

## 第十四届“中环杯”中学生思维能力训练活动

### 初一年级选拔赛答案

1、因式分解： $x^3 + 2013x^2 + 2013x + 2012 =$  \_\_\_\_\_

【解析】 $x^3 + 2013x^2 + 2013x + 2012$

$$= (x^3 - 1) + (2013x^2 + 2013x + 2013) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2013(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x - 1 + 2013) = (x^2 + x + 1)(x + 2012)$$

【答案】 $(x^2 + x + 1)(x + 2012)$

2、对分式进行约分： $\frac{(2x+1)^3 + (x+1)^3}{(2x+1)^3 + x^3} =$  \_\_\_\_\_

【解析】 $\frac{(2x+1)^3 + (x+1)^3}{(2x+1)^3 + x^3}$

$$= \frac{[(2x+1) + (x+1)][(2x+1)^2 - (2x+1)(x+1) + (x+1)^2]}{[(2x+1) + x][(2x+1)^2 - (2x+1)x + x^2]}$$

$$= \frac{(3x+2)(3x^2+3x+1)}{(3x+1)(3x^2+3x+1)} = \frac{3x+2}{3x+1}$$

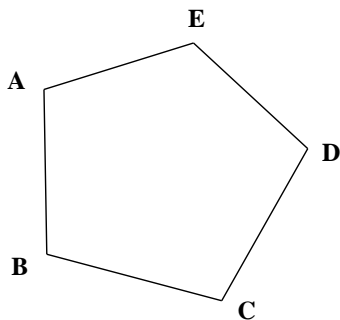
【答案】 $\frac{3x+2}{3x+1}$

3、在 1、2、3、…、2013 之中的每个数面前添上一个正号或负号，则和式可以得到的最小正数是\_\_\_\_\_

【解析】因为 1~2013 共有 1007 个奇数，所以添加正、负号的结果一定是一个奇数，想要使和式的值最小，那么最小为 1。（将 1 去掉，从 2 开始，连续 4 个自然数，都可以通过添加正、负号使这四个数为 0， $(2013-1) \div 4 = 503$ ，恰好可以分成 503 组，每一组均为 0，所以和最小的正数为 1。）

【答案】1

- 4、将长为 10cm 的一条线段用任意的方式分成 5 小段，以这 5 段为边可以围城一个五边形，那么其中最长的一段的取值范围是\_\_\_\_\_



【解析】解：设最长的一段  $AB$  的长度为  $x$  厘米（如上图），则其余 4 段的和为  $(10-x)$  厘米。 $\because AB$  是最长的边，所以  $AB$  不可能比 2 小，因为如果  $AB$  都比 2 小，那么其余的 4 边均比 2 都小，那么 5 条边的和就达不到 10 了，所以  $AB$  最小为 2；又由线段基本性质知  $x < 10-x$ ，所以  $x < 5$ ， $\therefore 2 \leq x < 5$ 。

【答案】 $2 \leq x < 5$

- 5、若  $x$ 、 $y$  的值满足方程式组  $\begin{cases} 323x+457y=1103 \\ 177x+543y=897 \end{cases}$ ，则

$$x^4 + 4x^2y^2 + 5y^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

【解析】 $\begin{cases} 323x+457y=1103 \text{ ①} \\ 177x+543y=897 \text{ ②} \end{cases}$ ，①+②得： $x+2y=4$ ，①-②得： $73x-43y=103$ ，

解得： $x=2, y=1$ ，代入  $x^4 + 4x^2y^2 + 5y^4$  得： $x^4 + 4x^2y^2 + 5y^4 = 37$

【答案】37

- 6、已知两个方程： $\frac{x^2+ax+2}{x-4}=0$  与  $x^2-2x-8=0$ ，有一个相同的解，则  $a=$ \_\_\_\_\_

