

第 14 届“中环杯”中小学生思维能力训练活动 八年级决赛答案

一、填空题：

1. 【答案】 330

【解答】容易知道， $x^2 - 11x + 30 = 0$ 有实数根，之后的 $x^2 - 11x + 31 = 0$ 到 $x^2 - 11x + 100 = 0$ 都没有实数根。由韦达定理我们知道，每两个实数根之和都是 11，所以总和为 $11 \times 30 = 330$

2. 【答案】 $x = 0$

【解答】左边单调递增，右边单调递减，只存在一个解，就是 $x = 0$

3. 【答案】 30

【解答】

$$\begin{aligned} & \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} \\ &= -\frac{a^4}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^4}{(a-b)(b-c)} - \frac{c^4}{(c-a)(b-c)} \\ &= -\frac{a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

利用轮换对称多项式的因式分解，我们有

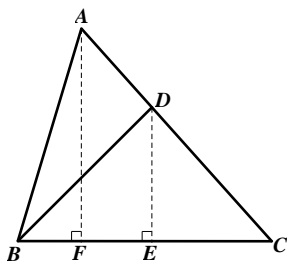
$$\begin{aligned} & a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca), \text{代回去得} \\ & -\frac{a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2]. \end{aligned}$$

最后，将条件代入，容易计算出其值为 30。

4. 【答案】 $40\sqrt{2} - 16\sqrt{10}$

【解答】如下图，作 $DE \perp BC$ ， $AF \perp BC$ ，从而可以设 $BF = x$ ，利用 $AB^2 - BF^2 = AC^2 - CF^2 \Rightarrow 7^2 - x^2 = 9^2 - (8-x)^2 \Rightarrow x = 2$ 。由于 $\angle CBD = 45^\circ$ ，所以 $\triangle DEB$ 为等腰直角三角形，所以我们可以设 $BE = ED = t$ 。由于 $\frac{DE}{AF} = \frac{CE}{CF} \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{7^2 - 2^2}} = \frac{CE}{8-2} \Rightarrow CE = \frac{2t}{\sqrt{5}}$ 。利用

$$BE + CE = BC \Rightarrow t + \frac{2t}{\sqrt{5}} = 8 \Rightarrow t = 40 - 16\sqrt{5}, \text{ 所以 } BD = \sqrt{2}BE = \sqrt{2}t = 40\sqrt{2} - 16\sqrt{10}$$



5. 【答案】1230

【解答】设只喜欢羽毛球、只喜欢排球、只喜欢壁球、同时喜欢羽毛球和排球、同时喜欢羽毛球和壁球、同时喜欢排球和壁球的人数分别为 a, b, c, d, e, f ，我们知道 $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ d, e, f \geq 1 \end{cases}$ ，且 $a+b+c+d+e+f=5$ ，我们用 (a, b, c, d, e, f) 来表示一种人数的分布，接下来讨论几种可能：

(1) 形如 $(0, 0, 0, 3, 1, 1)$ 的分布，有 $3 \times C_3^3 \times A_2^2 = 60$ 种（其中 3 表示可以是 $\begin{cases} (0, 0, 0, 3, 1, 1) \\ (0, 0, 0, 1, 3, 1) \\ (0, 0, 0, 1, 1, 3) \end{cases}$ 中的一
种）；

(2) 形如 $(0, 0, 0, 2, 2, 1)$ 的分布，有 $3 \times C_3^2 \times C_3^2 = 90$ 种（其中 3 表示可以是 $\begin{cases} (0, 0, 0, 2, 2, 1) \\ (0, 0, 0, 2, 1, 2) \\ (0, 0, 0, 1, 2, 2) \end{cases}$ 中的一
种）；

(3) 形如 $(0, 1, 0, 2, 1, 1)$ 的分布，有 $3 \times 3 \times C_3^2 \times A_3^3 = 540$ 种（其中第一个 3 表示 a, b, c 哪个取 1，第二个 3 表示 d, e, f 哪个取 2）；

(4) 形如 $(1, 1, 0, 1, 1, 1)$ 的分布，有 $3 \times A_3^5 = 360$ 种（其中 3 表示 a, b, c 哪个取 0）；

