

72. 如图 12 所示。

四个空白三角形的面积
 $=$ 阴影部分的面积 $- 2 \times 3 = 53 - 6 = 47$,
 所以正方形的面积为

$$53 + 47 = 100.$$

73. 设水池的边长为 a 米, 则

$$4a + 4 = 52, \text{ 得 } a = 12.$$

所以水池的面积为 $12 \times 12 = 144$ (平方米)。

74. 所求长方形的面积 $= (15 \div 5) \times 8 = 24$ 。

75. 为使四个小长方体的表面积的和最小, 则应使分割面的表面积最小。显然, 当分割面为 3 个 1×2 的长方形时满足要求。

所以四个小长方体的表面积的和最小是

$$2(1 \times 2 + 1 \times 4 + 2 \times 4) + 6(1 \times 2) = 40.$$

76. 由所有棱长的和是 28, 可得长方体的长、宽、高的和为

$$28 \div 4 = 7,$$

将 7 写成互不相等的 3 个整数的和:

$$7 = 1 + 2 + 4,$$

所以长方体的表面积为 $(1 \times 2 + 1 \times 4 + 2 \times 4) \times 2 = 28$ 。

77. 面 $ABCD$ 的面积为

$$1342 \div 2 = 671(\text{cm}^2),$$

面 $ADHE$ 的面积为 $366 \div 2 = 183(\text{cm}^2)$,

分解质因数 $671 = 11 \times 61, 183 = 3 \times 61$ 。

由于棱长为质数, 所以

$$AD = 61, AE = 3, AB = 11.$$

故所求表面积为

$$2 \times (3 \times 11 + 11 \times 61 + 3 \times 61) = 1774(\text{cm}^2).$$

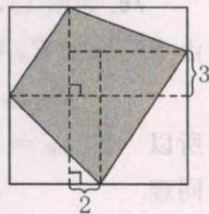


图 12

78. 如图 13, 连接 FH, AF 。

由 $BF = 2FE, AE = 2EH$, 知

$$S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle AEF} = 4S_{\triangle EFH},$$

所以 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle AFB} = 6S_{\triangle EFH}$ 。

同理 $S_{\triangle CDG} = 6S_{\triangle FHG}$ 。

故 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDG} = 6(S_{\triangle EFH} + S_{\triangle FHG}) = 6S_{\text{四边形EFGH}} = 6$,

同理可得 $S_{\triangle ADH} + S_{\triangle BFC} = 6$,

所以 $S_{\text{四边形ABCD}} = 6 + 6 + 1 = 13$ 。

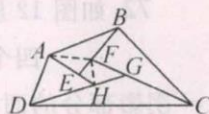


图 13

79. 如图 14, 阴影部分为截掉的正方形, 余下的小长方形中, 长与宽的和正是原来长方形的长, 等于 8 厘米, 因此, 余下的小长方形的周长是

$$(\text{长} + \text{宽}) \times 2 = 8 \times 2 = 16(\text{厘米}).$$

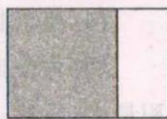


图 14

80. (1) 横向线段的长度之和是

$$2(30 + 5 + 20) = 110(\text{厘米}),$$

纵向线段的长度之和是 $2(8 + 12 + 8) = 56(\text{厘米})$,

所以图中多边形的周长是 166 厘米。

(2) 多边形的面积为

$$(8 + 12 + 8) \times 30 - 20 \times 12 - (8 + 12 + 8 - 10 - 11) \times 5 = 565(\text{平方厘米}).$$

81. 在不包含阴影的长方形中, 由一个长方形组成的有 14 个; 由 2 个长方形组成的有 9 个; 由 3 个长方形组成的有 6 个; 由 4 个长方形组成的有 1 个。共有

$$14 + 9 + 6 + 1 = 30(\text{个}).$$

82. 单位正方形一共有 12 个。

由 2 个单位正方形组成的长方形有 15 个;