【解析】由  $x^2-2x-8=0$ ，得  $(x-4)(x+2)=0$ ，算出  $x=4$  或  $x=-2$ ；因两个方程有一个相同的解，但  $x=4$  代入分式方程  $\frac{x^2+ax+2}{x-4}=0$ ，无意义，所以这个相

同的解为  $x=-2$ ，代入  $\frac{x^2+ax+2}{x-4}=0$ ，得： $a=3$ 。

【答案】 $a=3$

7、如果一个数正写和逆写的值不变,那么我们称这样的数为回文数,比如 12321 或 131, 如果一个数不能表示为两个回文数之和, 我们就称其为中环数。则超过 2013 的最小中环数为\_\_\_\_\_

【解析】枚举, 判断

最小的大于 2013 的中环数一定是先考虑四位数; 四位数能够表示成两个回文数的和的有 3 种情况: 四位数加一位数; 四位数加两位数; 四位数加三位数。

2014=1661+353; 2015=1551+464; 2016=1661+575……, 第一个加数减 110, 后 1 个加数加 111; 所以到 2018=1221+797 截止, 2019 就没法推下去了。那么我们要检验一下 2019 是否 3 种情况都没法求出, 最后可以检验出 2019 也没法用四位数加一位数或四位数加两位数的形式表示出来, 所以超过 2013 的最小中环数为 2019。

【答案】2019

8、已知  $\frac{x}{x^2-mx+1}=1$  ( $m \geq 3$ ), 则  $\frac{x^3}{x^6+4x^3+1}$  的最大值为\_\_\_\_\_

【解析】由  $\frac{x}{x^2-mx+1}=1$  得:  $\frac{x^2-mx+1}{x}=1$ ,  $x+\frac{1}{x}-m=1$ , 所以  $x+\frac{1}{x}=1+m$ ;

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(1+m)^2$ ,  $x^2+\frac{1}{x^2}=m^2+2m-1$ , 同理可得:  $x^3+\frac{1}{x^3}=m^3+3m^2-2$ ;

$\frac{x^3}{x^6+4x^3+1}$  的倒数为:  $\frac{x^6+4x^3+1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+4=m^3+3m^2+2$ , 要想  $\frac{x^3}{x^6+4x^3+1}$  的

值最大, 那么  $\frac{x^6+4x^3+1}{x^3}$  最小即可, 也就是  $m^3+3m^2+2$  的值最小, 所以当  $m=3$

时,  $\frac{x^6+4x^3+1}{x^3}$  取得最小值:  $m^3+3m^2+2=27+27+2=56$ , 即  $\frac{x^3}{x^6+4x^3+1}$  的最

大值为  $\frac{1}{56}$ 。

【答案】 $\frac{1}{56}$

9、计算：
$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(17^4 + \frac{1}{4}\right)\left(19^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(18^4 + \frac{1}{4}\right)\left(20^4 + \frac{1}{4}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【解析】通项公式：
$$n^4 + \frac{1}{4} = n^4 + n^2 + \frac{1}{4} - n^2 = \left(n^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2$$

$$= \left(n^2 + \frac{1}{2} + n\right)\left(n^2 + \frac{1}{2} - n\right) = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]n^4 + \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right],$$

接着将原式进行化简，进行约分得：原式 = 
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}{\left(\frac{41}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{841}$$

【答案】 $\frac{1}{841}$

10、 将编号为 1-10 的 10 本书放入编号为 1-10 的 10 个书架上，要求编号为 k 的书只能放在编号为 k-1 或 k 或 k+1 的书架上，例如：编号为 1 的书只能放在编号为 1 或 2 的书架上；编号为 4 的书只能放在编号为 3 或 4 或 5 的书架上；编号为 10 的书只能放在编号为 9 或 10 的书架上。那么一共有\_\_\_\_\_种放法。

