11$ 天; 1 月份有 31 天; 2 月 1 日到 2 月 10 日有 10 天。所以从 2012 年 12 月 21 日到 2013 年 2 月 10 日经过 $11 + 31 + 10 = 52$ 天。

$52 \div 9 = 5 \dots 7$, 所以是 2013 年 2 月 10 日是六九的第七天。

3. 某些整数分别被 $\frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}$ 除后, 所得的商化作带分数时, 分数部分分别是

$\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}$, 则满足条件且大于 1 的最小整数为 。

【难度】☆☆

【考点】余数问题

【答案】3466

【解析】

法一: (江海峰老师提供)

设这个整数为 n , 则有 $7n \equiv 2 \pmod{5}$, $9n \equiv 2 \pmod{7}$, $11n \equiv 2 \pmod{9}$,

$13n \equiv 2 \pmod{11}$, 由余数的可乘性可以看出, 因为 $7 \equiv 2 \pmod{5}$, 所以 $n \equiv 1 \pmod{5}$;

同理, $n \equiv 1 \pmod{7}$, $n \equiv 1 \pmod{9}$, $n \equiv 1 \pmod{11}$, 故 $n-1$ 是 7, 8, 9, 10 的公倍

数，且 n 不等于 1，故 n 最小为 $[5, 7, 9, 11] + 1 = 3466$ 。

法二：（呼群老师提供）

设这个整数为 n ，则有 $n \div \frac{5}{7} = \frac{7n}{5}$ 的分数部分是 $\frac{2}{5}$ ，说明 $7n \div 5$ 余 2。

同理： $9n \div 7$ 余 2； $11n \div 9$ 余 2； $13n \div 11$ 余 2。

$$\begin{cases} 7n \div 5 \text{ 余 } 2 \\ 9n \div 7 \text{ 余 } 2 \\ 11n \div 9 \text{ 余 } 2 \\ 13n \div 11 \text{ 余 } 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \div 5 \text{ 余 } 2 \\ 2n \div 7 \text{ 余 } 2 \\ 2n \div 9 \text{ 余 } 2 \\ 2n \div 11 \text{ 余 } 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2n-2) \div 5 \text{ 余 } 0 \\ (2n-2) \div 7 \text{ 余 } 0 \\ (2n-2) \div 9 \text{ 余 } 0 \\ (2n-2) \div 11 \text{ 余 } 0 \end{cases}$$

所以 $2n-2$ 是 $[5, 7, 9, 11] = 3465$ 的倍数，且 n 不能是 1， $2n-2$ 最小是 2×3465 。

所以 $2n-2 = 2 \times 3465$ ，解得 $n = 3465 + 1 = 3466$ ，所以 n 最小是 3466。

4. 如图所示， P, Q 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AD 和对角线 AC 上的点，且 $AP:PD=1:4$ ， $AQ:QC=3:2$ 。如果正方形 $ABCD$ 的面积为 25，那么三角形的面积是_____。

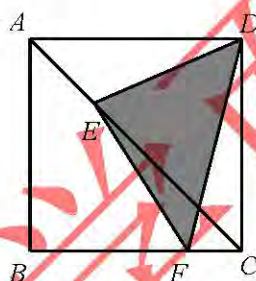
【难度】☆☆☆

【考点】几何

【答案】6.5

【点评】本题难度不大，考察几何五大模型，庆幸的是本题的图形在我们五年级超常班秋季第三讲三角形中的模型（一）讲解鸟头模型是讲解一道极其类似的题目。

原题展示：如图所示，正方形 $ABCD$ 边长是 6 厘米， $AE = \frac{1}{3}AC$ ， $CF = \frac{1}{3}BC$ 。求三角形 DEF 的面积。

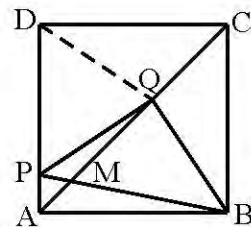
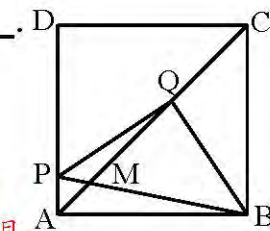


