



[八年级上学期数学提高系列之三]



### 【励志故事】

#### 去掉篮筐的底

据说篮球运动刚诞生的时候，篮板上钉的是真正的篮子。每当球投进的时候，就有一个专门的人踩在梯子上把球拿出来。为此，比赛不得不断断续续地进行，缺少紧张激烈的气氛。为了让比赛更顺畅地进行，人们想了很多取球方法，都不太理想。有一位发明家甚至制造了一种机器，在下面一拉就能把球弹出来，不过这种方法仍没能让篮球比赛紧张激烈起来。

终于有一天，一位父亲带着他的儿子来看球赛。小男孩看到大人们一次次不辞劳苦地取球，不由大惑不解：为什么不把篮筐的底去掉呢？一语惊醒梦中人，于是才有了今天我们看到的篮筐样式。

启示：去掉篮筐的底，就这么简单，但那么多有识之士都没有想到。听来让人费解，然而这个简单的“难题”却困扰了人们多年。可见，无形的思维定势就像那个结实的篮子禁锢了我们的头脑，使得我们的思维就像被“囚禁”在了篮筐里。于是，我们笨拙地去搬梯子、去制造机器……

生活中许多时候，我们只需动用简便的工具，去弄掉那些妨碍我们的“篮筐底”，生活原本并没有那么复杂。





## 八年级上学期数学提高训练（三）

## [知识要点]

## 1. 算术平方根、平方根、立方根

(1) 算术平方根的定义及性质:

算术平方根的定义: 如果一个正数  $x$  的平方等于  $a$ , 那么这个数叫做  $a$  的算术平方根,

记作:  $\sqrt{a}$ , 读作: 二次根号  $a$ . 0 的算术平方根是 0.

算术平方根的性质:  $\sqrt{a^2} = |a|$ , 即当  $a \geq 0$  时,  $\sqrt{a^2} = a$ , 当  $a < 0$  时,  $\sqrt{a^2} = -a$ ;

$$(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$$

(2) 平方根的定义及性质:

平方根的定义: 如果一个数的平方等于  $a$ , 那么这个数叫做  $a$  的平方根或二次方根.

记作:  $\pm\sqrt{a}$ , 读作: 正负二次根号  $a$ .

平方根的性质: 正数有两个平方根, 它们互为相反数;

0 的平方根是 0; 负数没有平方根.

开平方: 求一个数的平方根的运算叫做开平方.

(3) 立方根的定义及性质:

立方根的定义: 如果一个数的立方等于  $a$ , 那么这个数叫做  $a$  的立方根或三次方根.

记作:  $\sqrt[3]{a}$ , 读作: 三次根号  $a$ .

立方根的性质: 正数有一个正的立方根; 0 的立方根是 0; 负数有一个负的立方根.

开立方: 求一个数的立方根的运算叫做开立方.

## 2. 平方根与算术平方根的区别与联系

(1) 区别: ①定义不同; ②个数不同: 一个正数有两个平方根, 它们互为相反数, 而一个正数的算术平方根只有一个; ③表示方法不同: 正数  $a$  的平方根表示为  $\pm\sqrt{a}$ , 正数  $a$  的算术平方根表示为  $\sqrt{a}$ ; ④取值范围不同: 正数的算术平方根一定是正数, 正数的平方根是一正、一负.

(2) 联系: ①具有包含关系: 平方根包含算术平方根, 算术平方根是平方根中的正的那个; ②存在条件相同: 平方根和算术平方根都只有非负数才有; ③0 的平方根与算术平方根都是 0.





3.  $\sqrt{a^2}$  与  $(\sqrt{a})^2$  的对比

(1) 意义不同:  $(\sqrt{a})^2$  表示  $a$  的算术平方根的平方, 而  $\sqrt{a^2}$  表示  $a$  的平方的算术平方根;

(2)  $a$  的取值不同:  $(\sqrt{a})^2$  中  $a$  的取值是  $a \geq 0$ , 而  $\sqrt{a^2}$  中  $a$  的取值是任意实数;

(3) 运算顺序不同:  $(\sqrt{a})^2$  是先开算术平方根再平方,  $\sqrt{a^2}$  是先平方再开算术平方根;

(4) 运算结果不同:  $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ ;  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$ .

联系: 当  $a \geq 0$  时,  $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$ .

4. 无理数的概念: 无限不循环小数叫做无理数.

说明: 有理数是指有限小数和无限循环小数, 可以化成分数.

一个有理数  $a$  与一个无理数  $b$  进行四则运算时,

$a+b$ 、 $a-b$  都是无理数;

当  $a \neq 0$  时,  $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{b}{a}$  都是无理数, 当  $a=0$  时,  $ab$ 、 $\frac{a}{b}$  都是有理数.

5. 无理数的特征

(1) 无理数的小数部分位数无限;

(2) 无理数的小数部分不循环, 不能表示成分数的形式.

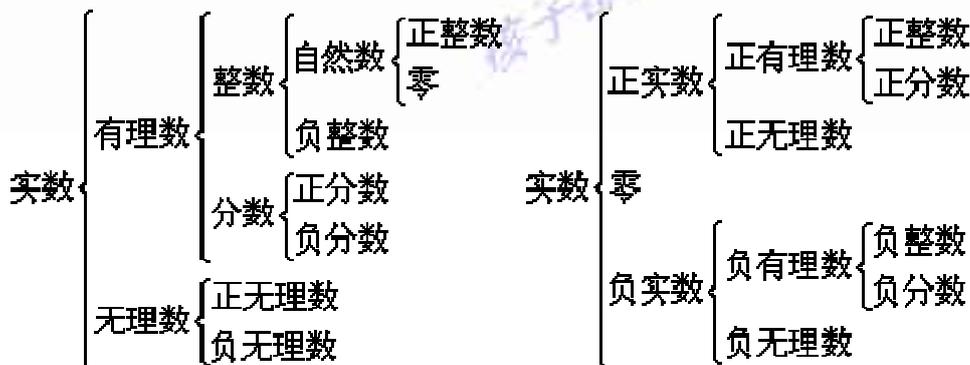
6. 无理数的常见类型

主要有三类: (1) 圆周率 及含有 的数; (2) 看似循环而实质不循环的数, 如

$0.8080080008\cdots$  (相邻两个 8 之间 0 的个数逐次增加); (3) 开方开不尽的数, 如  $\sqrt{3}$ .