【解析】递推，找规律

设书架和数的个数为  $n$ ，则

当  $n=1$  时，有 1 种放法；当  $n=2$  时，有 2 种放法；当  $n=3$  时，有 3 种放法；

当  $n=4$  时，有 5 种放法，……，发现从第 3 个开始，后一个等于前两个数的和，

所以最终可以得出：当  $n=10$  时，有 89 种放法。

【答案】89

11、 下列数阵中，有\_\_\_\_\_个完全平方数。

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 11 & 111 & \cdots & \underbrace{11\cdots1}_{2013\text{个}1} \\
 2 & 22 & 222 & \cdots & \underbrace{22\cdots2}_{2013\text{个}2} \\
 3 & 33 & 333 & \cdots & \underbrace{33\cdots3}_{2013\text{个}3} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 9 & 99 & 999 & \cdots & \underbrace{99\cdots9}_{2013\text{个}9}
 \end{array}$$

【解析】完全平方数的末尾一定是 0、1、4、5、6、9；完全平方数除以 4 的余数一定是 0 或 1；所以：1 11 111  $\cdots$   $\underbrace{11\cdots1}_{2013\text{个}1}$  这一列数中除了 1 以外，其余的

数除以 4 都余 3，所以这一列数中只有 1 这一个数是完全平方数；

4 44 444  $\cdots$   $\underbrace{44\cdots4}_{2013\text{个}4}$  这列数可以转化为  $4\times 1$   $4\times 11$   $4\times 111$   $\cdots$   $4\times \underbrace{11\cdots1}_{2013\text{个}1}$ ，

可以得出这列数中也只有 4 这一个；同理得出末尾是 5、6、9 结尾的一列数中，只有 9 这一个数是完全平方数，所以共有 1、4、9 这 3 个数是完全平方数。

【答案】3 个

12、已知  $(|a-1|+|a-2|+3|a-3|)(b^2-4b+5)=3$ ，则  $a^2-3ab+b^2=$ \_\_\_\_\_

【解析】 $|a-1|+|a-2|+3|a-3|$  通过零点分段，可以得出最小值为 3， $b^2-4b+5=1$

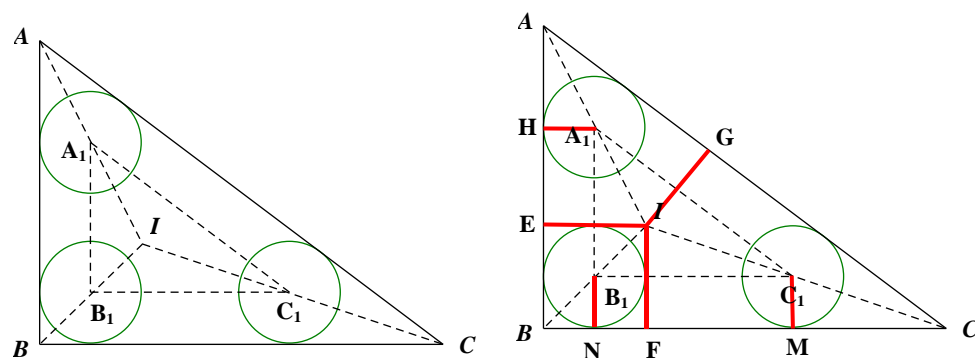
$(b-2)^2+1$ ，最小值为 1，所以由  $(|a-1|+|a-2|+3|a-3|)(b^2-4b+5)=3$  知，

$|a-1|+|a-2|+3|a-3|=3$  且  $b^2-4b+5=1$ ，解得： $a=3$ ， $b=2$ ，所以

$$a^2-3ab+b^2=3^2-3\times 3\times 2+2^2=-5$$

【答案】-5

13、如图：一个半径为 0.5 的小圆环在一个直角  $\triangle ABC$  内滚动，从  $A_1$  到  $B_1$ ，再到  $C_1$ ，最后回到  $A_1$ ，已知  $AB=3$ ， $BC=4$ ，且  $AA_1$ ， $BB_1$ ， $CC_1$  的延长线交于同一点  $I$ ，点  $I$  到三条边的距离相等，那么，小圆环滚了一圈， $\triangle A_1B_1C_1$  的周长为 \_\_\_\_\_