由 3 个单位正方形组成的长方形有 8 个;

由 4 个单位正方形组成的正方形有 4 个;

由 4 个单位正方形组成的长方形有 4 个;

由 5 个单位正方形组成的长方形有 2 个;

由 6 个单位正方形组成的长方形有 4 个;

由 8 个单位正方形组成的长方形有 1 个。

共有 $12 + 15 + 8 + 4 + 4 + 2 + 4 + 1 = 50$ (个)。

83. 设三角形三边的长分别是 a, b, c , 且 $a \leq b \leq c$, 则有

$$a + b + c = 18,$$

由于 $a + b > c$,

所以 $2c < 18, c < 9$,

又 $3c \geq 18, c \geq 6$,

所以 $c = 6$ 或 8 。

当 $c = 6$ 时, $a \leq b \leq 6$, 可得 $a = b = c = 6$;

当 $c = 8$ 时, $a \leq b \leq 8$, 若 $b = 8$, 则 $a = 2$ 不是合数; 若 $b = 6$, 则 $a = 4$ 。

只有两组解, 即满足题意的三角形的个数是 2。

84. 考虑不进位的情况: 千位和百位各有 0 和 1 两种选法, 十位、个位各有 0、1、2、3 四种选法, 因为 0000 不符合题意, 所以不进位的数有 $2 \times 2 \times 4 \times 4 - 1 = 63$ (个),

至少发生一次进位的数有 $2013 - 63 = 1950$ (个)。

85. 10 次比赛的平均分超过 18 分, 总分至少是

$$18 \times 10 + 1 = 181(\text{分}),$$

6、7、8、9 四次比赛一共得

$$23 + 14 + 11 + 20 = 68(\text{分}),$$

这四次比赛平均分是 $68 \div 4 = 17$ (分)。

因为前 9 次比赛的平均分比前 5 次的高, 那么前 5 次最多得

$$17 \times 5 - 1 = 84(\text{分}),$$

所以第 10 次至少得 $181 - 84 - 68 = 29$ (分)。

86. 观察数表的排列规律知,第 n 行与第 $n+1$ 行(相邻两行)上下相应两数的和相等,其和为 $12n+1$ 。
由 $12n+1=421$,解得 $n=35$ 。

87. 设原来的三个数是 a, b, c , 则

第 1 次操作后,圆周上有 6 个数:

$a, a+b, b, b+c, c, c+a$, 和是 $3(a+b+c)$;

第 2 次操作后,圆周上有 12 个数:

$a, 2a+b, a+b, a+2b, b, 2b+c, b+c, b+2c, c, 2c+a, c+a, 2a+c$,
和是 $9(a+b+c)$;

.....

操作 6 次后,圆周上的 192 个数的和是

$$3^6 \times (1+2+3) = 4374.$$

88. 如果只有一个质因数,那么因数最多的是 $2^6 = 64$, 它有 7 个因数;

如果有两个不同的质因数,那么因数最多的是

$$2^3 \times 3^2 = 72 \text{ 和 } 2^5 \times 3 = 96, \text{ 各有 12 个因数};$$

如果有三个不同的质因数,那么因数最多的是

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60, 2^2 \times 3 \times 7 = 84 \text{ 和 } 2 \times 3^2 \times 5 = 90,$$

各有 12 个因数。

所以不大于 100 的自然数,因数最多的自然数是 60, 72, 84, 90 和 96。

注:若自然数 $N = a^m b^n c^p$, 其中 a, b, c 是不同的质数, m, n, p 是不小于 1 的自然数,则 N 的因数的个数是 $(m+1)(n+1)(p+1)$ 。

89. 从文学、科普、经济、技术四种图书中任意借两本,共有 10 种情况:

(文学、文学)、(文学、科普)、(文学、经济)、(文学、技术)、(科普、科普)、(科普、经济)、(科普、技术)、(经济、经济)、(经济、技术)、(技术、技术)。

那么,在 11 个学生当中,必然有两人所借的图书种类都相同。

90. 从最大的数 10 开始交换,将 10 交换到它应在的位置后,再依次对 9,8,7,⋯ 进行交换,直至按从小到大排列为止。

因为 10 后面有 5 个比它小的数,所以对 10 连续交换 5 次,10 到了最后,而其它各数的前后顺序没有改变;再看 9,9 后面有 3 个比它小的数,需交换 3 次,9 排在 10 前面;再依次对 8,7,6,⋯ 实施这样的交换。

10 后面有 5 个比它小的数,我们说 10 有 5 个逆序;9 后面有 3 个比它小的数,我们说 9 有 3 个逆序;类似地,8,7,6,5,4,3,2 依次有 7,3,3,4,1,0,1 个逆序。因为每个数要交换的次数就是它的逆序数,所以需交换 $5+3+7+3+3+4+1+0+1=27$ (次)。

91. 棱长为 1cm 的正方体至少有一个面涂有红漆的有 1 个;

棱长为 3cm 的正方体至少有一个面涂有红漆的有 3^3-1^3 (个);

棱长为 5cm 的正方体至少有一个面涂有红漆的有 5^3-3^3 (个);

棱长为 7cm 的正方体至少有一个面涂有红漆的有 7^3-5^3 (个);

棱长为 9cm 的正方体至少有一个面涂有红漆的有 9^3-7^3 (个);

……

棱长为 2011cm 的正方体至少有一个面涂有红漆的有

$$2011^3-2009^3(\text{个});$$

棱长为 2013cm 的正方体至少有一个面涂有红漆的有

$$2013^3-2011^3(\text{个}).$$

那么,至少有一个面涂有红漆的小正方体共有

$$1^3+(3^3-1^3)+(5^3-3^3)+(7^3-5^3)+(9^3-7^3)+(11^3-9^3)+\cdots+(2011^3-2009^3)+(2013^3-2011^3)=2013^3=8157016197(\text{个}).$$

92. 最短的是 1 厘米,假设第二短的是 2 厘米。

当第三短的木棍长 $1+2=3$ (厘米)时,这三根木棍不能组成三角形;

同理,第四短の木棍是 $2+3=5$ (厘米);
 第五短の木棍是 $3+5=8$ (厘米);
 第六短の木棍是 $5+8=13$ (厘米);
 第七短の木棍是 $13+8=21$ (厘米),恰好和最长的木棍一样长。
 所以这7根木棍的总长度是 $1+2+3+5+8+13+21=53$ (厘米)。

93. 因为12个红包内所含的金额各不相同,共用了83元,
 而 $1+2+3+4+\cdots+12=78$, $83-78=5$,
 内含1~12元金额的红包的纸币组合情况是:

- (1) 1、2、5、10元金额的红包各需1张纸币;
- (2) $3=1+2$, $4=2+2$, $6=1+5$, $7=2+5$, $11=1+10$, $12=10+2$ (3、4、6、7、11、12元金额的红包各需2张纸币);
- (3) $8=1+2+5$, $9=2+2+5$ (8、9元金额的红包各需3张纸币)。
- (4) 为使分出的纸币张数最少,可将8元的红包换成13元,或将9元的红包换成14元,此时都分别用3张纸币。

所以最少分出纸币
 $1+1+2+2+1+2+2+3+3+1+2+2=22$ (张)。

94. 最省时间的办法就是班长利用等待的时间涂胶水或粘贴手抄报。于是可以这样安排:

- 先涂好第1张手抄报,用时2分钟;
- 再涂第2张手抄报,用时2分钟,然后把上一张已经涂好的手抄报粘贴到展板上,用时1分钟;
- 再涂第3张手抄报,用时2分钟,然后把上一张已经涂好的手抄报粘贴到展板上,用时1分钟;