【解析】连接 DQ ，正方形 $ABCD$ 的面积为 25，故边长为 5，因为 $AP:PD=1:4$ ， $AQ:QC=3:2$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle PAQ} = \frac{1}{5} S_{\triangle QAD} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} S_{\text{正方形}ABCD} = 1.5,$$

$$S_{\triangle BAQ} = \frac{3}{5} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} S_{\text{正方形}ABCD} = 7.5, \quad S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 5 = 2.5,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PBQ} = S_{\triangle QAP} + S_{\triangle QAB} - S_{\triangle PAB} = 1.5 + 7.5 - 2.5 = 6.5.$$



5. 有一箱苹果，甲班分，每人 3 个还剩 10 个；乙班分，每人 4 个还剩 11 个；丙班分，每

人 5 个还剩 12 个，那么这箱苹果至少有_____个。

【难度】☆☆

【考点】余数问题

【答案】67

【解析】设甲班有 x 人，乙班有 y 人，丙班有 z 人，共有 A 个苹果，可得

$$A = 3x + 10 = 4y + 11 = 5z + 12, \text{ 可以看出 } A \equiv 10 \equiv 1 \pmod{3}, A \equiv 11 \equiv 3 \pmod{4},$$

$A \equiv 12 \equiv 2 \pmod{5}$ ，利用逐级满足法，如下：

$$A = 1 + \boxed{\begin{array}{c} \text{---} \end{array}} 6 \boxed{\begin{array}{c} \text{---} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{---} \end{array}} 0 \boxed{\begin{array}{c} \text{---} \end{array}} = 7$$

3的倍数 除以4余2 [3,4]的倍数 除以5余0

但是 A 显然要大于 12，故最小的 A 应该为 $7 + [3, 4, 5] = 67$ 。

【点评】本题并没有说明一定要尽可能地多分，故在每人分 5 个的情况下，丙班虽然只有 11 人，依然可以剩 12 个不分。

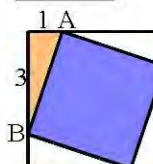
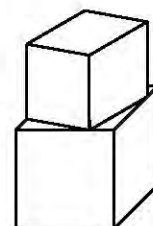
6. 两个大小不同的正方体积木粘在一起，构成右图所示的立体图形，其中，小积木的粘贴面的四个顶点分别是大积木的粘贴面各边不是中点的一个四等分点。如果大积木的棱长为 4，则这个立体图形的表面积为_____。

【难度】☆☆

【考点】三视图；弦图

【答案】136

【解析】容易看出，这个立体图形的表面积就是大正方体的表面积加上小正方体四个面的面积。大正方体的表面积为 $4 \times 4 \times 6 = 96$ ，而如图所示，利用弦



图小正方体的一个面的面积为 $S = AB^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ ，故整个表面积为 $96 + 4 \times 10 = 136$ 。

7. 甲、乙两车分别从 A, B 两地同时出发相向而行，甲车每小时行 40 千米，乙车每小时 60 千米，。两车分别到达 B 地和 A 地后，立即返回。甲车的速度增加二分之一，乙车的速度不变。已知两次相遇处的距离是 50 千米，则 A、B 两地的距离为_____千米。

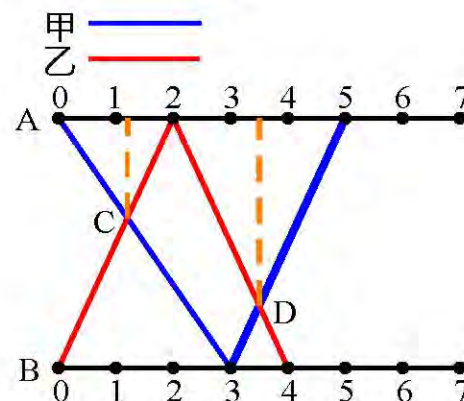
【难度】☆☆

【考点】行程

【答案】 $\frac{1000}{7}$

【解析】根据题意， $v_{甲}:v_{乙} = 2:3$ ，变速后 $v_{甲加}:v_{乙} = 1:1$ ，

故可以得到 $v_{甲}:v_{乙}:v_{甲加} = 2:3:3$ ，由于路程一定，所以时间



比为 $t_{甲}:t_{乙}:t_{甲加}=3:2:2$ ，作柳卡图，如右图所示，

假设第一次相遇在 C 地，第二次相遇在 D 地，可以看出 C 地距离 A 地为全程的 $\frac{2}{5}$ ，D

地距离 A 地位全程的 $\frac{3}{4}$ ，

故 CD 间的距离为全程的 $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ ，故此时全程为 $50 \div \frac{7}{20} = \frac{1000}{7}$ 千米。

