

41. 当一个数的个位数字依次是 $1, 2, 3, \dots, 9, 0$ 时, 它与自身的乘积的个位数字分别为 $1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0$ 。

因此我们可将这十个数当成一个整体, 它们的和为

$$1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0 = 45,$$

即它们和的个位数为 5 。

$$2013 \div 10 = 201 \dots 3,$$

则 $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \dots, 2012 \times 2012, 2013 \times 2013$ 的个位数字的和是

$$201 \times 5 + (1 + 4 + 9) = 1005 + 14 = 1019。$$

即 $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + 2012 \times 2012 + 2013 \times 2013$ 的个位数字是 9 。

42. 第一次留下的是 2 的倍数位上的数字;

第二次留下的是 4 的倍数位上的数字;

第三次留下的是 8 的倍数位上的数字;

.....

以此类推, 最后删去的是第 128 位的数字。

$$128 \div 10 = 12 \dots 8,$$

所以剩下的是第 12 组“ 1234567890 ”中的第 8 个位置上的数, 即为 8 。

43. 同时可被 $3, 4, 7$ 整除的最小的自然数是

$$3 \times 4 \times 7 = 84。$$

因为 $20131231 \div 84$, 得商 239657 , 余 43 ,

所以要求的数是 $20131231 - 43 = 20131188$ 。

44. 不是闰年的年份有 365 天,

$$365 \div 7 = 52 \dots 1。$$

闰年有 366 天,

$$366 \div 7 = 52 \dots 2。$$

所以如果没有闰年的话应该在 7 年以后即 2018 年国庆是星期六, 但因为 2012 年和 2016 年是闰年, 多出的一天在 2 月, 早于国庆, 所以下一次国庆是星期六的是 2016 年。

45. 列表如下

月份	12	1	2	3	4	5	6
天数	$31 - 21$	31	28	31	30	31	21

从 2013 年的冬至日 12 月 21 日到 2014 年的夏至日 6 月 21 日共

$$(31 - 21) + 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 21 = 182(\text{天})。$$

$$182 \div 7 = 26,$$

而 2013 年的冬至日 12 月 21 日是星期六, 所以 2014 年的夏至日 6 月 21 日也是星期六。