

第十三届“中环杯”中小学生思维能力训练活动 七年级决赛答案

一、填空题

1. 答: $(a^2b+a-1)(ab^2+b-1)$

$ab(ab+1)^2 - ab(a+b) - a - b + 1 = ab(ab+1)^2 - (a+b)(ab+1) + 1$ 。设 $ab+1=x$ ，则

$ab(ab+1)^2 - ab(a+b) - a - b + 1 = x^2b(x+1) - (bx+1)(x+1) + 1$ 。

所以 $ab(ab+1)^2 - ab(a+b) - a - b + 1 = [a(ab+1)-1][b(ab+1)-1]$

2. 答: 14次

易知每次操作正方形面积变为原来的两倍。需要扩大10000倍。容易知道

$2^{13}=8192$ ， $2^{14}=16384$ 。因此需要操作14次。

3. 答: 13153

相当于求: 六进制中的 x 是十进制中的2013。容易计算出 $x=13153$

4. 答: 3793

易知 $ab-bc-ca=0$ ，所以 $a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca=(a+b-c)^2$ ，

所以 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=a+b-c=3793$

5. 答: 164

分类讨论:

(1) 如果是三位“中环数”，那么对于每个数字，都有9个“中环数”，比如说101,121,...,191，所以一共有 $9 \times 9 = 81$ 个“中环数”

(2) 如果是四位“中环数”，并且以2为首位数字，那么只有2个“中环数”：
2002,2012

(3) 如果是四位“中环数”，并且以1为首位数字，那么这样的数就是 $\overline{1AB1}$ 的形式。其中 A,B 只要不取1即可。根据乘法原理，一共有 $9 \times 9 = 81$ 个
综上所述，一共有 $81+2+81=164$ 个“中环数”

6. 答: 3

由轮换对称多项式的因式分解我们知道:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a),$$

所以 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 。而题目告诉我们 $a^2+b^2=2ab+3 \Rightarrow (a-b)^2=3$ ，所以 $a \neq b$ 。根据 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 我们知道 $a=c$ 或 $b=c$ 。

①当 $a=c$ 时，则

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=(a-b)^2=3$$

②当 $b=c$ 时，则

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=(a-b)^2=3$$

7. 答：5

由已知得： $\frac{x^2-ax+1}{x}=1$ ，即整理得 $x-a+\frac{1}{x}=1$ ； $\therefore x+\frac{1}{x}=1+a$ 。从而得

$$\begin{aligned}\frac{x^6-a^3x^3+1}{x^3} &= x^3-a^3+\frac{1}{x^3} \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)-a^3 \\ &= (1+a)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]-a^3 \\ &= (1+a)\left[(1+a)^2-3\right]-a^3 \\ &= 3a^2-2\end{aligned}$$

由于 a 为 3 的倍数，所以 $3a^2-2$ 除以 9 的余数为 7。所以

$$\underbrace{20122012\cdots 2012}_{n\text{个}2012} \equiv 5n \equiv 7 \pmod{9}, \text{ 所以 } n \text{ 的最小值是 } 5$$

8. 答： $\frac{1}{2}$

由于 $2ab-a-b+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ ，只要 a, b 中有一个数是 $\frac{1}{2}$ ，那么结果就

是 $\frac{1}{2}$ 。由于原来的数据库中是有 $\frac{1}{2}$ ，那么最终的结果就是 $\frac{1}{2}$

9. 答： $-\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{12}$

由于方程的左边是两个绝对值相加，所以 $\frac{3}{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0$ 。而我们知道对于 $x > 0$ 我

们可以推出 $x + \frac{1}{x} \geq 2, x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4$ ，所以

$$\left| x + \frac{1}{x} - 1 \right| - 1 + \left| x^2 + \frac{4}{x^2} - \frac{11}{4} \right| = \frac{3}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} - 2 + x^2 + \frac{4}{x^2} - \frac{11}{4} = \frac{3}{x}, \text{ 所以}$$

$$x - \frac{2}{x} - 2 + x^2 + \frac{4}{x^2} - \frac{11}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{2}{x} \right)^2 + \left(x - \frac{2}{x} \right) - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

，所以 $x - \frac{2}{x} = -\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ 。我们要求的是 $\frac{x^2 - 2}{6x} = \frac{1}{6} \left(x - \frac{2}{x} \right)$ ，所以答案为 $-\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{12}$