(5) 形如 $(2, 0, 0, 1, 1, 1)$ 的分布，有 $3 \times C_3^2 \times A_3^3 = 180$ 种（其中 3 表示 a, b, c 哪个取 2）；

综上所述，一共有 $60+90+540+360+180=1230$ 种组合方式

6. 【答案】-7

【解法 1】令 $y = \frac{1+x}{1-x}$ ，所以 $\frac{1+x_1}{1-x_1} + \frac{1+x_2}{1-x_2} + \frac{1+x_3}{1-x_3} = y_1 + y_2 + y_3$ 。而 $y = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$ ，代入 $x^3 - x - 1 = 0$ 得 $\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right) - 1 = 0 \Rightarrow y^3 + 7y^2 - y + 1 = 0$ 。根据韦达定理， $y_1 + y_2 + y_3 = -7$

【解法 2】 $\frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{(1+x_1)(1+x_1+x_1^2)}{(1-x_1)(1+x_1+x_1^2)} = \frac{(1+x_1)(1+x_1+x_1^2)}{1-x_1^3} = \frac{(1+x_1)(1+x_1+x_1^2)}{1-(x_1+1)} = -x_1^2 + 2x_1 + 2 + \frac{1}{x_1}$ ，
所以 $\frac{1+x_1}{1-x_1} + \frac{1+x_2}{1-x_2} + \frac{1+x_3}{1-x_3} = \left(-x_1^2 + 2x_1 + 2 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(-x_2^2 + 2x_2 + 2 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(-x_3^2 + 2x_3 + 2 + \frac{1}{x_3}\right)$ ，接下来根据三次方程的韦达定理很容易计算下去了

7. 【答案】 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

【解答】

(1) 若 $x=0$ ，很容易推出 $y=1$ ；

(2) 若 $x \neq 0$ ，令 $a = \frac{y}{x}$ ，代入 $y + \frac{2x-y}{x^2+y^2} = 0$ ，从而推出 $\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{y}{y-2x} = \frac{a}{a-2}$ （注意，这里要简单讨论一下是否会出现 $y=2x$ 的情况）。将 $\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{a}{a-2}$ 代入 $x + \frac{x+2y}{x^2+y^2} = 2$ ，从而推出

$x + \frac{a}{a-2}(x+2y) = 2 \Rightarrow 1 + \frac{a}{a-2}(1+2a) = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{a^2+a-1}{a-2}$ ，所以

$$\frac{a}{a-2} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+a^2} = \frac{(a^2+a-1)^2}{(a-2)^2(1+a^2)}$$
，化简这个方程得

$4a^3 - 2a^2 + 1 = 0 \Rightarrow (2a+1)(2a^2 - 2a + 1) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ ，从而推出 $y = -\frac{1}{2}x$ ，代入任意一个方程都

可以推出 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ ；

综上所述，本方程组一共只有两个解： $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 。

8. 【答案】1000

【解答】只要 n 为完全平方数，则 $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] = 0$ ，满足我们的要求。在 $1 \sim 1000000$ 中一共有 1000 个完全平方数，这些都是解。接下来我们要证明，只要不是完全平方数，就不可能满足这个要求；

令 $[\sqrt{n}] = k$ ，则 $k^2 < n < (k+1)^2$ （如果 $n = k^2$ ，我们之前已经讨论过了，这里不再讨论），令

$n - k^2 = r \Rightarrow (0 < r < 2k+1)$ ，则 $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] < \sqrt{k^2 + r} - k = \frac{r}{\sqrt{k^2 + r} + k} = \frac{r}{\sqrt{n} + k}$ 。由于 $0 < r < 2k+1$ ，

所以 $1 \leq r \leq 2k$ ，所以 $\frac{r}{\sqrt{n} + k} \geq \frac{1}{\sqrt{n} + k} > \frac{1}{\sqrt{1000000} + 1000} = \frac{1}{2000}$ ，与 $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] < \frac{1}{2014}$ 矛盾。所以

只要不是完全平方数，都不符合 $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] < \frac{1}{2014}$ 的要求，所以满足条件的 n 有 1000 个

9. 【答案】4564

【解答】由于 $\frac{BE_i}{BC} = \frac{1}{i+1} (1 \leq i \leq 8)$ ，所以 $\frac{OE_i}{OA} = \frac{BE_i}{AD} = \frac{1}{i+1}$ ，设 $OE_i = t$ ，则 $OA = (i+1)t$ 。由于