【解析】从  $I$  做三条边的高，根据面积相等可以求出。

$S_{\triangle ABC} = 3 \times 4 \div 2 = 6$ ， $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABI} + S_{\triangle ACI} + S_{\triangle BCI}$ ，由此可以求出点  $I$  到三角形三边的距离  $IE = IF = IG = 1$ 。然后根据比例关系可以求出， $BN = 0.5$ ， $AH = 1$ ， $CM = 1.5$ 。在直角三角形  $\triangle ABC$  中，根据勾股定理： $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ，求出  $AC = 5$ ，所以  $C_{\triangle A_1B_1C_1} = 3 + 4 + 5 - 2 \times (0.5 + 1 + 1.5) = 6$

【答案】 6

14、已知  $a$  满足  $a^3 + 3a^2 + 4a + 2 = 0$ ， $a$ 、 $b$  满足  $a[a(a+b)+b]+b=1$ ，则

$$a^2 + (a+b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

【解析】由  $a^3 + 3a^2 + 4a + 2 = 0$  得， $(a+1)(a^2 + 2a + 2) = 0$ ，

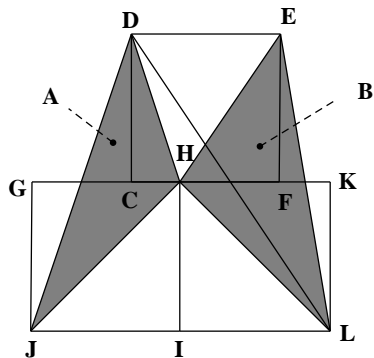
又  $a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \geq 1$ ，所以  $a+1=0$ ，即  $a=-1$ ；又  $a[a(a+b)+b]+b=1$ ，

代入得： $b=2$ ；则  $a^2 + (a+b)^2 = (-1)^2 + (-1+2)^2 = 2$ 。

【答案】 2

15、如图，三个边长为 6 的正方形放在一起，连接它们的顶点形成两个三角形 A 和 B（图阴影表示）。我们用  $S_A$  表示 A 的面积， $S_B$  表示 B 的面积，若  $\frac{S_B}{S_A} = \frac{3}{2}$ ，

则此时的  $\triangle DHL$  的面积为\_\_\_\_\_



【解析】 $S_{DJLE} : (6+6+6) \times (6+6) \div 2 = 108$ ； $S_{\triangle DHE} : 6 \times 6 \div 2 = 18$ ；三角形  $HJL$

的面积： $(6+6) \times 6 \div 2 = 36$ 。所以  $S_A + S_B = 108 - 18 - 36 = 54$ ，又  $\frac{S_B}{S_A} = \frac{3}{2}$  得：

$S_A = 54 \div 5 \times 2 = 21.6$ ，所以  $S_{\triangle DHL} = S_{\triangle DJL} - S_A - S_{\triangle HJL}$ ，同时

$S_{\triangle DJL} = (6+6) \times (6+6) \div 2 = 72$ ，所以  $S_{\triangle DHL} = 72 - 21.6 - 36 = 14.4$

【答案】14.4

16、已知  $a, b, c$  是三个不同的实数，则方程

$$\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2 - (b-c)^2} + \frac{(x-b)^2}{(x-b)^2 - (c-a)^2} + \frac{(x-c)^2}{(x-c)^2 - (a-b)^2} = 1 \text{ 的解为 } \underline{\hspace{2cm}}$$