7. 实数的定义: 有理数和无理数统称实数.

8. 实数的分类



9. 实数与数轴上的点一一对应

即数轴上的任何一个点都对应一个实数, 反之任何一个实数都能在数轴上找到一个





点与之对应.

- (1) 实数可比较大小, 在数轴上“左<右”;
- (2) 实数继承有理数中的绝对值、相反数等概念;
- (3) 实数继承有理数中的运算法则, 并保持运算律.

### [同步练习]

#### 一、选择题

1. 无理数是 ( )
  - A. 无限循环小数
  - B. 开方开不尽的数
  - C. 除有限小数以外的所有实数
  - D. 除有理数以外的所有实数
2. 和数轴上的点一一对应的是 ( )
  - A. 整数
  - B. 有理数
  - C. 无理数
  - D. 实数
3. 若  $x, y$  为实数, 在下列式子中, 能使  $x = y$  成立的是 ( )
  - A.  $|x| = |y|$
  - B.  $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$
  - C.  $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$
  - D.  $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt{y^2}$
4. 下列等式正确的是 ( )
  - A.  $\sqrt{64} = 8$
  - B.  $\sqrt{(2)^2} = 2$
  - C.  $\sqrt{(6)^2} = 6$
  - D.  $\sqrt{36} = \pm 6$
5. 要使  $\sqrt[3]{(a-1)^3} = a-1$  成立, 那么  $a$  的取值范围是 ( )
  - A.  $a > 1$
  - B.  $a < 1$
  - C.  $a \geq 1$
  - D. 一切实数
6. 下列语句: ①  $\sqrt{81}$  的平方根是  $\pm 9$ ; ②  $\pm 2m$  是  $4m^2$  的平方根; ③若  $\sqrt{x^2} = 3$ , 则  $x=3$ ; ④把 49 开平方得 7. 其中正确的个数为 ( )
  - A. 0
  - B. 1
  - C. 3
  - D. 4
7. 在绝对值不超过 100 的数中, 平方根和立方根都为整数的有 ( )
  - A. 2 个
  - B. 3 个
  - C. 4 个
  - D. 5 个

#### 二、填空题

8. 在 0、 $\sqrt{16}$ 、 $\sqrt{3}$ 、0.01 中, 属于无理数的是\_\_\_\_\_.





9.  $\sqrt[3]{125} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\sqrt[5]{243} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\sqrt[8]{(-6)^8} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 已知  $\sqrt{1.5} = 1.225$ , 则 0.00015 的平方根是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

11. (1) 平方根等于它本身的数是  $\underline{\hspace{2cm}}$ ; (2) 立方根等于它本身的数是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

12. (1)  $\sqrt{(-\pi)^2}$  的平方根是  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2) 某自然数的算术平方根是 a, 则与此自然数相邻的下一个自然数的平方根是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知  $\frac{\sqrt{x-3y} |x^2+9|}{(x+3)^2} = 0$ , 则  $xy$  的值等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三、解答题

14. 求下列各式中的  $x$ :

(1)  $9 - 36x^2 = 0$ ; (2)  $(3x+1)^3 - 27 = 0$ ; (3)  $|2x-1| - \sqrt{2} = 0$ .

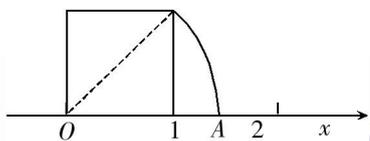
15. 已知  $144x^2=49$ , 且  $y^3+8=0$ , 求  $x+y$  的值.

16. 若  $x, y$  为实数, 且  $y < \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}$ , 化简  $\frac{|1-y|}{y-1}$ .





17. 如图，我们在数轴上以单位线段为边作一个正方形，然后以  $O$  为圆心，正方形的对角线长为半径画弧交  $x$  轴上于一点  $A$ ，则  $OA$  的长就是  $\sqrt{2}$  个单位。动手试一试，你能用类似的方法在数轴上找出表示  $\sqrt{3}$ ， $-\sqrt{5}$  的点吗？矩形对角线的平方等于矩形长的平方与宽的平方的和。（提示： $(\sqrt{2})^2 + 1^2 = (\sqrt{3})^2$ ， $(2)^2 + 1^2 = (\sqrt{5})^2$ ）



18. (1) 化简  $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \pi|$ ;  
(2) 已知数  $M$  的平方根为  $a + 3$  及  $2a - 15$ ，求  $M$ 。

19. 已知  $5 + \sqrt{7}$  小数部分为  $a$ ， $5 - \sqrt{7}$  小数部分为  $b$ ，求  $5a + 4b$ 。





20. 已知  $A = \sqrt[4a-b-3]{a+2}$  是  $a+2$  的算术平方根,  $B = \sqrt[3a+2b-9]{2-b}$  是  $2-b$  的立方根, 求  $A+B$  的二次方根.

21. 观察下列各式:  $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ ,  $\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$ , ...

- (1) 请验证以上各式是否成立, 并写出验证过程;  
(2) 用含字母  $n$  的式子表示以上规律, 并给出证明.

(提示:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ,  $a \geq 0, b \geq 0$ )

