

第十三届“中环杯”中小学生思维能力训练活动 六年级决赛答案

一、填空题：

1. 答：3

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + 1.4 \times 1.3 + 1\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + 1\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + 1\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{2}{5} + 1\frac{2}{5} \right) \times \frac{4}{3} + 1\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \\ &= 1\frac{4}{5} \times \frac{4}{3} + 1\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \\ &= 1\frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{9}{5} \times \frac{5}{3} = 3 \end{aligned}$$

2. 答：19

$$15! - 13! = 13! \times (15 \times 14 - 1) = 13! \times 209 = 13! \times 11 \times 19, \text{ 所以最大素因数是 } 19.$$

3. 答： $9 \times 8 \times 7 \times (6 + 5 - 4 - 3) - 2 - 1 - 0 = 2013$

本题解法不唯一

4. 答：23

根据题目的描述，只有 1 个人数错了红色球的数量，根据表格，这个人是丙。所以丙数错了红、橙两色的球，数对了黄、绿两色的球。所以红球有 2 个，黄球有 8 个，绿球有 9 个。由于剩下的两个人当中有一个人数错了黄、绿两色的球的数量，显然这个人就是乙，所以橙球有 4 个。综上所述，所有的球一共有 $2 + 4 + 8 + 9 = 23$ 个。

5. 答：93

设在统计小明之前，已经统计了 N 个同学，平均分为 A 分。那么

小明的分数就是 $(A+1)(N+1) - NA = N + A + 1$ 分；

小红的分数是 $(A+2)(N+2) - (A+1)(N+1) = N + A + 3$ 分。

所以小红的分数应该比小明高 2 分，所以小红的分数是 93 分

6. 答： $\underbrace{33 \cdots 3}_{n \text{ 个 } 3}$

我们知道 $N = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + 10a_{n-1} + a_n$,

所以

$$\overline{2a_1a_2\cdots a_n1} = 2 \times 10^{n+1} + a_1 \times 10^n + a_2 \times 10^{n-1} + \cdots + a_n \times 10 + 1 = 2 \times 10^{n+1} + 10N + 1,$$

$$\overline{1a_1a_2\cdots a_n2} = 10^{n+1} + 10N + 2,$$

从而推出

$$\frac{2 \times 10^{n+1} + 10N + 1}{10^{n+1} + 10N + 2} = \frac{21}{12}$$

$$\Rightarrow 12 \times (2 \times 10^{n+1} + 10N + 1) = 21 \times (10^{n+1} + 10N + 2)$$

$$\Rightarrow 90N = 3 \times 10^{n+1} - 30$$

$$\Rightarrow 3N = 10^n - 1 = \underbrace{99 \cdots 9}_{n \uparrow 9}$$

7. 答: 1

利用根的定义, 容易发现, 当 $x=1$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{x+4}{1 \times 3 \times 5} + \frac{x+6}{3 \times 5 \times 7} + \frac{x+8}{5 \times 7 \times 9} + \cdots + \frac{x+2012}{2009 \times 2011 \times 2013} \\ &= \frac{5}{1 \times 3 \times 5} + \frac{7}{3 \times 5 \times 7} + \frac{9}{5 \times 7 \times 9} + \cdots + \frac{2013}{2009 \times 2011 \times 2013} \\ &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{2009 \times 2011} \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2009} - \frac{1}{2011} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2011} \right) = \frac{1005}{2011} \end{aligned}$$

所以方程成立, 所以 $x=1$ 是方程的根。

8. 答: 1:1

利用沙漏模型, 我们知道 $\frac{CO}{OD} = \frac{BO}{OA} = 1 \Rightarrow CO = OD$ 。由于 $DE = 2CO$, 所以

$DE = 2DO$ 。利用共边定理我们可以设 $S_{\triangle DOA} = S_{\triangle DOB} = k \Rightarrow S_{\triangle BDE} = 2S_{\triangle BDO} = 2k$ 。

由燕尾定理我们有 $AF:FE = S_{\triangle BDA}:S_{\triangle BDE} = 2k:2k = 1:1$

9. 答: $\begin{cases} x_1 = -\frac{14}{3} \\ y_1 = \frac{13}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

本题需要严谨的分类讨论能力:

$$(1) \text{ 当 } x \geq 1, y \geq 1 \text{ 时, 则 } \begin{cases} x-1+x+y=6 \\ y-1+x+y+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ 不符合}$$

(2) 当 $x \geq 1, y < 1$ 时,

$$(2.1) \text{ 若 } x+y \geq 0, \text{ 则 } \begin{cases} x-1+x+y=6 \\ 1-y+x+y+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}, \text{ 不符合}$$

$$(2.2) \text{ 若 } \begin{cases} x+y < 0 \\ x+y+1 \geq 0 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} x-1-x-y=6 \\ 1-y+x+y+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-7 \end{cases}, \text{ 不符合}$$

$$(2.3) \text{ 若 } \begin{cases} x+y < 0 \\ x+y+1 < 0 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} x-1-x-y=6 \\ 1-y-x-y-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=-7 \end{cases}, \text{ 不符合}$$