【解析】令  $x-a=A, x-b=B, x-c=C$ ，则原方程可转化为：

$$\frac{A^2}{A^2 - (C-B)^2} + \frac{B^2}{B^2 - (A-C)^2} + \frac{C^2}{C^2 - (B-A)^2} = 1$$

$$\frac{A^2}{(A+C-B)(A-C+B)} + \frac{B^2}{(B+A-C)(B-A+C)} + \frac{C^2}{(C+B-A)(C-B+A)} = 1$$

通分化简可得： $2ABC=0$ ，即： $A=0$  或  $B=0$  或  $C=0$ ；

所以  $x-a=0$  或  $x-b=0$  或  $x-c=0$ ，即： $x=a$  或  $x=b$  或  $x=c$

【答案】 $x=a$  或  $x=b$  或  $x=c$

17、从 1, 2, ..., 20 中任取 5 个不同的数, 其中至少有两个是相邻数的概率是

【解析】设  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$  取自 1, 2, ..., 20, 若  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  互不相邻, 则  $1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < a_4 - 3 < a_5 - 4 \leq 16$ , 由此可知从 1, 2, ..., 20 中取 5 个不相同的数的选法与从 1, 2, ..., 16 中取 5 个不同的数的选法相同, 即:  $C_{16}^5$  种。所以从 1, 2, ..., 20 中任取 5 个不同的数, 其中至少有两个是相邻数的

概率是  $\frac{C_{20}^5 - C_{16}^5}{C_{20}^5} = 1 - \frac{C_{16}^5}{C_{20}^5} = \frac{232}{323}$ 。

【答案】  $\frac{232}{323}$

18、如果正整数对  $(a, b)$  使得  $\frac{a^2b-1}{a+1}$  与  $\frac{b^2a+1}{b-1}$  都是正整数, 则所有满足条件的  $(a, b)$  为\_\_\_\_\_

【解析】因为  $(a, b)$  为正整数对:

$$\frac{a^2b-1}{a+1} = \frac{(a^2b+ab)-(ab+b)+b-1}{a+1} = ab-b+\frac{b-1}{a+1}, \text{ 知 } (b-1)|(a+1);$$

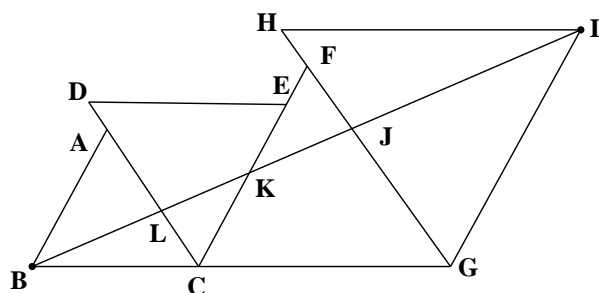
$$\frac{b^2a+1}{b-1} = \frac{(b^2a-ba)+(ba-a)+a+1}{b-1} = ab+a+\frac{a+1}{b-1}, \text{ 知 } (a+1)|(b-1);$$

综上可知,  $a+1=b-1$ , 所以  $b=a+2$

【答案】  $b=a+2$



19、四个等边三角形如图排列，它们的边长都是整数，且构成一个等差数列。 $B$ 、 $C$ 、 $G$  三点共线， $\frac{FJ}{JG} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{CG}$  的值是一个循环小数，则  $IH$  的最小值为\_\_\_\_\_



【答案】8

20、在一个  $8 \times 8$  的表格中，将 1~12 这 12 个数字填入表格中。使得：

- ①每个格子中最多填入一个数字，并且这 12 个数字每个只能使用一次；
- ②两个填入数字的格子不会接触（没有公共点，也没有公共边）
- ③一些行、列外给出了一些数字，这些数字告诉我们这行、列中所含有的所有数字之和，没有给出数字的行、列中的数字之和未知（不是 0）

请将 1~12 填入下方的表格中。

	24	1	3		20	13		11
3								
18								
21								
20								
13								
3								

【答案】

	24	1	3		20	13		11
3			3					
18	10				8			
21	5				12			4
20	9					11		
13				6				7
3		1				2		