



[八年级上学期数学提高系列之五]

整式的乘除与因式分解

【励志故事】

反过来想想

一位叫德瑞克的美国人，发现了从石油中可以分离出代替鲸油的煤油。在当时，这肯定是一个发财的好点子。但他面临着一个头痛的问题，那就是如何将地底下的石油采集上来。为此事而烦的德瑞克先生，有一天突然听到了附近的一个农户正在抱怨：他打的水井总是渗入了讨厌的石油，弄得水井无法使用。在这一瞬间，德瑞克先生脑袋一转：这不正是一个绝妙的好方法！只要用打水井的方法，在地下钻一个井，不就可以像抽水一般，抽取石油吗？

但欣喜若狂的他将这个设想说出来之后，却引来了一片嘲笑声。在当时人们的眼里，这简直就是天方夜谭。没有被嘲笑声吓倒的德瑞克先生，决定在宾州的土地上开挖世界上第一口钻井。

他成功了。钻井里涌出了源源不绝的石油。直至今日，全世界都还在使用着他想出来的钻井方法。

对于农民来说，水井里涌入石油，确实是一件讨厌的事情；但对于德瑞克来说，却正是解决难题的良方。

成功与失败，在许多情况下都是相对而言的。只要你愿意反过来想一下，就完全可以从别人的错误与失败中，找寻到自己成功的途径。





八年级上学期数学提高训练（五）

【知识要点】

1. 同底数幂的乘法 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m, n 是正整数)

2. 幂的乘方 $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数)

3. 积的乘方 $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数)

4. 同底数幂的除法 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0, m, n$ 是正整数, 且 $m > n$)

5. 零指数与负整数指数的意义

(1) 零指数 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

(2) 负整数指数 $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0, p$ 是正整数)

6. 单项式与单项式相乘

单项式与单项式相乘, 把它们的系数, 相同字母分别相乘, 对于只在一个单项式里含有的字母, 则连同它的指数作为积的一个因式。

7. 单项式与多项式相乘

单项式与多项式相乘, 用单项式和多项式的每一项分别相乘再把所得的积相加。

8. 多项式与多项式相乘

多项式与多项式相乘, 先用一个多项式的每一项与另一个多项式的每一项相乘, 再把所得的积相加。

9. 乘法公式

(1) 完全平方和公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) 完全平方差公式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) 平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

10. 单项式除以单项式

单项式相除, 把系数, 同底数幂分别相除, 作为商的因式, 对于只在被除式里含有的字母, 则连同它的指数作为商的一个因式。

11. 多项式除以单项式

多项式除以单项式, 先把这个多项式的每一项除以这个单项式, 再把所得的商相加。

12. 因式分解

把一个多项式化成几个整式乘积的形式, 叫做因式分解。





13. 提公因式法

一般地，如果多项式的各项都含有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法。

14. 公式法

(1) 完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

(2) 平方差公式 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

15. 因式分解的步骤及要求：

- (1) 常常先提公因式再用公式法进行因式分解；
- (2) 因式分解一定要进行到每一个因式不能再分解为止；
- (3) 多项式第一项为负系数，常先提出负号使分解后的第一项系数为正；
- (4) 多项式因式分解结果中常用小括号出现，因式中不含中括号。

用四字口诀概括为：方法先后，分解彻底，符号处理，书写规范。

【同步练习】

一、选择题

1. 若 $x^2 + mx - 15 = (x + 3)(x + n)$ ，则 m 的值为 ()

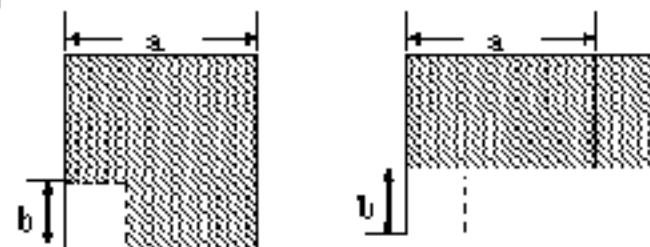
- A. -5 B. 5 C. -2 D. 2

2. 如图，在长为 a 的正方形中挖掉一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$)