$AB \parallel DF$ ，所以 $\frac{AE_i}{E_iF} = \frac{BE_i}{E_iC} = \frac{1}{i}$ ，所以 $E_iF = iAE_i = i(i+2)t$ ，所以

$OF = E_iF + OE_i = i(i+2)t + t = (i+1)^2t$ ，所以 $\frac{OF}{OA} = \frac{(i+1)^2t}{(i+1)t} = i+1$ 。而 $BG_j = \frac{j}{999}AB$

$(1 \leq j \leq 998)$ ，则 $\frac{AB}{BG_j} = \frac{999}{j}$ 。 $\triangle FAG_j$ 被 OHB 所截，所以

$\frac{FO}{OA} \cdot \frac{AB}{BG_j} \cdot \frac{G_jH}{HF} = 1 \Rightarrow (i+1) \cdot \frac{999}{j} \cdot \frac{G_jH}{HF} = 1 \Rightarrow \frac{G_jH}{HF} = \frac{j}{999(i+1)}$ 。根据四边形的蝴蝶定理，我们有

$\frac{S_{\triangle G_jBO}}{S_{\triangle FBO}} = \frac{G_jH}{HF} = \frac{j}{999(i+1)}$ ，其中 $\begin{cases} 1 \leq j \leq 998 \\ 2 \leq i+1 \leq 9 \end{cases}$ 。接下来我们要找，有多少组满足 (i, j) 满足

$\frac{j}{999(i+1)}$ 是一个纯循环小数。根据纯循环小数的知识，我们知道分母中不能出现 2, 5，所以

我们以区分对待。

①当 $i+1=3,7,9$ 时,此时 j 可以任意选取,有 $998 \times 3 = 2994$ 种取法;

②当 $i+1=5$ 时,则 j 必须为5的倍数,有 $\left[\frac{998}{5}\right] = 199$ 种取法;

③当 $i+1=2,6$ 时,则 j 必须为2的倍数,有 $\left[\frac{998}{2}\right] \times 2 = 499 \times 2 = 998$ 种取法;

④当 $i+1=4$ 时,则 j 必须为4的倍数,有 $\left[\frac{998}{4}\right] = 249$ 种取法;

⑤当 $i+1=8$ 时,则 j 必须为8的倍数,有 $\left[\frac{998}{8}\right] = 124$ 种取法;

综上所述,一共有 $2994 + 199 + 998 + 249 + 124 = 4564$ 种取法

10. 【答案】39

【解答】设 $x + \frac{y}{b} = n \frac{x}{y} \Rightarrow nx = xy + \frac{y^2}{b} \Rightarrow (n-y)x = \frac{y^2}{b} \Rightarrow x = \frac{y^2}{b(n-y)}$, 从而推出 b 不能是质数,

否则 $b|y^2 \Rightarrow b|y$, 与 $0 < y < b$ 矛盾。同理, 我们也可以推出, b 不能表示为若干个不同质数的乘积(即质因数分解不能为 $b = p_1 p_2 \cdots p_n$, 其中 p_1, p_2, \dots, p_n 均不同), 接下来我们要证明, 剩下的所有的数都是好数:

假设 b 的质因数分解中存在一个质数 p , 其指数为 $m(m > 1)$, 令 $\begin{cases} y = \frac{b}{p} \\ n = y + 1 \end{cases}$, 则 $b|y^2$ (因为

$y^2 = \frac{b^2}{p^2}$, 其中质因子 p 的指数为 $2m-2$ 。由于 $m > 1$, 所以 $2m-2 \geq m$ 。 b 中剩下的质因子显

然在 y^2 中), 所以 $x = \frac{y^2}{b(n-y)} = \frac{y^2}{b}$ 是一个正整数, 而且由于 $0 < y < b$, 所以可以推出

$0 < x < b$, 满足我们所有的要求;