(3) 当 $x < 1, y \geq 1$ 时,

$$(3.1) \text{ 若 } x+y \geq 0, \text{ 则 } \begin{cases} 1-x+x+y=6 \\ y-1+x+y+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=5 \end{cases}, \text{ 不符合}$$

$$(3.2) \text{ 若 } \begin{cases} x+y < 0 \\ x+y+1 \geq 0 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} 1-x-x-y=6 \\ y-1+x+y+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{14}{3} \\ y=\frac{13}{3} \end{cases}, \text{ 符合}$$

$$(3.3) \text{ 若 } \begin{cases} x+y < 0 \\ x+y+1 < 0 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} 1-x-x-y=6 \\ y-1-x-y-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=7 \end{cases}, \text{ 不符合}$$

(4) 当 $x < 1, y < 1$ 时,

$$(4.1) \text{ 若 } x+y \geq 0, \text{ 则 } \begin{cases} 1-x+x+y=6 \\ 1-y+x+y+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}, \text{ 不符合}$$

$$(4.2) \text{ 若 } \begin{cases} x+y < 0 \\ x+y+1 \geq 0 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} 1-x-x-y=6 \\ 1-y+x+y+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-9 \end{cases}, \text{ 不符合}$$

$$(4.3) \text{ 若 } \begin{cases} x+y < 0 \\ x+y+1 < 0 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} 1-x-x-y=6 \\ 1-y-x-y-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}, \text{ 符合}$$

综上所述, 符合两条的解就两组: $\begin{cases} x_1=-\frac{14}{3} \\ y_1=\frac{13}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-1 \end{cases}.$

10. 答: 8

【解答】首先我们来说明, 最小的数字和为 45。我们为五个圆圈标上字母, 代表里面的数字。容易知道, $A=B$ 的数码和, 而 B 如果是三位数, 则已经超过这个 45 了, 所以 B 最多是两位数, 并且这个两位数 < 45 。所有满足条件的两位数中数码和最大的是 39, 其数码和为 $3+9=12$, 所以 $A \leq 12$ 。

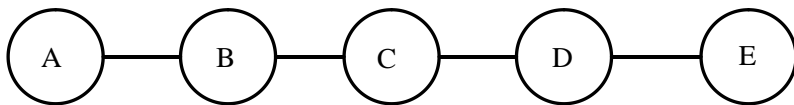
(1) 如果 $A=12 \Rightarrow B=39$, 此时超过 45 了。

(2) 如果 $A=11 \Rightarrow B=29$ 或 38, 显然 $11+38 > 45$, 而 $11+29=40$ 了, 下一个 C 就超过 45 了。

(3) 如果 $A=10 \Rightarrow B=19$ 或 28 或 38。容易证明, 此时也都很容易超过 45。

(4) 如果 A 是个位数, 不妨设其为 a , 则 $B=\overline{1(a-1)}=9+a$, 则 C 的数码和为 9, 显然此时最小就是 9。考虑到 $B=\overline{1(a-1)}$, 所以 D 的数码和就是 $9-a$ 。

但是由于 $D \geq C$, 所以此时 D 最小为 $\overline{1(8-a)}=18-a$ 。最后 E 的数码和就是 $9-a$, 显然最小的数字 E 就是 $9-a$ 。综合起来, 数字和最小就是 $a+\overline{1(a-1)}+9+\overline{1(8-a)}+9-a=45$ 。由于 $D=\overline{1(8-a)} \Rightarrow a \leq 8$ 。所以一共有 8 种情况取到最小值。



二、动手动脑题:

1. 答: 500 套

甲厂生产上衣时间为 $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$, 生产裤子时间为 $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$ 。

乙厂生产上衣时间为 $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$, 生产裤子时间为 $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ 。

通过比较发现, 甲厂适合生产裤子, 乙厂适合生产上衣。

甲厂生产裤子有 $8000 \div \frac{2}{5} = 20000$ (条), 乙厂生产上衣有 $10000 \div \frac{4}{7} = 17500$ (件), 那么甲厂多 $20000 - 17500 = 2500$ (条), 占甲厂产量的 $2500 \div 20000 = \frac{1}{8}$ 。这部分可以多生产成衣 $8000 \times \frac{1}{8} = 1000$ (套)。

$17500 + 1000 - 18000 = 500$ (套), 故现在比过去每月能多生产成衣 500 套。

2. 答: 16, 21, 42, 63, 84

设该两位数为 $\overline{ab} = 10a + b$, 某数字为 x , 则 $10a + b = ax^2 + bx$ 。

当 $x=1$ 时, $10a + b = a + b$, 本种情况舍;

