第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

参考答案及评分标准

高二　第2试

一、选择题(每小题4分.)

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答　案	A	B	B	C	C	B	C	D	A	A

二、填空题(每小题4分.)

题　号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答　案	$(8,+\infty)$	± 3	4	18	20 或 110	$\frac{8}{3}$	$\sqrt{3}-1$	$(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$	1	$y^2=2x$

三、解答题

21. 令 $x=\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,

则 $$0\leqslant x\leqslant 1.$$

设 $y=\cos 2\theta+a\sin\theta+2a+2$,则

$$\begin{aligned}y&=1-2\sin^2\theta+a\sin\theta+2a+2\\&=-2x^2+ax+2a+3\\&=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+2a+3,\end{aligned}$$

$$0\leqslant x\leqslant 1,$$

要使 $y=f(x)=-2x^2+ax+2a+3<0$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时恒成立,只须当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$f(x)_{\max}<0.\qquad(2\text{ 分})$$

因为函数 $y=f(x)$ 的图象是顶点为

$$\left(\frac{a}{4},\frac{a^2}{8}+2a+3\right),\qquad(4\text{ 分})$$

开口向下的抛物线在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的部分,

而 $y_{\max}$ 与 a 的值有关.

下面分三种情况讨论:

(1) 当 $a<0$ 时,抛物线的顶点在 y 轴左侧,

此时 $$f(x)_{\max}=f(0)=2a+3,$$

于是 $$\begin{cases}2a+3<0,\\a<0,\end{cases}$$

解得 $$a<-\frac{3}{2}.\qquad(6\text{ 分})$$

(2) 当 $0\leqslant a\leqslant 4$ 时,抛物线的顶点在 y 轴上或 y 轴右侧,直线 $x=1$ 上或它的左侧,此时

$$f(x)_{\max}=f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a^2}{8}+2a+3,$$

于是有 $$\begin{cases}\frac{a^2}{8}+2a+3<0,\\0\leqslant a\leqslant 4,\end{cases}$$

此不等式组无实数解;　(8 分)

(3) 当 $a>4$ 时,抛物线的顶点在直线 $x=1$ 的右侧,此时

$$f(x)_{\max}=f(1)=3a+1,$$

于是有 $$\begin{cases}3a+1<0,\\a>4,\end{cases}$$

此不等式组无实数解;

综上知,参数 a 的取值范围是 $a<-\frac{3}{2}$.

(10 分)

22. (1) 因为四棱柱的体积

$$V=S_{\text{四边形}ABCD}\cdot h_{A_1-ABCD},$$

其中 $$S_{\text{四边形}ABCD}\leqslant S_{\text{正方形}ABCD}=1.$$

棱柱高 $h_{A_1-ABCD}\leqslant h_{A_1-AD}=A_1A\cdot\sin\angle A_1AD$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以,题设四棱柱体积的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(7 分)

(2) 分别取 A_1B_1、DC 的中点 M、N,连接 MN,则

$$MN\underline{\mathbin{/\!/}}A_1D,$$

所以 BD_1 与 A_1D 所成的角等于 BD_1 与 MN 所成的角.　(9 分)

易证 BND_1M 是平行四边形.

设 $MN\cap BD_1=O$,则

O 为 MN 的中点.

在 $\triangle A_1MD_1$ 中,$A_1D_1=1, A_1M=\frac{1}{2}$,

$\angle D_1A_1M$ 是直角,

所以 $$D_1M=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

在 $\triangle DND_1$ 中,$DD_1=1, DN=\frac{1}{2}$,

$$\angle D_1DN=\angle A_1AB=60^\circ,$$

由余弦定理,得

$$D_1N=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times 1\times\frac{1}{2}\cos 60^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

在 $\triangle AA_1D$ 中,

$$AA_1=AD=1,\angle A_1AD=60^\circ,$$

所以 $\triangle AA_1D$ 是等边三角形，

于是 $A_1D=1$，

从而有 $MN=A_1D=1.$

在 $\triangle MND_1$ 中，

$$MN=1, D_1N=\frac{\sqrt{3}}{2}, D_1M=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

所以 $$\cos\angle MND_1=\frac{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

在 $\triangle OND_1$ 中，

$$ON=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2},$$

$$D_1N=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\angle OND_1=\cos\angle MND_1=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以 OD_1

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

于是 $OD_1=\frac{\sqrt{3}}{2}=D_1N$，

即 $\angle D_1ON=\angle MND_1$， （14 分）

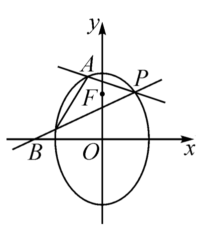
所以 $\cos\angle D_1ON=\cos\angle MND_1=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

故 BD_1 与 A_1D 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$. （15 分）

23. (1) 由题意，可设椭圆 C 的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

由题意，得 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ a:b=\sqrt{2}:1,\\ c=\sqrt{2},\end{cases}$



解得 $a^2=4, b^2=2.$

所以椭圆 C 的方程为

$$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1.$$ （5 分）

(2) 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.

由题意，知

直线 PA、PB 的斜率存在，且互为相反数.

设 PB 的斜率为 k. 由(1) 中 C 的方程，知

$$P(1, \sqrt{2}),$$

所以直线 PB 的方程为

$$y-\sqrt{2}=k(x-1).$$

由 $\begin{cases}y-\sqrt{2}=k(x-1),\\ \frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y，得

$$(2+k^2)x^2+2k(\sqrt{2}-k)x+k^2-2\sqrt{2}k-2=0. \quad (*)$$

显然，1 是方程 $(*)$ 的一个根，

所以 $x_B=1\cdot x_B=\frac{k^2-2\sqrt{2}k-2}{2+k^2}.$

同理，由直线 PA 的方程和 C 可得

$$x_A=\frac{k^2+2\sqrt{2}k-2}{2+k^2},$$

则 $x_A-x_B=\frac{4\sqrt{2}k}{2+k^2}, x_A+x_B=\frac{2k^2-4}{2+k^2}$，

$$y_A-y_B=-k(x_A-1)-k(x_B-1)$$

$$=\frac{8k}{2+k^2}.$$

所以 $k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\sqrt{2}.$ （10 分）

(3) 设直线 AB 的方程为

$$y=\sqrt{2}x+m.$$

由 $\begin{cases}y=\sqrt{2}x+m,\\ \frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y，得

$$4x^2+2\sqrt{2}mx+m^2-4=0.$$

由 $\Delta=(2\sqrt{2}m)^2-16(m^2-4)>0$，

得 $m^2<8$，

此时 $\begin{cases}x_A+x_B=-\frac{\sqrt{2}m}{2},\\ x_A\cdot x_B=\frac{m^2-4}{4}.\end{cases}$

又 点 $P(1, \sqrt{2})$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{3}}$，

$$|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

$$=\sqrt{-\frac{3}{2}m^2+12},$$

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}d\cdot|AB|$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{24-3m^2}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{m^2(8-m^2)}$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{m^2+(8-m^2)}{2}$$

$$=\sqrt{2},$$

当且仅当 $m^2=8-m^2$，即 $m^2=4$ 时，有

$$(S_{\triangle PAB})_{\max}=\sqrt{2}.$$ （15 分）