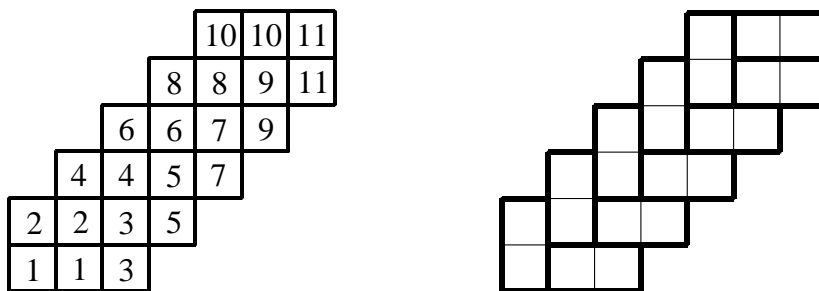
接下来只要统计 $2 \sim 100$ 中, 有多少个数的质因数分解中某个质因子的指数大于等于2即可, 显然这样的质因子只能是 $2, 3, 5, 7$ ($11^2 > 100$)。利用容斥原理, $2 \sim 100$ 中 2^2 的倍数有25个, 3^2 的倍数有11个, 5^2 的倍数有4个, 7^2 的倍数有2个, 但是有三个数重复统计了: $36, 72, 100$, 所以好数一共有 $25 + 11 + 4 + 2 - 3 = 39$ 个

二、动手动脑题:

11. 【答案】11

【解答】如下左图, 我们将这些方格进行标数, 首先如果只有标1的两个方格, 那么有1种放法; 如果只有标1、2的四个方格, 那么有2种放法; 所以, 我们可以猜测, 下图有11种放法。简单证明一下, 用递推的思路, 假设标有1、2、...、 n 的 $2n$ 个方格有 $f(n)$ 种放法, 那么加上标有 $n+1$ 的两块方格后, 就有 $f(n+1)$ 种放法。对于标有 $n+1$ 的两块方格(以下图两块11的举例), 我们可以有两种放法: (1) 两块11上正好放有一块 1×2 的方格, 那么剩下的就是 $f(n)$ 种放法; (2) 如果上面的那块11与10组合成 1×2 的方格, 那么下面的11必须与9组合成 1×2 的方格, 然后我们发觉, 这种情况下只有一种放法, 如下右

图。从而，我们得到递推公式： $f(n+1)=f(n)+1$ ，由于 $f(1)=1, f(2)=2$ ，从而推出 $f(11)=11$



12. 【证明】利用 $\frac{xb+(1-x)c}{a} = \frac{xa+(1-x)b}{c} \Rightarrow c[xb+(1-x)c] = a[xa+(1-x)b]$ ，化简一下得

$$x(c^2+a^2-ab-ca)=c^2-ab, \text{ 同理我们可以得 } \begin{cases} x(a^2+b^2-bc-ab)=a^2-bc \\ x(b^2+c^2-ca-bc)=b^2-ca \end{cases}。 \text{ 将三个式子通}$$

加得 $2x(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ ，从而得

$$(2x-1)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0, \text{ 接下来分类讨论:}$$

$$(1) \text{ 当 } a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \Rightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0 \Rightarrow a=b=c$$

$$(2) \text{ 当 } 2x-1=0, \text{ 代回 } \frac{xb+(1-x)c}{a} = \frac{xc+(1-x)a}{b} = \frac{xa+(1-x)b}{c} \text{ 得 } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}。 \text{ 所以}$$

$$\frac{a+b}{c}+1 = \frac{b+c}{a}+1 = \frac{c+a}{b}+1 \Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}。 \text{ 由于 } a, b, c \text{ 都是正数, 所以同时将}$$

$$a+b+c \text{ 消去得 } a=b=c$$

13. 【证明】利用 $\begin{cases} \angle A + \angle AFE + \angle AEF = 180^\circ \\ \angle AEF + \angle FED + \angle CED = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle A = \angle FED$ ，同理可以证明 $\angle B = \angle DFE$ ，

$$\text{所以 } \triangle ABC \sim \triangle EFD \Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{AB}。 \text{ 设 } \triangle ABC \text{ 的三边长度分别为 } \begin{cases} AB=c \\ AC=b \\ BC=a \end{cases}, \text{ 则可以设}$$

$$\begin{cases} DF=ak \\ DE=bk, \text{ 再设 } BD=CE=AF=x。 \\ EF=ck \end{cases}$$

(1) 如果 a, b, c 中有任意两条边长相等，不妨设 $b=c$ ，则 $b=c \Rightarrow \angle B = \angle C$ ，结合 $\begin{cases} BD=CE \\ \angle BDF = \angle CEF \end{cases}$ ，我们可以推出 $\triangle BDF \cong \triangle CEF$ ，所以 $DF=EF \Rightarrow ak=bk \Rightarrow a=b$ ，所以 $a=b=c$ ，所以 $\triangle ABC$ 是一个等边三角形