当 $x = 2$ 时, $10a + b = 4a + 2b$, $6a = b$, 只有 $a = 1, b = 6$, 显然 $16 \div 2 = 1 \times 2 + 6$;

当 $x = 3$ 时, $10a + b = 9a + 3b$, $a = 2b$,

当 $a = 2, b = 1$, 此时即为 $21 \div 3 = 3 \times 2 + 1$;

当 $a = 4, b = 2$, 此时 $42 \div 3 = 3 \times 4 + 2$;

当 $a = 6, b = 3$, 此时 $63 \div 3 = 3 \times 6 + 3$;

当 $a = 8, b = 4$, 此时 $84 \div 3 = 3 \times 8 + 4$;

当 $x \geq 4$ 时, $10a + b < 16a + 4b \leq ax^2 + bx$, 本种情况舍。

综上所述, 这样的两位数有: 16, 21, 42, 63, 84。

3. 答: 1种

设 $2^{2012} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, 考虑到 $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$, 而 $2^{2012} \equiv 0 \pmod{4}$, 所以

$$\text{有两种可能: (1) } \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ c^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ d^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ b^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ c^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ d^2 \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}.$$

$$\text{先讨论第一种情况, 若 } \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ c^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ d^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{8} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{8} \\ c^2 \equiv 1 \pmod{8} \\ d^2 \equiv 1 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 4 \pmod{8}, \text{ 而 } 2^{2012} \equiv 0 \pmod{8}, \text{ 所以这种}$$

$$\text{情况不可能, 所以 } \begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ b^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ c^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ d^2 \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}.$$

可以设 $a = 2a_1, b = 2b_1, c = 2c_1, d = 2d_1$ ，代入得

$$2^{2012} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{2010}。继续$$

这样的过程，最后发现 $a = b = c = d = 2^{1005}$ 。

4. 证明：设继 i 号之后被传递到手帕的是 j 号，则 $j = \begin{cases} 2i (2i \leq 2013) \\ 2i - 2013 (2i > 2013) \end{cases}$ 。

(1) 当 $i = 2013$ 时，则除了 2013 号学生外，别的学生都不会拿到手帕。

(2) 当 $i \neq 2013$ 时，接下来我们要证明第 2013 号学生永远拿不到手帕。如果他能拿到手帕，则 $2013 = 2i$ 或 $2i - 2013$ 。由于 2013 是奇数，所以 $2i \neq 2013$ 。如果 $2i - 2013 = 2013 \Rightarrow i = 2013$ ，与大前提 $i \neq 2013$ 矛盾，所以此时第 2013 号学生永远拿不到手帕。

综上所述，不论第一次手帕交到哪个同学手上，在本次传递过程中至少有一个学生拿不到手帕。

5. 答：(1) 如图



- (2) 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 且 $\alpha \neq 18^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$ 时，有三个等腰三角形。

当 $\alpha = 18^\circ$ 时，有四个等腰三角形。

当 $\alpha = 22.5^\circ$ 或 45° 时，有五个等腰三角形。

首先很容易证明 $\triangle C'AB$ 为等腰三角形，其次由于

$$C'M = CM = BM \Rightarrow \triangle MC'B \text{ 为等腰三角形。} \begin{cases} CC' \perp NM \\ CC' \perp BC' \end{cases} \Rightarrow BC' \parallel NM。由于$$

$\triangle MC'B$ 为等腰三角形，很容易证明 $\triangle C'FM$ 也是等腰三角形。所以这个图形中至少有三个等腰三角形。

接下来开始导角，设 $\angle BAC' = \alpha$ ，

则 $\angle AC'P = \angle BC'P = \angle C'AE = \angle MBC' = \angle MC'B = 90^\circ - \alpha$,

$\angle C'MB = \angle FC'M = 2\alpha$, $\angle AEC' = \angle EC'F = \angle D'EN = 90^\circ - 2\alpha$ 。

最后就是讨论：①当 $\triangle PAC'$, $\triangle PBC'$ 为等腰直角三角形时，此时 $\alpha = 45^\circ$ ；

②当 $\triangle D'EN$ 为等腰直角三角形时，此时 $\alpha = 22.5^\circ$ ；

③当 $\triangle AEC'$ 为等腰三角形时，由于
$$\begin{cases} \angle EAC' = 90^\circ - \alpha \\ \angle AEC' = 90^\circ - 2\alpha, \text{ 所以此时有两种可能:} \\ \angle AC'E = 3\alpha \end{cases}$$

若 $\angle EAC' = \angle AC'E \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$ ；若 $\angle AEC' = \angle AC'E \Rightarrow \alpha = 18^\circ$ 。

综上所述，得到上面的结论。