把余下的部分剪拼成一个矩形，通过计算两个图形 (阴影部分)

的面积，验证了一个等式，则这个等式是 ()

- A. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
C. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ D. $(a + 2b)(a - b) = a^2 + ab - 2b^2$



3. 已知 $(a + b)^2 = 7$ ， $(a - b)^2 = 3$ ，则 $a^2 + b^2$ 与 ab 的值分别是 ()

- A. 4, 1 B. $2, \frac{3}{2}$ C. 5, 1 D. $10, \frac{3}{2}$

4. 若 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，则 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 等于 ()





A. 11 B. 9 C. 7 D. 6

5. 把 $8a - 4a^2 - 4$ 分解因式是 ()

A. $4(2a - a^2 - 1)$ B. $4a(2 - a) - 4$ C. $-4(a + 1)^2$ D. $-4(a - 1)^2$

6. 下列因式分解中正确的是 ()

A. $-2x^3 - 3xy^3 + xy = -xy(2x^2 - 3y^2 + 1)$ B. $-x^2 - y^2 = -(x + y)(x - y)$

C. $16x^2 + 4y^2 - 16xy = 4(2x - y)^2$ D. $x^2y + 2xy + 4y = y(x + 2)^2$

7. 已知多项式 $2x^3 - x^2 - 13x + k$ 有一个因式是 $2x + 1$, 则 k 的值为 ()

A. -1 B. -6 C. 3 D. 2

二、填空题

8. 已知 $a^m = 7, a^n = 8$, 则 $a^{2m-3n} =$ _____。

9. 若 $\frac{1}{2}a^2b + M = \frac{1}{2}ab(N + 2b)$, 则 $M =$ _____。

10. 已知 x, y 互为相反数, 且 $(x + 2)^2 - (y + 2)^2 = 4$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____。

11. $99^2 =$ _____, $(-2)^{102} + (-2)^{101} =$ _____。

12. 当 $a^2 + 2a + 2$, 当 $a =$ _____ 时, 有最小值为 _____。

13. $2^{1999} - 5 \times 2^{1998} + 6 \times 2^{1997} + 2000 =$ _____。

14. 已知 $x^2 + 4x - 3 = 0$, 则 $2x^3 + 9x^2 - 2x - 8 =$ _____。

三、解答题

15. 计算 (1) $(2x - y)(y + 2x) - 2(3x - 2y)(-2y - 3x) - (11x - 3y)(2x - 3y)$;





$$(2) (x+y)^2(x-y)^2 - (x-y)(x+y)(x^2+y^2);$$

$$(3) 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \dots + 2^2 - 1^2;$$

$$(4) \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right).$$

$$16. \text{ 解不等式 } x^2 - \frac{x}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} < 1 + \frac{(4x-1)(x+2)}{6}.$$





17. (1) 已知 $a = 5\frac{4}{7}$, $b = 4\frac{3}{7}$, 求代数式 $[-3\frac{1}{2}(a+b)]^3 \cdot (a-b) \cdot [-2(a+b)(a-b)]^2$ 的值;

(2) 已知 $|a-b+3| + \sqrt{2a+b} = 0$, 求 $-2ab \cdot 5a^2b + (\frac{1}{2}a^2b^2 - 3b) \cdot 2a + 6ab$ 的值。

18. 已知 $a = \frac{1}{5}x + 20$, $b = \frac{1}{5}x + 19$, $c = \frac{1}{5}x + 21$,

求代数式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值。





19. 分解因式

(1) $x^2 - y^2 + 4y - 4x$

(2) $1 - a^2 - b^2 + 2ab$

(3) $ab(c^2 - d^2) - (a^2 - b^2)cd$

(4) $(m^2 - m)^4 - 18(m^2 - m)^2 + 81$

(5) $x^3 - 7x + 6$

(6) $x^4 + 4$

20. 求证: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 是一个完全平方式。