



[八年级上学期数学提高系列之三]



【励志故事】

去掉篮筐的底

据说篮球运动刚诞生的时候，篮板上钉的是真正的篮子。每当球投进的时候，就有一个专门的人踩在梯子上把球拿出来。为此，比赛不得不断断续续地进行，缺少紧张激烈的气氛。为了让比赛更顺畅地进行，人们想了很多取球方法，都不太理想。有一位发明家甚至制造了一种机器，在下面一拉就能把球弹出来，不过这种方法仍没能让篮球比赛紧张激烈起来。

终于有一天，一位父亲带着他的儿子来看球赛。小男孩看到大人们一次次不辞劳苦地取球，不由大惑不解：为什么不把篮筐的底去掉呢？一语惊醒梦中人，于是才有了今天我们看到的篮筐样式。

启示：去掉篮筐的底，就这么简单，但那么多有识之士都没有想到。听来让人费解，然而这个简单的“难题”却困扰了人们多年。可见，无形的思维定势就像那个结实的篮子禁锢了我们的头脑，使得我们的思维就像被“囚禁”在了篮筐里。于是，我们笨拙地去搬梯子、去制造机器……

生活中许多时候，我们只需动用简便的工具，去弄掉那些妨碍我们的“篮筐底”，生活原本并没有那么复杂。





八年级上学期数学提高训练（三）

[知识要点]

1. 算术平方根、平方根、立方根

(1) 算术平方根的定义及性质：

算术平方根的定义：如果一个正数 x 的平方等于 a ，那么这个数叫做 a 的算术平方根，

记作： \sqrt{a} ，读作：二次根号 a 。0 的算术平方根是 0。

算术平方根的性质： $\sqrt{a^2} = |a|$ ，即当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a^2} = a$ ，当 $a < 0$ 时， $\sqrt{a^2} = -a$ ；

$$(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$$

(2) 平方根的定义及性质：

平方根的定义：如果一个数的平方等于 a ，那么这个数叫做 a 的平方根或二次方根。

记作： $\pm\sqrt{a}$ ，读作：正负二次根号 a 。

平方根的性质：正数有两个平方根，它们互为相反数；

0 的平方根是 0；负数没有平方根。

开平方：求一个数的平方根的运算叫做开平方。

(3) 立方根的定义及性质：

立方根的定义：如果一个数的立方等于 a ，那么这个数叫做 a 的立方根或三次方根。

记作： $\sqrt[3]{a}$ ，读作：三次根号 a 。

立方根的性质：正数有一个正的立方根；0 的立方根是 0；负数有一个负的立方根。

开立方：求一个数的立方根的运算叫做开立方。

2. 平方根与算术平方根的区别与联系

(1) 区别：①定义不同；②个数不同：一个正数有两个平方根，它们互为相反数，而一个正数的算术平方根只有一个；③表示方法不同：正数 a 的平方根表示为 $\pm\sqrt{a}$ ，正数 a 的算术平方根表示为 \sqrt{a} ；④取值范围不同：正数的算术平方根一定是正数，正数的平方根是一正、一负。

(2) 联系：①具有包含关系：平方根包含算术平方根，算术平方根是平方根中的正的那个；②存在条件相同：平方根和算术平方根都只有非负数才有；③0 的平方根与算术平方根都是 0。



3. $\sqrt{a^2}$ 与 $(\sqrt{a})^2$ 的对比

- (1) 意义不同: $(\sqrt{a})^2$ 表示 a 的算术平方根的平方, 而 $\sqrt{a^2}$ 表示 a 的平方的算术平方根;
- (2) a 的取值不同: $(\sqrt{a})^2$ 中 a 的取值是 $a \geq 0$, 而 $\sqrt{a^2}$ 中 a 的取值是任意实数;
- (3) 运算顺序不同: $(\sqrt{a})^2$ 是先开算术平方根再平方, $\sqrt{a^2}$ 是先平方再开算术平方根;
- (4) 运算结果不同: $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$; $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$.

联系: 当 $a \geq 0$ 时, $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$.

4. 无理数的概念: 无限不循环小数叫做无理数.

说明: 有理数是指有限小数和无限循环小数, 可以化成分数.

一个有理数 a 与一个无理数 b 进行四则运算时,

$a+b$ 、 $a-b$ 都是无理数;

当 $a \neq 0$ 时, $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{b}{a}$ 都是无理数, 当 $a=0$ 时, ab 、 $\frac{a}{b}$ 都是有理数.

5. 无理数的特征

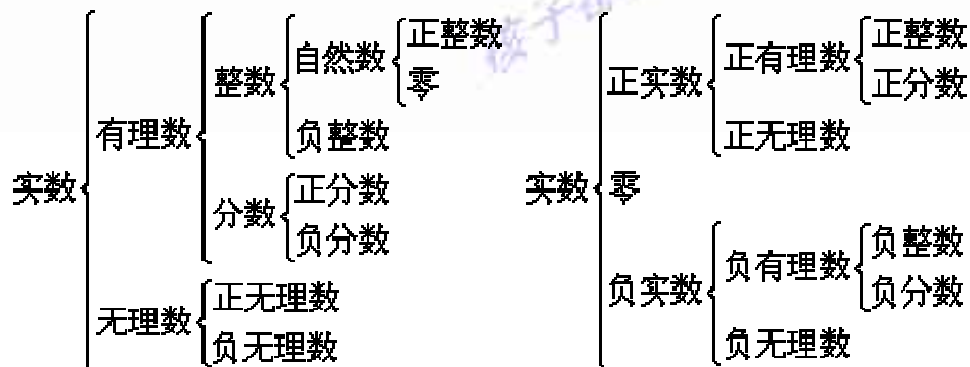
- (1) 无理数的小数部分位数无限;
- (2) 无理数的小数部分不循环, 不能表示成分数的形式.

