第二十五届"希望杯"全国数学邀请赛

参考答案及评分标准

高一　　第2试

一、选择题(每小题4分.)

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答　案	D	B	B	B	C	B	D	C	A	C

二、填空题(每小题4分.)

题　号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答　案	$(0,+\infty)$	$\sqrt{3}\pi$	1 或 2	$(-\infty,1]$	1	$(-\infty,-3]$	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{9}{50},\frac{2}{9}\right]$	$2+\sqrt{7}$	$\frac{240}{47}$

三、解答题

21. 由 $3-|x-1|>0$,得

$$A=(-2,4),\qquad (2\text{ 分})$$

由已知,得

$$B=\{x\mid(x-1)(x-a)<0\}.$$

若 $B=\varnothing$,则 $a=1$.

若 $B\neq\varnothing$,则

(1) 当 $a>1$ 时,$B=(1,a)$,

由 $A\cap B=B$,得

$$(1,a)\subsetneqq(-2,4),$$

推得 $1<a\leqslant4$.　　(6 分)

(2) 当 $a<1$ 时,$B=(a,1)$,

由类似推理,得 $-2\leqslant a<1$,

所以实数 a 的取值范围是 $[-2,4]$.　　(10 分)

22. (1) 由已知条件及正弦定理,得

$$8\cdot\frac{a^2-c^2}{4R^2}=(a-b)\cdot\frac{b}{2R},$$

又 $R=4$,

所以 $a^2-c^2=ab-b^2$,

即 $c^2=a^2+b^2-ab$,

再与余弦定理对比可得

$$\cos C=\frac{1}{2}.$$

因为 C 是 $\triangle ABC$ 的内角,

所以 $C=\frac{\pi}{3}$.　　(7 分)

(2) 因为 $R=4$,于是由正弦定理,得

$$c=2R\sin C=4\sqrt{3}.$$

又 $c^2=48=a^2+b^2-ab$

$$\geqslant 2ab-ab=ab,$$

即 $0<ab\leqslant48$,　　(12 分)

所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant12\sqrt{3}$,

所以当且仅当 $a=b$,即 $\triangle ABC$ 为等边三角形时,其面积取得最大值 $12\sqrt{3}$.　　(15 分)

23. (1) 当 $a=0$ 时,$f(x)=x^2$ 为偶数;　　(3 分)

当 $a\neq0$ 时,$f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.　　(6 分)

(2) 设 $x_1>x_2\geqslant2$,易知

$$f(x_1)-f(x_2)$$

$$=x_1^2+\frac{a}{x_1}-\left(x_2^2+\frac{a}{x_2}\right)$$

$$=(x_1^2-x_2^2)+a\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)$$

$$=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}[x_1x_2(x_1+x_2)-a],$$

由 $x_1>x_2\geqslant2$,得

$$x_1x_2(x_1+x_2)>16,$$

$$x_1-x_2>0,x_1x_2>0,$$

所以要使 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 是增函数只需

$$f(x_1)-f(x_2)>0,$$

即 $x_1x_2(x_1+x_2)-a>0$ 恒成立,

则 $a\leqslant16$,

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,16]$.　　(15 分)