10. 答：2

由于 $(m+n)^2 \mid (4mn+4) \Rightarrow (m+n)^2 \leq 4mn+4$ ，而显然我们有 $4mn \leq (m+n)^2$ ，所

以 $4mn \leq (m+n)^2 \leq 4mn+4$ 。由于 $(m+n)^2$ 是一个完全平方数，而完全平方数除以

4 的余数只有 0,1 两种，所以 $(m+n)^2 = 4mn$ 或 $4mn+1$ 或 $4mn+4$

(1) 若 $(m+n)^2 = 4mn \Rightarrow m = n$ ，与已知矛盾

(2) 若 $(m+n)^2 = 4mn+1$ ，由于 $(m+n)^2 \mid (4mn+4) \Rightarrow 4mn+1 \mid 4mn+4$ ，而

$$\frac{4mn+4}{4mn+1} = 1 + \frac{3}{4mn+1}, \text{ 显然 } 4mn+1 > 3, \text{ 所以此时不可能为整数，也就}$$

是说不可能出现 $4mn+1 \mid 4mn+4$ 这种情况

若 $(m+n)^2 = 4mn+4$ ，此时显然满足 $(m+n)^2 \mid (4mn+4)$ ，所以 $|m-n| = 2$

二、动手动脑题：

1. 证明: 设 $a = x, b = x+1, c = x+2, d = x+3$, 则

$$\begin{aligned}
 a+b^2+c^3 &= x+(x+1)^2+(x+2)^3 \\
 &= x+(x^2+2x+1)+(x^3+6x^2+12x+8) \\
 &= x^3+7x^2+15x+9 \\
 &= x^3+3x^2+4x^2+12x+3x+9 \\
 &= x^2(x+3)+4x(x+3)+3(x+3) \\
 &= (x+3)(x^2+4x+3) \\
 &= (x+3)(x+1)(x+3)^2
 \end{aligned}$$

所以 $d^2 = (x+3)^2$ 是 $a+b^2+c^3$ 的因数

2. 证明: 设 $A = \overline{a_0 a_1 \cdots a_n} = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \times 10 + a_n$, 则

$B = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$, 所以

$$\begin{cases} A+B = a_0 \times (10^n + 10^0) + a_1 \times (10^{n-1} + 10) + a_2 \times (10^{n-2} + 10^2) + \cdots + a_n \times (10^0 + 10^n) \\ A-B = a_0 \times (10^n - 10^0) + a_1 \times (10^{n-1} - 10) + a_2 \times (10^{n-2} + 10^2) + \cdots + a_n \times (10^0 - 10^n) \end{cases} \quad (1)$$

当 n 为奇数时, $10^{n-i} + 10^i \equiv (-1)^{n-i} + (-1)^i \pmod{11}$ 。由于 n 为奇数, 而 $(n-i)+i=n$,

所以 $n-i, i$ 这两个数肯定一奇一偶, 这样都导致了

$10^{n-i} + 10^i \equiv (-1)^{n-i} + (-1)^i \equiv 0 \pmod{11}$, 所以此时 $11 \mid A+B$; (2) 当 n 为偶数时,

$10^{n-i} - 10^i \equiv (-1)^{n-i} - (-1)^i \pmod{11}$ 。由于 n 为偶数, 而 $(n-i)+i=n$, 所以 $n-i, i$ 这

两个数肯定同奇偶, 这样都导致了 $10^{n-i} - 10^i \equiv (-1)^{n-i} - (-1)^i \equiv 0 \pmod{11}$, 所以此

时 $11 \mid A-B$;

综上所述, 无论 n 是奇数还是偶数, $A+B, A-B$ 这两个数中至少有一个数是 11 的倍数

3. 证明: 首先由角平分线性质我们有 $ID = IE = IF$, 设其为 x , 然后我们要求出这个 x 。容易证明 $\triangle BDI \cong \triangle BFI$, $\triangle CDI \cong \triangle CEI$, $\triangle AEI \cong \triangle AFI$, 所以

