

## 第十四届“中环杯”中学生思维能力训练活动

### 初二年级选拔赛答案

#### 1、【分析】

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{7} + 1)^2} - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{21} + 3\sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{21} + 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)} \\
 &= \sqrt{5} + \sqrt{7} + 1 - \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{21} - 3\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} - 1 \right) \\
 &= \sqrt{5} + \sqrt{7} + 1 - (\sqrt{7} - \sqrt{6} + \sqrt{6} - \sqrt{3}) \\
 &= \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1
 \end{aligned}$$

#### 2、【分析】

$$a + b = 2013$$

$$x - 2y = 1; x + 3y = 9$$

$$\text{可得 } x = -3; y = -2$$

代入即可

答案：2033

#### 3、【分析】

2013 = 12 × 160 + 93，想使得所选任意两个数之和为 160，则所选的这组数字应为除 160 余 80 的数，根据上式可知答案为 13 个

#### 4、【分析】

$$a^3 + b^3 + 3ab = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab = 1$$

当  $a+b=1$  时，上式等于  $(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b) = (a+b)^3 = 1$  成立。

#### 5、【分析】

延长  $BE$  交  $AC$  于  $F$

设  $\angle C = \alpha$ , 则  $\angle ABC = 3\alpha$

$$\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha$$

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\because AE \perp BE, \therefore \angle ABE = 2\alpha$$

$$\therefore \angle EBC = \alpha$$

$$\therefore BF = FC$$

$$\text{又 } AB = AF = a, \therefore FC = b - a$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BF = \frac{b-a}{2}$$

### 6、【分析】

原式可化简为:  $(2x+3)(x+1) = (x+1)^2 \sqrt{2x+3}$

$\because x$  为正整数,  $\therefore x+1 > 0$

$$\therefore \sqrt{2x+3} = x+1$$

可得:  $x = \sqrt{2}$

### 8、【分析】

过点 F 分别做  $FG \perp DC$ ,  $FH \perp AB$  垂足为 G、H

设  $GF = a$ , 则  $FH = 10 - a$ , 设  $DG = b$ , 则  $GC = 14 - b$

$$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} - S_{\triangle DFC} = 70 - 7a$$

勾股定理  $DC^2 = DF^2 + FC^2$  可得:  $14^2 = a^2 + b^2 + (14 - b)^2$

即  $a^2 = -(b-7)^2 + 49$ ,  $\therefore a$  最大为 7, 此时  $b = 7$

$$\therefore S_{\triangle ABF \text{最大}} = 70 - 7 \times 7 = 21$$

### 9、【分析】

原式  $= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 2 = 4a^2 - 4a - 16$

$\Delta \geq 0$ , 可得  $a^2 \geq 9$

所以原式最小值为 8

### 10、【分析】

原式:

$$\begin{aligned} &= \frac{(3-2) \times 2!}{2} + \frac{(4-2) \times 3!}{2^2} + \cdots + \frac{(2015-2) \times 2014!}{2^{2013}} \\ &= \frac{3!}{2} - 2! + \frac{4!}{2} - \frac{3!}{2} + \cdots + \frac{2015!}{2^{2013}} - \frac{2014!}{2^{2012}} \\ &= \frac{2015!}{2^{2013}} - 2 \end{aligned}$$

### 11、【分析】

作  $CD \perp AB$ , 垂足为 D

设  $DE = 1, BE = a$ , 则  $AB = 3a, AD = 2a - 1$

$\because \angle DEC = 45^\circ, \therefore DC = DE = 1$

由  $S_{\triangle ADC} \sim S_{\triangle CDB}$ , 得  $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ , 即  $\frac{2a-1}{1} = \frac{1}{a+1}$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{17}-1}{4}, \therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DC} = 2a-1 = \frac{\sqrt{17}-3}{2}$$

12、【分析】

$$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}, \text{ 可知 } c=9 \text{ 时有最小值, 代入得: } 10 + \frac{90a-81}{a+b+9}$$

$$\text{可知 } b=9 \text{ 时有最小值, 代入得: } 100 - \frac{1701}{a+18},$$

$$\text{可知 } a=1 \text{ 时有最小值, 代入可得最小值为: } 10\frac{9}{19}$$

14、【分析】

$n=1$	1
$n=2$	2
$n=3$	$1+2=3$
$n=4$	$2+3=5$
$n=5$	$3+5=8$
$n=6$	$5+8=13$
$n=7$	$8+13=21$
$n=8$	34
$n=9$	55
$n=10$	89

15、【分析】

$$\text{延长 } EF \text{ 交 } AB、CD \text{ 于 } M、N, \text{ 有 } MN = \frac{a+b}{2}, ME = FN = \frac{a}{2}, EF = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} S_{EFDA} = (\frac{b-a}{2} + a)h_1 \times \frac{1}{2} \\ S_{EFCB} = (\frac{b-a}{2} + B)h_2 \times \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{又 } \because \frac{S_{EFDA}}{S_{EFCB}} = \frac{1}{k}, \text{ 可得 } \frac{a+b}{3b-a} = \frac{1}{k}, \text{ 整理得: } \frac{a}{b} = \frac{3-k}{k+1}$$

16、【分析】

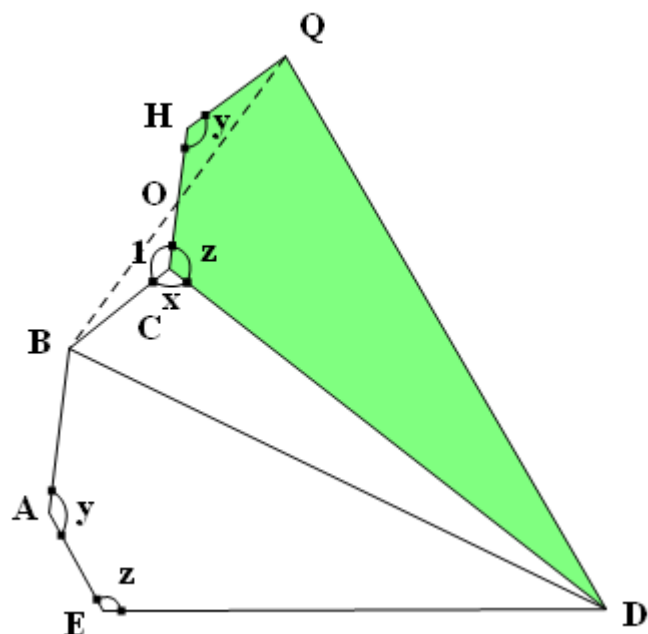
$\because x^2 - x - 1$  是质数, 又  $\because ax + bx + 1$  是一次式, 则整除的条件是:

$x^2 - x - 1$  是  $ax + bx + 1$  的质因数

$\therefore ax + bx + 1 = \pm 1$  即可, 即  $a + b = 0$

17、【分析】2011

18、【分析】



$$x + y + z = 360^\circ$$

$$x + z + \angle 1 = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = y \\ HQ = AB = BC \end{cases}$$

$\Rightarrow HQCB$ 为平行四边形

又有 $\triangle HOQ \cong \triangle CBO$

$\Rightarrow$ 求 $\triangle BDQ$ 面积即可

$$S = 1$$

19、【分析】1

20、

	24	1	3		20	13		11
3			3					
18	10				8			
21	5				12			4
20	9					11		
13				6				7
3		1				2		