8. 用“学”和“习”代表两个不同的数字，四位数“学学学学”与“习习习习”的积是七位数，

且它的个位和百万位数字与“学”所代表的数字相同，那么“学习”所能代表的两位数共有____个。

【难度】☆☆☆

【考察知识点】数字谜

【答案】3

【解析】

$$\overline{\text{学学学学}} \times \overline{\text{习习习习}} = \text{学} \times 1111 \times \text{习} \times 1111 = \text{学} \times \text{习} \times 1234321$$

由“学学学学”与“习习习习”的积是七位数可知， $\text{学} \times \text{习}$ 等于 1,2,3,...,8。

但是当 $\text{学} \times \text{习}$ 等于 5、6、7、8 时，所得的乘积的个位和百万位数字不同，舍去。

1) 当 $\text{学} \times \text{习}$ 等于 1 时，积的个位就是 1，则 $\text{学}=1$ ， $\text{习}=1$ ，但是“学”和“习”代表两个不同的数字，不符合题意。

2) 当 $\text{学} \times \text{习}$ 等于 2 时，积的个位就是 2，则 $\text{学}=2$ ， $\text{习}=1$ 。

3) 当 $\text{学} \times \text{习}$ 等于 3 时，积的个位就是 3，则 $\text{学}=3$ ， $\text{习}=1$ 。

4) 当 $\text{学} \times \text{习}$ 等于 4 时，积的个位就是 4，则 $\text{学}=4$ ， $\text{习}=1$ 。

综上，“学习”所能代表 21,31,41 共 3 个。

二. 解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 右图中，不含“*”的长方形有多少个？

【难度】☆☆☆

【考察知识点】几何计数

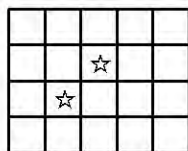
【答案】106

【点评】这道题有些难度，结合了乘法原理和容斥原理。庆幸的是在我们六年级暑期班第七讲计数方法综合中例 5 就讲解过一道非常类似的题目，

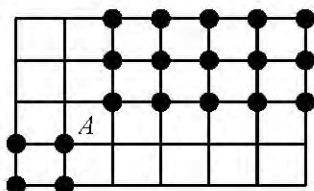
原题展示：学而思六年级尖子班暑期第七讲例五

由 20 个边长为 1 的小正方形拼成一个 $4 \times 5 = 20$ 长方形中有两格有“☆”，图中含有“☆”的所有长方形（含正方形）共有____个。

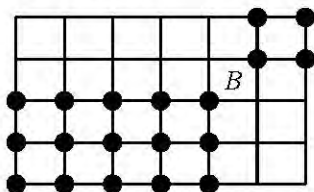
				*	
	*				



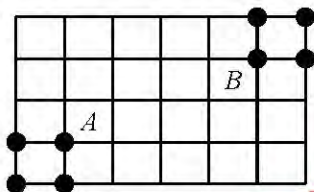
【解析】



含有标记 A 的“*”的长方形有： $4 \times 15 = 60$ 个；



含有标记 B 的“*”的长方形有： $4 \times 15 = 60$ 个；



含有标记 A 和 B 的“*”的长方形有： $4 \times 4 = 16$ 个；

则有“*”的长方形有 $60 + 60 - 16 = 104$ 个。

图中共有 $C_7^2 \times C_5^2 = 21 \times 10 = 210$ 个长方形。

不含“*”的长方形有 $210 - 104 = 106$ 个长方形。

10. 如右图，三角形 ABC 中， $AD = 2BD$ ， $AD = EC$ ， $BC = 18$ ，三角形 AFC 的面积和四边形 $DBEF$ 的面积相等，那么 AB 的长度是多少？

【难度】☆☆☆

【考察知识点】几何：等积变形

【答案】9

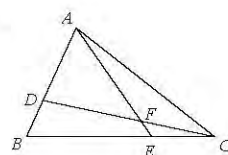
【解析】

设 $S_{\triangle AFC} = S_{\text{四边形}DBEF} = 1$ ， $S_{\triangle CEF} = x$ ， $S_{\triangle ADF} = y$ 。

因为 $AD = 2BD$ ，所以 $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{1}$ ，即 $\frac{S_{\triangle ADF} + S_{\triangle AFC}}{S_{\text{四边形}DBEF} + S_{\triangle BEF}} = \frac{y+1}{x+1} = \frac{2}{1}$ 。

解得 $y = 2x + 1$ 。

则 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AFC}} = \frac{S_{\triangle ADF} + S_{\text{四边形}DBEF}}{S_{\triangle AFC} + S_{\triangle BEF}} = \frac{(2x+1)+1}{x+1} = \frac{2}{1}$ ，所以 $\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}$ 。



所以 $EC = \frac{1}{1+2} \times BC = \frac{1}{3} \times 18 = 6$, 则 $AD = EC = 6$.

