

第十四届“中环杯”中学生思维能力训练活动

初二年级决赛

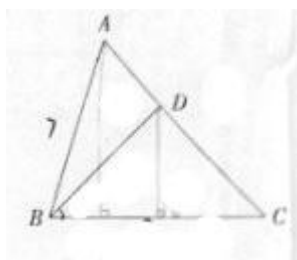
1. 方程 $(x^2-11x+1)(x^2-11x+2)\cdots(x^2-11x+100)=0$ 的所有实数根的和为_____
2. 已知 $a, b, c > 0$, 且 x 满足

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{bx+c} + \sqrt{cx+a} = \sqrt{a-bx} + \sqrt{b-cx} + \sqrt{c-ax}, \text{ 则 } x = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. 已知 $a=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $b=\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $c=\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$, 计算:

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. 如图, $\triangle ABC$ 的三边长度 $AB=7$, $BC=8$, $AC=9$, 点 D 在 AC 上, 使得角 $CBD=45^\circ$, 则 $BD=\underline{\hspace{2cm}}$



5. 小钱、小王、小张、小孙、小陶都很喜欢运动, 每人都喜欢羽毛球、排球和壁球中的一种或几种。已知没有人三种运动都喜欢, 但有人同时喜欢羽毛球和排球, 也有人同时喜欢排球和壁球, 还有人同时喜欢羽毛球和壁球。那么五个人各自爱好的球类运动共有_____种不同的组合方式。

6. 已知一元三次方程 $x^3-x-1=0$ 有三个根, x_1, x_2, x_3 , 则 $\frac{1+x_1}{1-x_1} + \frac{1+x_2}{1-x_2} + \frac{1+x_3}{1-x_3} = \underline{\hspace{2cm}}$

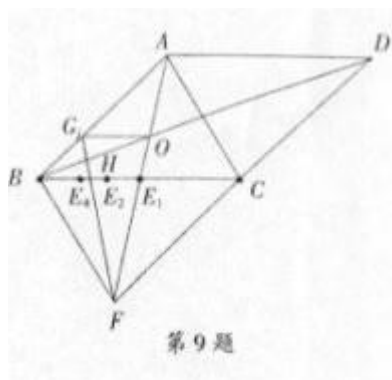
$$\begin{cases} x + \frac{x+2y}{x^2+y^2} = 2 \\ y + \frac{2x-y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

7. 方程组的解为_____

8. 已知正整数 $n \leq 1000000$, 且 $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] < \frac{1}{2014}$ (其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大正整数) 则满足条件的 n 有_____个

9. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, BC 边上恰好有 8 个点 $E_1, E_2, E_3, \dots, E_8$ (图中只画出了 3 个点), 满足 $BE_i/BC=1/(i+1)$ ($i=1, 2, \dots, 8$), 比如 $BE_1/BC=1/2$, $BE_2/BC=1/3$, \dots , $BE_8/BC=1/9$, 在 AB 边上有 998 个点 G_1, G_2, \dots, G_{998} , 这 998 个点将 AB 边平分成为 999 段。我们从 BC 边上选取一个点 E , 从 AB 边上选取一个点 G_1 (一共有 8×998 种选法), 联接 AE_1 并延长, 交 DC 延长线于点 F , 联结 FG_1, FB , 这么多选法中,

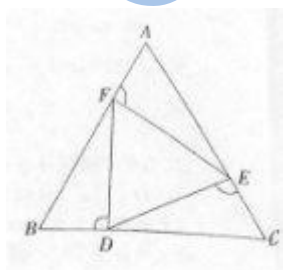
使得



10. 如果一个正整数 b ($b \geq 2$) 满足以下的条件, 我们就称其为“恒生银行数”, 存在两个正整数 x, y ($0 < x < b, 0 < y < b$), 使得 $x+y/b$ 是 x/y 的整数倍, 那么, 小于等于 100 的“恒生银行数”一共有____个
11. 用 2 个 1×2 的小长方形可以拼成图 1 所示的图形, 有两种拼法, 如图 2, 图 3 (黑色小长方形和白色小长方形互换位置, 视为同一种拼法), 用 11 个 1×2 的小长方形七号拼成如下图形, 那么共有多少种不同拼法?



12. 已知 a, b, c, x 都是正数, 且满足 $\frac{xb+(1-x)c}{a} = \frac{xc+(1-x)a}{b} = \frac{xa+(1-x)b}{c}$, 求证: $a=b=c$.
13. 如图, D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 中 BC, CA, AB 上的点, 满足 $BD=CE=AF$ 且角 BDF =角 CED =角 AFE , 求证: $\triangle ABC$ 是一个等边三角形



14. 已知四个非负整数 m, n, N, k 满足方程 $(n^2+1)^{2k} \cdot (44n^3+11n^2+10n+2) = N^m$, 求证 $m=1$
15. 将图 2 中的 10 艘小船放入图 1 的表中, 小船中的每一块占据一个方格, 每艘船都是水平或竖直放置, 并且任意两艘船不会相邻 (如果一艘船中的某一格与另一艘船

中的某一格相邻, 就认为这两艘船相邻) 表中右边和下面的数字表示这行, 这列中小船占据的方格数量, 游戏波浪线的地方表示这里不能放置船。图中已经给出了两个方格 (方格与船中的方块对应, 圈与船中的圆对应) 请你画出最后的结果 (注意: 圆、方块、半圆要画清楚)