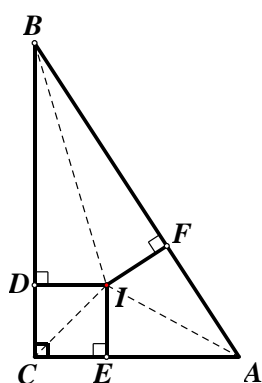
$BF = BD, CD = CE, AE = AF$, 从而我们有

$CD + CE = BC + CA - AB \Rightarrow 2x = a + b - c$ ，所以 $x = \frac{a+b-c}{2}$ 。接下来我们要证明

$3x = \frac{3(a+b-c)}{2} < \frac{9}{10}a \Leftrightarrow \frac{a+b-c}{2} < \frac{3}{10}a \Leftrightarrow a+b-c < \frac{3}{5}a \Leftrightarrow \frac{2}{5}a+b < c$ 。然后用反

证法，假设 $\frac{2}{5}a+b \geq c \Rightarrow \frac{4}{25}a^2 + \frac{4}{5}ab + b^2 \geq c^2 = a^2 + b^2$ ，所以

$\frac{4}{5}a \geq \frac{2}{5}a \Rightarrow \frac{2}{5}a \geq 0$ 。而已知告诉我们 $a > b$ ，所以矛盾找到了。命题得证



4. 证明：首先猜测 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}$ 的最大值为 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}$ ，如果

这个猜测正确，那么

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} < \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

。接下来就证明这个猜测了。假设 $1 \sim 2k$ 都符合我们前面描述的方法， $\{1, 2\}$ 一组，

$\{3, 4\}$ 一组， \dots ， $\{2k-1, 2k\}$ 一组。而 $2k+1, 2k+2$ 没有放在一组，那么我们有

$\{2k+1, a\}, \{2k+2, b\}$ 这两组，其中 $a, b > 2k$ 。我们只要证明

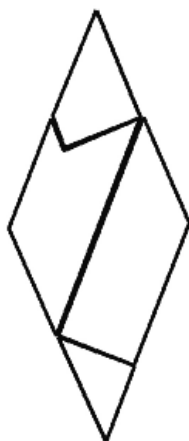
$$\frac{1}{(2k+1)a} + \frac{1}{(2k+2)b} < \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} + \frac{1}{ab}$$

这样的组合不如 $\{2k+1, 2k+2\}, \{a, b\}$ 来得大，我们就可以调整

为 $\{2k+1, 2k+2\}, \{a, b\}$ 。然后不断地对后面进行调整，从而得

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} \quad \text{。} \quad \text{对} \quad \text{于}$$

$\frac{1}{(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)a} - \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ 的证明，通分后分组分解就可以了，很简单，这里不多说了



5. (1)

(2) 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 且 $\alpha \neq 18^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$ 时，有三个等腰三角形

(3) 当 $\alpha = 18^\circ$ 时，有四个等腰三角形

(4) 当 $\alpha = 22.5^\circ$ 或 45° 时，有五个等腰三角形

【解答】首先很容易证明 $\triangle C'AB$ 为等腰三角形，其次由于

$C'M = CM = BM \Rightarrow \triangle MC'B$ 为等腰三角形。 $\begin{cases} CC' \perp NM \\ CC' \perp BC' \end{cases} \Rightarrow BC' \parallel NM$ 。由于

$\triangle MC'B$ 为等腰三角形，很容易证明 $\triangle C'FM$ 也是等腰三角形。所以这个图形中至少有

三个等腰三角形。接下来开始导角，设 $\angle BAC' = \alpha$ ，则

$\angle ACF = \angle BCF = \angle C'AE = \angle C'MB = \alpha$ ，

$\angle C'MB = \angle FC'M = 2\alpha$ ， $\angle AEC' = \angle EC'F = \angle D'EN = 90^\circ - 2\alpha$ 。最后就是讨论：

①当 $\triangle PAC'$ 、 $\triangle PBC'$ 为等腰直角三角形时，此时 $\alpha = 45^\circ$ ；②当 $\triangle D'EN$ 为等腰直角三

角形时，此时 $\alpha = 22.5^\circ$ ；③当 $\triangle AEC'$ 为等腰三角形时，由于

$$\begin{cases} \angle EAC' = 90^\circ - \alpha \\ \angle AEC' = 90^\circ - 2\alpha, \\ \angle AC'E = 3\alpha \end{cases}$$

所以此时有两种可能：若 $\angle EAC' = \angle AC'E \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$ ；若

$\angle AEC' = \angle AC'E \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ 。综上所述，得到上面的结论。