又因为 $AD = 2BD$, $BD = AD \div 2 = 6 \div 2 = 3$.

综上 $AB = AD + BD = 6 + 3 = 9$.

11. 若干人完成了植树 2013 棵的任务，每人植树的棵树相同。如果有 5 人不参加植树，其余的人每人多植 2 棵不能完成任务，而每人多植 3 棵可以超额完成任务。问：共有多少人参加了植树？

【难度】☆☆☆

【考察知识点】因数倍数

【答案】61

【解析】

设共有 a 人参加植树，每人植 b 棵树。

$a \times b = 2013$ ，说明 a 是 2013 的因数。

$2013 = 3 \times 11 \times 61$ ，2013 的因数有 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013 共 8 个。

由题意可知， a 是大于 5，所以 a 可以取值 11, 33, 61, 183, 671, 2013。

1) $a = 11$ 时，每人种 183 棵树，5 人离开后有 $11 - 5 = 6$ 人，

每人多种 2 棵： $6 \times (183 + 2) = 1110$ 小于 2013，符合题意；

每人多种 3 棵： $6 \times (183 + 3) = 1116$ 小于 2013，不符合题意。

2) $a = 33$ 时，每人种 61 棵树，5 人离开后有 $33 - 5 = 28$ 人，

每人多种 2 棵： $28 \times (61 + 2) = 1764$ 小于 2013，符合题意；

每人多种 3 棵： $28 \times (61 + 3) = 1792$ 小于 2013，不符合题意。

3) $a = 61$ 时，每人种 33 棵树，5 人离开后有 $61 - 5 = 56$ 人，

每人多种 2 棵： $56 \times (33 + 2) = 1960$ 小于 2013，符合题意；

每人多种 3 棵： $56 \times (33 + 3) = 2016$ 大于 2013，符合题意。

4) $a = 183$ 时，每人种 11 棵树，5 人离开后有 $183 - 5 = 178$ 人，

每人多种 2 棵： $178 \times (11 + 2) = 2314$ 大于 2013，不符合题意；

5) $a = 671$ 时，每人种 3 棵树，5 人离开后有 $671 - 5 = 666$ 人，

每人多种 2 棵： $666 \times (3 + 2) = 3330$ 大于 2013，不符合题意；

6) $a = 2013$ 时，每人种 1 棵树，5 人离开后有 $2013 - 5 = 2008$ 人，

每人多种 2 棵： $2008 \times (1 + 2) = 6024$ 大于 2013，不符合题意；

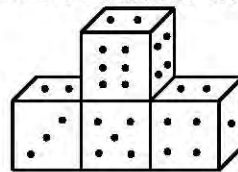
综上，共有 61 人参加了植树。

12. 由四个完全相同的正方体推积成如右图所示的立体，则立体的表面上（包括底面）所有黑点的总数至多是多少？

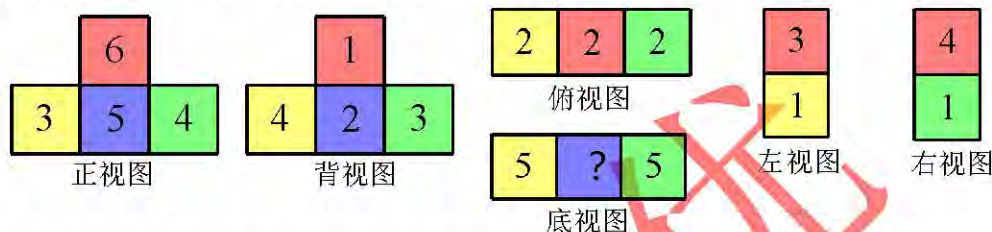
【难度】☆☆☆

【考点】最值；逻辑推理

【答案】59



【解析】如图所示，与2点相邻的面分别有1点、3点、4点和6点，所以2的对面为5；与4点不相对的面分别有1点、2点、5点、6点，所以4的对面为3；则1的对面为6。如下图，分别为这个立体图形的六个方向的视图：