6. 无理数的常见类型

主要有三类: (1) 圆周率 及含有 的数; (2) 看似循环而实质不循环的数, 如 $0.8080080008\cdots$ (相邻两个 8 之间 0 的个数逐次增加); (3) 开方开不尽的数, 如 $\sqrt{3}$.

7. 实数的定义: 有理数和无理数统称实数.

8. 实数的分类



9. 实数与数轴上的点一一对应

即数轴上的任何一个点都对应一个实数, 反之任何一个实数都能在数轴上找到一个





点与之对应.

- (1) 实数可比较大小, 在数轴上“左<右”;
- (2) 实数继承有理数中的绝对值、相反数等概念;
- (3) 实数继承有理数中的运算法则, 并保持运算律.

[同步练习]

一、选择题

1. 无理数是 ()
 - A. 无限循环小数
 - B. 开方开不尽的数
 - C. 除有限小数以外的所有实数
 - D. 除有理数以外的所有实数
2. 和数轴上的点一一对应的是 ()
 - A. 整数
 - B. 有理数
 - C. 无理数
 - D. 实数
3. 若 x, y 为实数, 在下列式子中, 能使 $x = y$ 成立的是 ()
 - A. $|x| = |y|$
 - B. $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$
 - C. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$
 - D. $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt{y^2}$
4. 下列等式正确的是 ()
 - A. $\sqrt{64} = 8$
 - B. $\sqrt{(2)^2} = 2$
 - C. $\sqrt{(6)^2} = 6$
 - D. $\sqrt{36} = \pm 6$
5. 要使 $\sqrt[3]{(a-1)^3} = a-1$ 成立, 那么 a 的取值范围是 ()
 - A. $a \geq 1$
 - B. $a \leq 1$
 - C. $a = 1$
 - D. 一切实数
6. 下列语句: ① $\sqrt{81}$ 的平方根是 ± 9 ; ② $\pm 2m$ 是 $4m^2$ 的平方根; ③若 $\sqrt{x^2} = 3$, 则 $x=3$; ④把 49 开平方得 7. 其中正确的个数为 ()
 - A. 0
 - B. 1
 - C. 3
 - D. 4
7. 在绝对值不超过 100 的数中, 平方根和立方根都为整数的有 ()
 - A. 2 个
 - B. 3 个
 - C. 4 个
 - D. 5 个

二、填空题

8. 在 0、 $\sqrt{2}$ 、0.01、 $\sqrt{16}$ 、 $\sqrt{3}$ 中, 属于无理数的是_____.





9. $\sqrt[3]{125} = \underline{\hspace{2cm}}; \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \underline{\hspace{2cm}}; \sqrt[5]{243} = \underline{\hspace{2cm}}; \sqrt[8]{(-6)^8} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 已知 $\sqrt{1.5} = 1.225$, 则 0.00015 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

11. (1) 平方根等于它本身的数是 $\underline{\hspace{2cm}};$ (2) 立方根等于它本身的数是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

12. (1) $\sqrt{(-\pi)^2}$ 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}};$

(2) 某自然数的算术平方根是 a , 则与此自然数相邻的下一个自然数的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

13. 已知 $\frac{\sqrt{x-3y} \cdot |x^2+9|}{(x+3)^2} = 0$, 则 xy 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

14. 求下列各式中的 x :

(1) $9 - 36x^2 = 0$; (2) $(3x+1)^3 - 27 = 0$; (3) $|2x-1| - \sqrt{2} = 0.$

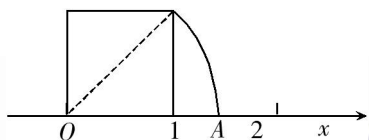
15. 已知 $144x^2=49$, 且 $y^3+8=0$, 求 $x+y$ 的值.

16. 若 x, y 为实数, 且 $y < \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}$, 化简 $\frac{|1-y|}{y-1}.$





17. 如图，我们在数轴上以单位线段为边作一个正方形，然后以 O 为圆心，正方形的对角线长为半径画弧交 x 轴上于一点 A ，则 OA 的长就是 $\sqrt{2}$ 个单位。动手试一试，你能用类似的方法在数轴上找出表示 $\sqrt{3}$ ， $-\sqrt{5}$ 的点吗？矩形对角线的平方等于矩形长的平方与宽的平方的和。（提示： $(\sqrt{2})^2 + 1^2 = (\sqrt{3})^2$ ， $(2)^2 + 1^2 = (\sqrt{5})^2$ ）



18. (1) 化简 $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \pi|$;

- (2) 已知数 M 的平方根为 $a+3$ 及 $2a-15$ ，求 M 。

19. 已知 $5 + \sqrt{7}$ 小数部分为 a ， $5 - \sqrt{7}$ 小数部分为 b ，求 $5a + 4b$ 。





20. 已知 $A = \sqrt[4a-b-3]{a+2}$ 是 $a+2$ 的算术平方根, $B = \sqrt[3a+2b-9]{2-b}$ 是 $2-b$ 的立方根, 求 $A+B$ 的二次方根.

21. 观察下列各式: $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$, $\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$, ...

- (1) 请验证以上各式是否成立, 并写出验证过程;
(2) 用含字母 n 的式子表示以上规律, 并给出证明.

(提示: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$)