.....
 再涂第42张手抄报,用时2分钟,然后把上一张已经涂好的手抄报粘贴到展板上,用时1分钟;

再涂第43张、第44张手抄报,用时4分钟,然后依次把第42、43、

44 张手抄报粘贴到展板上。

这样贴好每张手抄报都是用时 3 分钟,且没有等待,于是用的时间最少,共用

$$44 \times 3 = 132(\text{分}).$$

95. 由题意知,“希”字必须填在最下面的圆圈中,“望”必须填在中间层的一个圆圈中,中间层另一个圆圈中可以填“杯”或者“数”或者“学”。

若中间层填“望”与“杯”,则有 $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48(\text{种})$ 填法;

若中间层填“望”与“数”,则有 $2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24(\text{种})$ 填法;

若中间层填“望”与“学”,则有 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{种})$ 填法,

所以共有 $48 + 24 + 8 = 80(\text{种})$ 填法。

96. 设小明加的最后一个数是 $2k$,漏加的数是 m ,则有

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = 2014 + m,$$

$$\frac{(2 + 2k)k}{2} = 2014 + m,$$

$$k(k + 1) = 2014 + m.$$

由于 $2014 > 44 \times 45$,

所以 $k > 44$ 。

尝试 $k = 45$,此时方程有解 $m = 56$ 。

所以 k 最小就是 45, m 最小是 56。

故正确的结果应该是 $2014 + 56 = 2070$ 。

97. 因为 $28 = 2 \times 2 \times 7$, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $35 = 5 \times 7$,

$$45 = 3 \times 3 \times 5, 55 = 5 \times 11, 66 = 2 \times 3 \times 11,$$

$$2 \times 2 \times 7 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 11,$$

即 $28 \times 45 \times 55 = 30 \times 35 \times 66$,

因此,可分成 28,45,55 和 30,35,66 两组。

98. $1 \sim 999$ 中因子 7 的个数为

$$\left[\frac{999}{7} \right] + \left[\frac{999}{7 \times 7} \right] + \left[\frac{999}{7 \times 7 \times 7} \right] = 142 + 20 + 2 = 164 (\text{个}),$$

$1 \sim 2014$ 中因子 7 的个数为

$$\left[\frac{2014}{7} \right] + \left[\frac{2014}{7 \times 7} \right] + \left[\frac{2014}{7 \times 7 \times 7} \right] = 287 + 41 + 5 = 333 (\text{个}),$$

所以

$$m = 333 - 164 = 169.$$

99. 设 6 毫米、9 毫米的短木棒分别锯 x 段, y 段, 则有

$$6x + 9y + (x + y - 1) = 1000,$$

$$7x + 10y = 1001,$$

$$y = (1001 - 7x) \div 10.$$

为使损耗最少, 应尽可能多锯 9 毫米长的短木棒, 也就是 x 尽可能小, y 尽可能大。由于 x, y 都是自然数, 因而

$$x = 3, y = 98.$$

即长 6 毫米的短木棒锯 3 段, 长 9 毫米的短木棒锯 98 段时, 损耗最少。

100. 假设这五人按年龄从小到大排列为 ①②③④⑤。

有 $⑤ = ④ + 5, ② = ① + 7, ① + ⑤ = 22 \times 2 = 44$ 。

所以有 $② + ④ = ① + 7 + ⑤ - 5 = 44 + 2 = 46$,

$$① + ② + ④ + ⑤ = 44 + 46 = 90.$$

还有

$$① + ② + ③ = 18 \times 3 = 54,$$

$$③ + ④ + ⑤ = 26 \times 3 = 78.$$

因此

$$③ = (54 + 78 - 44 - 46) \div 2 = 21.$$

$$① = (54 - 21 - 7) \div 2 = 13,$$

$$② = 13 + 7 = 20,$$

$$④ = (78 - 21 - 5) \div 2 = 26,$$

$$⑤ = 26 + 5 = 31.$$