本题的难点在于左视图中黄色的确定，通过原图可以看出，当2在上面，1在右面时4在前面；所以当2在上面3在前面时，1应该在左面。唯一不能确定的是底视图的中间蓝色部分，为了让表面的数字和最大，则可以取6。故最大值为 $6+3+5+4+1+4+2+3+2+2+2+5+6+5+3+1+4+1=59$ 。

三、解答下列各题（每小题15分，共30分，要求写出详细过程）

13. 用八个右图所示的 2×1 的长方形可以拼成一个 4×4 的正方形，若一个拼成的正方形图形经过旋转与另一个拼成的正方形图形相同，则认为两个拼成的正方形相同。问：可以拼成几种两条对角线都是其对称轴的正方形图形？



【难度】☆☆☆

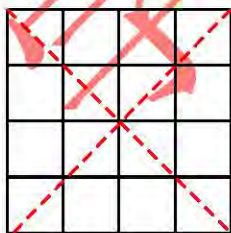
【考察知识点】构造与论证

【答案】4

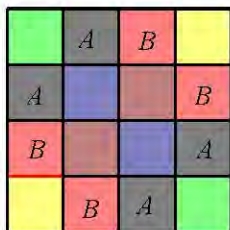
【解析】

法一：（呼群老师提供）

首先构造一个 4×4 的正方形（如下图）



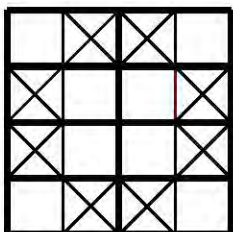
根据两条对角线都是其对称轴可知：



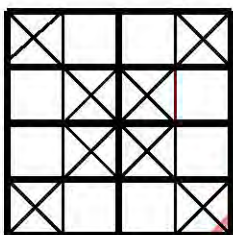
图中同样的颜色小正方形代表它们是同类型的，即图中四个标为 A 小正方形同类型，四个标为 B 小正方形同类型。



分类讨论：

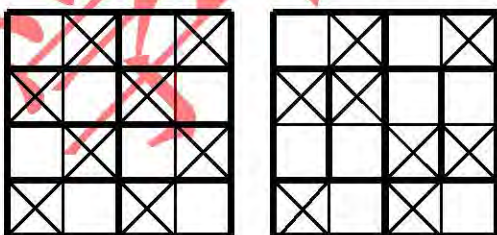
1) 当 A 类型和 B 类型的小正方形都是  时， 4×4 的正方形如下(拼法不唯一)：



2) 当 A 类型和 B 类型的小正方形都是  时， 4×4 的正方形如下(拼法不唯一)：

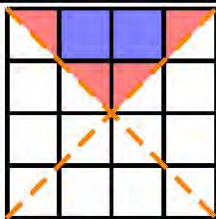


3) 当 A 类型小正方形为 ，B 类型小正方形为  时， 4×4 的正方形有两种(拼法不唯一)：

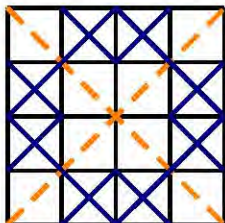


法二(江海峰老师提供)

这时一道几何计数的问题，首先，我们可以看到它是关于两条对角线都对称的图形，所以在对角线上的带标记的方格必为偶数个，于是我们可以利用在对角线上的标记正方形的个数进行分类。同时我们注意到两条对角线将 16 方格的大正方形分成了 4 个大的等腰直角三角形，这 4 个等腰直角三角形都应该是一样的，它们都是由两个正方形和四个小的等腰直角三角形组成，同时每个等腰直角三角形要承担 2 个带标记的小方格，；

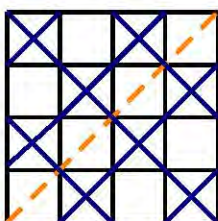


第一类：两条对角线上有被标记的小方格均为 0 个时，记为 $(0, 0)$ 时，则每个等腰直角三角形中若要承担 2 个小方格，则必须是两个完整的正方形，有如下 1 种，

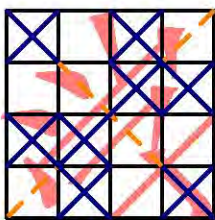


第二类：两条对角线上有被标记的小方格为 $(0, 2)$ 时，则每个等腰直角三角形只需承担 1.5 个标记的小方格，则至少有一个为小等腰直角三角形为标记的小方格的一部分，这时对角线上将不止 2 个，故不存在；