(2) 如果 $\triangle ABC$ 是一个不等边三角形，不妨设 $a>b>c$ ，由正弦定理我们有 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b} > 1$ 。

在 $\triangle AFE$ 中, $\frac{EF}{\sin A} = \frac{AE}{\sin \angle AFE} \Rightarrow \frac{ck}{\sin A} = \frac{b-x}{\sin \angle AFE} \Rightarrow \frac{ck}{b-x} = \frac{\sin A}{\sin \angle AFE}$;

在 $\triangle BDF$ 中, $\frac{DF}{\sin B} = \frac{BF}{\sin \angle BDF} \Rightarrow \frac{ak}{\sin B} = \frac{c-x}{\sin \angle BDF} \Rightarrow \frac{ak}{c-x} = \frac{\sin B}{\sin \angle BDF}$;

将前面两个式子相除得 $\frac{c(c-x)}{a(b-x)} = \frac{\sin A}{\sin B} > 1 \Rightarrow \frac{c-x}{b-x} > \frac{a}{c} > 1 \Rightarrow c-x > b-x \Rightarrow c > b$ 。考虑到之前我

们有 $a > b > c$, 产生矛盾, 所以这种情况不可能出现

综上所述, $\triangle ABC$ 是一定是个等边三角形

14. 【证明】若 $m=0$, 显然此式子不可能成立

若 $m>1$, 容易分析出不管 n 为奇数还是偶数, N 总是偶数, 由于 $m>1$ 。所以 $4|N^m$ 。

(1) 若 $n \equiv 0 \pmod{2}$, 则 $\begin{cases} (n^2+1)^{2^k} \equiv 1 \pmod{4} \\ 44n^3+11n^2+10n+2 \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$, 所以

$(n^2+1)^{2^k} \cdot (44n^3+11n^2+10n+2) \equiv 2 \pmod{4}$, 而前面已经证明过 $4|N^m$, 显然不可能

(2) 若 $n \equiv 1 \pmod{2}$, 则 $n^2+1 \equiv 2 \pmod{4}$, 可以令 $n^2+1=2z$, 其中 $z \equiv 1 \pmod{2}$ 。而 $44n^3+11n^2+10n+2 \equiv 1 \pmod{2}$, 所以

$(n^2+1)^{2^k} \cdot (44n^3+11n^2+10n+2) = (2z)^{2^k} \cdot (44n^3+11n^2+10n+2) = 2^{2^k} \cdot [z^{2^k} \cdot (44n^3+11n^2+10n+2)]$, 其中 $z^{2^k} \cdot (44n^3+11n^2+10n+2)$ 为奇数。对于 N , 我们可以令其为 $2^x \cdot y$, 其中 $y \equiv 1 \pmod{2}$, 所以 $N^m = 2^{xm} \cdot y^m$, 所以 $2^{2^k} \cdot [z^{2^k} \cdot (44n^3+11n^2+10n+2)] = 2^{xm} \cdot y^m \Rightarrow 2^{2^k} = xm$ 。由于 $m>1$, 所以 $k \neq 0$

且 m 是一个偶数, 所以 N^m 是一个完全平方数。由于 $(n^2+1)^{2^k} \cdot (44n^3+11n^2+10n+2) = N^m$, 而 $k \neq 0$ 意味着 $(n^2+1)^{2^k}$ 已经是完全平方数了, 所以 $44n^3+11n^2+10n+2$ 必须为完全平方数。由于 $n \equiv 1 \pmod{2}$, 容易知道 $44n^3+11n^2+10n+2 \equiv 3n^2+2n+2 \equiv 3 \times 1 + 2n + 2 \equiv 1 + 2n \equiv 3 \pmod{4}$, 显然不可能是完全平方数, 所以这种情况也不可能出现

综上所述, $m=1$

15. 【答案】