第三类：两条对角线上有被标记的小方格为 $(0, 4)$ 时，则每个等腰直角三角形只需承担 1 个标记的小方格，这个小方格必为等腰直角三角形中的一个小正方形承担，有如下 1 种，

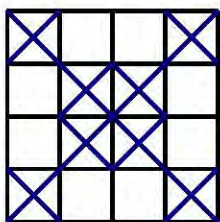


第四类：两条对角线上有被标记的小方格为 $(2, 2)$ 时，则每个等腰直角三角形只需承担 1 个标记的小方格，与第三类类似，有如下 1 种，



第五类：两条对角线上有被标记的小方格为 $(2, 4)$ 时，则每个等腰直角三角形只需承担 0.5 个标记的小方格，与第二类类似，不存在，

第六类：两条对角线上有被标记的小方格为 $(4, 4)$ 时，只有一种，如下：



综上，共计 4 种。

14. 对于 155 个装有红、黄、蓝三种颜色球的盒子，有三种分类方法：对于每种颜色，将该颜色的球数目相同的盒子归为一类。若从 1 到 30 之间所有的自然数都是某种分类中的一类的盒子数，那么，1) 三种分类的类数之和是多少？2) 说明，可以找到三个盒子，其中至少有两种颜色的球，它们的数目分别相同。(江海峰、周艳丽老师编写)

【答案】1)30;2)见详解

【难度】☆☆☆☆

【考点】构造与论证；抽屉原理

【解析】

首先我们要理解题意，我们随意列举 10 个盒子，三种颜色的球数量如图，按照题意，我们可以如下分类：

4	5	5	5	4	3	5	5	6	6
5	2	2	2	5	7	7	7	3	3
7	7	1	1	10	10	11	8	8	7
盒一	盒二	盒三	盒四	盒五	盒六	盒七	盒八	盒九	盒十

按照红色球个数相同：红色 3 个的有：盒子六，共计 1 个；

红色 4 个的有：盒子一、五，共计 2 个；

红色 5 个的有：盒子二、三、四、七、八，共计 5 个；

红色 6 个的有：盒子九、十，共计 2 个；

按照黄色球个数相同：黄色 2 个的有：盒子二、三、四，共计 3 个；

黄色 3 个的有：盒子九、十，共计 2 个；

黄色 5 个的有：盒子一，共计 1 个；

黄色 7 个的有：盒子六、七、八，共计 3 个；

按照蓝色球个数相同：蓝色 1 个的有：盒子三、四，共计 2 个；

蓝色 7 个的有：盒子一、二、十，共计 3 个；

蓝色 8 个的有：盒子八、九，共计 2 个；

蓝色 10 个的有：盒子五、六，共计 2 个；

蓝色 11 个的有：盒子七，共计 1 个；

此时共有 15 种分类种数。

我们可以看到，三种分类每类盒子的个数总数为 30 个，正好是本来盒子个数的 3 倍。

- (1) 1~30 每个自然数均对应某种分类中一类的盒子数，则三种分类中各类盒子的总个数最少： $1+2+3+\dots+30=(1+30)\times 30\div 2=465$ 个。每种分类中各类盒子的总个数最多 155 个，三种分类中各类盒子的总个数最多： $155\times 3=465$ 个。

综上所述，三种分类中各类盒子的总个数为 465 个，且三种分类中每类的盒子数为 1~30 中的自然数且各不相同，按每种颜色分类均包含所有 155 个盒子。

则三种分类的类数之和为 30。

- (2) 假设盒子数为 30 的这一类是按红色分类的，则这 30 个盒子在按蓝色和黄色分类时均对应其中的一个类别。(假设是别的颜色不影响分析结果)

按蓝色和黄色分类时类别的个数总和最多 29 个，其中必有一类颜色对应的类别个数小于等于 14 个，假定按蓝色分类时类别数小于等于 14 个。那么红色个数相同的这 30 个盒子按蓝色分类时分配在最多 14 个类别中， $30\div 14=2\dots\dots 2$ ，至少有 3 个盒子在一个类别中，同一个类别的盒子蓝色球数量相同，即红色球数相同的盒子中至少有 3

学而思呼群、江海峰老师、周艳丽老师编写

欢迎加入小升初信息交流 QQ 群：136776793，139869389

更多小升初有用信息请点击：cd.eduu.com

个盒子蓝色相同。

综上所述，必存在至少3个盒子其中至少有两种颜色的球数分别相同。

学而思培优